Gruppe A

1. Der Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x > 0, y > 0, z > 0, x + 2y + 4z < 12\}.$$

Skizzieren Sie den Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ und geben Sie das Volumen mit Hilfe eines Bereichsintegrals in (x, y, z) an. Das Integral ist nicht zu berechnen.

2. Die Funktion $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ gegeben und der Bereich B durch $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y > 0\}$. Betrachten Sie das Bereichsintegral

$$\int_B f(x, y)\, \mathrm{d}(x, y).$$

   (a) Beschreiben Sie das Bereichsintegral als iterierte Integrale in kartesischen Koordinaten, welche aber nicht berechnet werden sollen.

   (b) Berechnen Sie das Bereichsintegral mit Hilfe der Verwendung von Polarkoordinaten.

3. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\dot{y} + 3y = 6$$

mit der homogenen Lösung $y_\mathrm{h}(t) = c_0 \mathrm{e}^{-3t}$.

   (a) Weisen Sie nach, dass y_h eine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist.

   (b) Berechnen Sie mit Variation der Konstanten eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung.

4. Gegeben sei die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{y} + \dot{y} - 6y = f(t).$$

   (a) Bestimmen Sie das Fundamentalsystem $\{y_1, y_2\}$ der homogenen Differentialgleichung.

   (b) Weisen Sie nach, dass die in (a) bestimmten Lösungen $\{y_1, y_2\}$ linear unabhängig sind.

   (c) Bestimmen Sie für die Inhomogenität $f(t) = 5\mathrm{e}^{-3t}$ eine partikuläre Lösung.

5. Betrachten Sie die Funktion f auf $[0, 2\pi)$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x < \pi, \\ -x + 2\pi, & \pi \leq x < 2\pi, \end{cases}$$

welche außerhalb des Intervalls periodisch fortgesetzt wird.

(a) Skizzieren Sie die Funktion f auf $[-2\pi, 2\pi)$.

(b) Begründen Sie, welche der folgenden Formeln für die Fourier-Approximation f_n für die gegebene Funktion f, mit $a_0, a_k, b_k \neq 0$, richtig sind:

(i) $f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$

(ii) $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$

(iii) $f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx)$

(iv) $f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx)$

(v) $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx)$

(vi) $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx)$

Geben Sie Berechnungsformeln für die von Null verschiebenden Koeffizienten der Fourier-Approximation an und setzen Sie passend ein. Die Berechnung ist nicht durchzuführen!

Gruppe B

1. Der Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x > 0, y > 0, z > 0, 2x + y + 4z < 12\}.$$

   Skizzieren Sie den Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ und geben Sie das Volumen mit Hilfe eines Bereichsintegrals in (x, y, z) an. Das Integral ist nicht zu berechnen.

2. Die Funktion $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x, y) = x^2 + y^2$ gegeben und der Bereich B durch $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x > 0\}$. Betrachten Sie das Bereichsintegral

$$\int_B f(x, y)\, \mathrm{d}(x, y).$$

   (a) Beschreiben Sie das Bereichsintegral als iterierte Integrale in kartesischen Koordinaten, welche aber nicht berechnet werden sollen.

   (b) Berechnen Sie das Bereichsintegral mit Hilfe der Verwendung von Polarkoordinaten.

3. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\dot{y} + 3y = 6$$

   mit der homogenen Lösung $y_\mathrm{h}(t) = c_0 \mathrm{e}^{-3t}$.

   (a) Weisen Sie nach, dass y_h eine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist.

   (b) Berechnen Sie mit Variation der Konstanten eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung.

4. Gegeben sei die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 9y = f(t).$$

   (a) Bestimmen Sie das Fundamentalsystem $\{y_1, y_2\}$ der homogenen Differentialgleichung.

   (b) Weisen Sie nach, dass die in (a) bestimmten Lösungen $\{y_1, y_2\}$ linear unabhängig sind.

   (c) Bestimmen Sie für die Inhomogenität $f(t) = \mathrm{e}^{-2t}$ eine partikuläre Lösung.

5. Betrachten Sie die Funktion f auf $[0, 2\pi)$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x < \pi, \\ -x + 2\pi, & \pi \leq x < 2\pi, \end{cases}$$

welche außerhalb des Intervalls periodisch fortgesetzt wird.

(a) Skizzieren Sie die Funktion f auf $[-2\pi, 2\pi)$.

(b) Begründen Sie, welche der folgenden Formeln für die Fourier-Approximation f_n für die gegebene Funktion f, mit $a_0, a_k, b_k \neq 0$, richtig sind:

(i) $f_n(x) = a_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$

(ii) $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$

(iii) $f_n(x) = a_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx)$

(iv) $f_n(x) = a_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx)$

(v) $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx)$

(vi) $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx)$

Geben Sie Berechnungsformeln für die von Null verschiebenden Koeffizienten der Fourier-Approximation an und setzen Sie passend ein. Die Berechnung ist nicht durchzuführen!

Gruppe C

1. Der Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch
$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x > 0, y > 0, z > 0, 2x + 4y + z < 12\}.$$
Skizzieren Sie den Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ und geben Sie das Volumen mit Hilfe eines Bereichsintegrals in (x, y, z) an. Das Integral ist nicht zu berechnen.

2. Die Funktion $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ gegeben und der Bereich B durch $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y > 0\}$. Betrachten Sie das Bereichsintegral
$$\int_B f(x, y) \,\mathrm{d}(x, y).$$
   (a) Beschreiben Sie das Bereichsintegral als iterierte Integrale in kartesischen Koordinaten, welche aber nicht berechnet werden sollen.

   (b) Berechnen Sie das Bereichsintegral mit Hilfe der Verwendung von Polarkoordinaten.

3. Gegeben sei die Differentialgleichung
$$\dot{y} + 2y = 4$$
mit der homogenen Lösung $y_\mathrm{h}(t) = c_0 \mathrm{e}^{-2t}$.

   (a) Weisen Sie nach, dass y_h eine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist.

   (b) Berechnen Sie mit Variation der Konstanten eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung.

4. Gegeben sei die Differentialgleichung 2. Ordnung
$$\ddot{y} + \dot{y} - 6y = f(t).$$
   (a) Bestimmen Sie das Fundamentalsystem $\{y_1, y_2\}$ der homogenen Differentialgleichung.

   (b) Weisen Sie nach, dass die in (a) bestimmten Lösungen $\{y_1, y_2\}$ linear unabhängig sind.

   (c) Bestimmen Sie für die Inhomogenität $f(t) = 5\mathrm{e}^{-3t}$ eine partikuläre Lösung.

5. Betrachten Sie die Funktion f auf $[0, 2\pi)$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \pi, \\ x - 2\pi, & \pi \leq x < 2\pi, \end{cases}$$

welche außerhalb des Intervalls periodisch fortgesetzt wird.

(a) Skizzieren Sie die Funktion f auf $[-2\pi, 2\pi)$.

(b) Begründen Sie, welche der folgenden Formeln für die Fourier-Approximation f_n für die gegebene Funktion f, mit $a_0, a_k, b_k \neq 0$, richtig sind:

(i) $f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$

(ii) $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$

(iii) $f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx)$

(iv) $f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx)$

(v) $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx)$

(vi) $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx)$

Geben Sie Berechnungsformeln für die von Null verschiebenden Koeffizienten der Fourier-Approximation an und setzen Sie passend ein. Die Berechnung ist nicht durchzuführen!