Mathematik 1 **Schriftliche Prüfung** 06.12.2022

Name: ______________________________ Matrikelnummer: ____________________

PRÜFER: Andreas Körner *Viel Erfolg bei der Prüfung!*

PUNKTEVERTEILUNG:

Beispiel	1	2	3	4	5	6
Punkte	/9	/8	/5	/11	/9	/6

1. Gegeben ist die Funktion $f\colon\ \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \frac{x^3}{|x|}$.
   (a) Bestimmen die das Bild $f(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ der Funktion.
   (b) Überprüfen Sie, ob die Funktion f injektiv, surjektiv, bijektiv ist.
   (c) Geben Sie die größtmögliche Menge $W \subset \mathbb{R}$ an, sodass $f\colon\ \mathbb{R}\setminus\{0\} \to W,\ f(x) = \frac{x^3}{|x|}$ bijektiv ist und berechnen Sie die Umkehrfunktion.
   (d) Untersuchen Sie, ob f an $x = 0$ stetig fortgesetzt werden kann und geben Sie diese ggf. an.

2. (a) Seien $z_1 = 1 - \mathrm{i}$ und $z_2 = \mathrm{i}$. Berechnen Sie

$$\operatorname{Im}(z_1^2 - z_2^2), \qquad \arg z_2, \qquad |z_1 z_2|, \qquad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right), \qquad \operatorname{Re}(\mathrm{e}^{z_2}).$$

   (b) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^3 = \left(\frac{2-2\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}}\right)^5.$$

   (c) Skizzieren Sie die Menge

$$M = \{z \in \mathbb{C}\colon 2 < |z| \le 6, \tfrac{\pi}{4} \le \arg z < \tfrac{5\pi}{4}\}$$

   in der Gaußschen Zahlenebene.

3. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^4 \mathrm{e}^{-k}$ (b) $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{\ell}{\ell+1}\right)^{\ell}$

4. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x, & \text{für } x < 0, \\ -\frac{1}{2}x^2 + x + 1, & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist.

(b) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.

(c) Berechnen Sie lokale Extrema und bestimmen Sie deren Typ. Geben Sie außerdem das Monotonieverhalten der Funktion f an, d.h. bestimmen Sie, auf welchen (möglichst großen) Intervallen die Funktion monoton ist, und begründen Sie dies.

(d) Bestimmen Sie das Bild $f(\mathbb{R})$ der Funktion.

(e) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = x^2\mathrm{e}^x.$$

(a) Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$, mit Hilfe der vollständigen Induktion, die Gültigkeit der Formel für die n-te Ableitung

$$f^{(n)}(x) = ((x+n)^2 - n)\mathrm{e}^x.$$

(b) Berechnen Sie die Tangente t der Funktion f an der Stelle $x_0 = 1$.

(c) Nutzen Sie die Formel aus (a) und geben Sie die Formel für die Taylorreihe von f an der Stelle $x_0 = 1$ an. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Taylorreihe?

(d) Benutzen Sie die Reihendarstellung der Funktion e^x um eine Potenzreihendarstellung von f an der Stelle $x_0 = 0$ zu ermitteln. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist diese Potenzreihendarstellung konvergent?

6. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x, x \in \mathbb{R}^+$ (b) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$