Gruppe A

1. Gegeben sei $f(x) = \arccos(\sqrt{1-x^2})$. Berechnen Sie eine Stammfunktion von f.

   Hinweis: Eine mögliche Methode wäre eine spezielle Substitution.

   Außerdem gilt $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. Sei $w = 1 - \mathrm{i}$.

   (a) Ermitteln Sie $\arg\left(w^8\right)$. Geben Sie das Ergebnis im Intervall $[0, 2\pi)$ an.

   (b) Berechnen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, welche $z^3 = w$ erfüllen.

3. Gegeben Sei die Kurve

$$C = \left\{ \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} 1+2t \\ 1-t^2 \end{pmatrix} : t \in [0,1] \right\}$$

   und das Skalarfeld $f(x,y) = x^2 y$.

   (a) Berechnen Sie die Tangentialebene des Skalarfeldes im Punkt $(x_0, y_0) = (1,1)$.

   (b) Berechnen Sie die Bogenlänge $s = s(t)$ für $t \in [0,1]$.

4. Gegeben Sei die Kurve

$$C = \left\{ \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t + \mathrm{e}^t \\ t \sin t \end{pmatrix} : t \in [0,\pi] \right\}$$

   und das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y\mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^x + z\cos(yz) \\ y\cos(yz) \end{pmatrix}.$$

   (a) Weisen Sie nach, dass $\boldsymbol{f}$ wirbelfrei ist.

   (b) Berechnen Sie das Potential Φ zum Vektorfeld $\boldsymbol{f}$, welches $\Phi(0,1,\pi) = 1$ erfüllt.

   (c) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

Gruppe B

1. Gegeben sei $f(x) = \arcsin(\sqrt{1-x^2})$. Berechnen Sie eine Stammfunktion von f.

   Hinweis: Eine mögliche Methode wäre eine spezielle Substitution.

   Außerdem gilt $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. Sei $w = 1 - \mathrm{i}$.

   (a) Ermitteln Sie $\arg\left(w^8\right)$. Geben Sie das Ergebnis im Intervall $[0, 2\pi)$ an.

   (b) Berechnen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, welche $z^3 = w$ erfüllen.

3. Gegeben Sei die Kurve

$$C = \left\{ \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 2 \\ 1 - 2t \end{pmatrix} : t \in [0, 1] \right\}$$

   und das Skalarfeld $f(x, y) = xy^2$.

   (a) Berechnen Sie die Tangentialebene des Skalarfeldes im Punkt $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

   (b) Berechnen Sie die Bogenlänge $s = s(t)$ für $t \in [0, 1]$.

4. Gegeben Sei die Kurve

$$C = \left\{ \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t + \mathrm{e}^t \\ t \sin t \end{pmatrix} : t \in [0, \pi] \right\}$$

   und das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y\cos x + z\exp(xz) \\ \sin x \\ x\exp(xz) \end{pmatrix}$$

   (a) Weisen Sie nach, dass $\boldsymbol{f}$ wirbelfrei ist.

   (b) Berechnen Sie das Potential Φ zum Vektorfeld $\boldsymbol{f}$, welches $\Phi(1, \pi, 0) = 1$ erfüllt.

   (c) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

Gruppe C

1. Gegeben sei $f(x) = \arcsin(\sqrt{1-x^2})$. Berechnen Sie eine Stammfunktion von f.

   Hinweis: Eine mögliche Methode wäre eine spezielle Substitution.

   Außerdem gilt $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. Sei $w = 1 - \mathrm{i}$.

   (a) Ermitteln Sie $\arg\left(w^8\right)$. Geben Sie das Ergebnis im Intervall $[0, 2\pi)$ an.

   (b) Berechnen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, welche $z^3 = w$ erfüllen.

3. Gegeben Sei die Kurve

$$C = \left\{ \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} 1+2t \\ 1-t^2 \end{pmatrix} : t \in [0,1] \right\}$$

   und das Skalarfeld $f(x, y) = x^2 y$.

   (a) Berechnen Sie die Tangentialebene des Skalarfeldes im Punkt $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

   (b) Berechnen Sie die Bogenlänge $s = s(t)$ für $t \in [0, 1]$.

4. Gegeben Sei die Kurve

$$C = \left\{ \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t + \mathrm{e}^t \\ t \sin t \end{pmatrix} : t \in [0,\pi] \right\}$$

   und das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y\cos x + z\exp(xz) \\ \sin x \\ x\exp(xz) \end{pmatrix}$$

   (a) Weisen Sie nach, dass $\boldsymbol{f}$ wirbelfrei ist.

   (b) Berechnen Sie das Potential Φ zum Vektorfeld $\boldsymbol{f}$, welches $\Phi(1, \pi, 0) = 1$ erfüllt.

   (c) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$