PUNKTEVERTEILUNG:

Beispiel	1	2	3	4
Punkte	/ 4	/6	/6	/ 4

1. Gegeben ist der Bereich $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$. Führen Sie folgende Schritte aus, um das Flächenintegral

$$\int_K (x^2 + y^2) \mathrm{d}A$$

zu berechnen.

   (a) Geben Sie das Integral in kartesischen Koordinaten an, ohne es auszurechnen.

   (b) Transformieren Sie das Integral in Polarkoordinaten und berechnen Sie in diesen Koordinaten seinen Wert.

2. Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x, y) = \begin{pmatrix} 6x^2 \exp(2y) + y\cos(xy) + x + 1 \\ 4x^3 \exp(2y) + x\cos(xy) \end{pmatrix}.$$

   (a) Zeigen Sie durch Überprüfen der Integrabilitätsbedingung, dass $\boldsymbol{f}$ ein Gradientenfeld ist und geben Sie ein zugehöriges Potential Φ an.

   (b) Zusätzlich ist eine Kurve C mit der Parametrisierung

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin(t)(1 - \cos(t)) \\ \pi\cos(t)\exp(t^2) + t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

   gegeben. Berechnen Sie $\boldsymbol{r}(0)$ sowie $\boldsymbol{r}(\frac{\pi}{2})$ und bestimmen Sie anschließend den Wert des Kurvenintegrals von $\boldsymbol{f}$ entlang der Kurve C

$$\int_C \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

   Hinweis: Verwenden Sie (a) zur Berechnung.

3. Betrachten Sie für $x = x(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, die Differentialgleichung

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 25\cos(t).$$

   (a) Zeigen Sie, dass eine Lösung der homogenen Differentialgleichung gegeben ist durch $x_1(t) = \mathrm{e}^{2t}$.

   (b) Berechnen Sie die zweite, linear unabhängige homogene Lösung mittels Variation der Konstanten.

   (c) Nutzen Sie einen geeigneten Ansatz, um eine Partikulärlösung zu bestimmen.

BITTE WENDEN!

4. Gegeben ist die Funktion $f\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x < \pi, \\ 2\pi - x & \text{für } \pi \leq x < 2\pi, \end{cases}$$

welche außerhalb des Intervalls periodisch fortgesetzt wird.

(a) Skizzieren Sie die Funktion f für $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

(b) Untersuchen Sie die Funktion f auf Symmetrie (gerade/ungerade) für $x \in \mathbb{R}$.

(c) Berechnen Sie den Fourierkoeffizienten a_0.

(d) Begründen Sie, welche der Fourierkoeffizienten a_k und b_k gleich 0 für die gegebene Funktion f sind und geben Sie die Berechnungsformel von jenen Fourierkoeffizienten an, die ungleich 0 sind. Schreiben Sie nicht nur die allgemeine Formel auf, sondern setzen Sie f auch ein, die Berechnung ist nicht durchzuführen!