Gruppe A

PUNKTEVERTEILUNG:

Beispiel	1	2	3	4
Punkte	/8	/8	/7	/7

1. Sei ein lineares Gleichungssystem der Form $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$A\,\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 2a \\ a & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1-a & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ äquivalent ist zu $\tilde{A}\,\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{b}}$ mit

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & 3 & -2-2a & -a^2 \\ 0 & 0 & 1+a & 1+a \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3a \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie Rang A, sowie dim (Kern A). Beachten Sie mögliche Fallunterscheidungen!
Geben Sie weiters an, für welche $a \in \mathbb{R}$ das lineare Gleichungssystem lösbar ist. Ist die Lösung eindeutig?

(c) Setzen Sie $a = 1$ und bestimmen Sie die allgemeine Lösung des linearen Gleichungssystems.

2. Betrachten Sie den Vektorraum $\mathcal{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$. Gegeben seien weiters die Mengen

$$\mathcal{U} = \left\{A \in \mathcal{V} \colon A^{\mathrm{T}} = A\right\},$$
$$\mathcal{W} = \left\{A \in \mathcal{V} \colon A^{\mathrm{T}} = -A\right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{U}$ und $\mathcal{W}$ Unterräume von $\mathcal{V}$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass

$$B_{\mathcal{U}} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\mathcal{U}$ ist.

(c) Bestimmen Sie eine Basis $B_{\mathcal{W}}$ von $\mathcal{W}$.

(d) Bestimmen Sie $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$.

(e) Bestimmen Sie dim $\mathcal{U}$, dim $\mathcal{W}$ und dim $(\mathcal{U} \cap \mathcal{W})$.

(f) Bildet $\mathcal{U} + \mathcal{W}$ eine direkte Summe? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. Betrachten Sie die Menge

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2}\colon \ \det A \neq 0 \right\}.$$

(a) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Matrizenmultiplikation assoziativ ist. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe bildet.

(b) Gegeben sei die Abbildung $\det\colon G \to U$ mit den Gruppen $(G, \diamond) = (\mathrm{GL}_2, \cdot)$ und $(U, \blacklozenge) = (\mathbb{R}, \cdot)$, wobei $\diamond$ die Matrixmultiplikation und $\blacklozenge$ die gewöhnliche Multiplikation auf $\mathbb{R}$ sind.
Zeigen Sie, dass die Abbildung det einen Gruppenhomomorphismus bildet.

(c) Berechnen Sie für die Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -4 & 6 \end{pmatrix},$$

$\det A$, $\det B$ und $\det(AB)$.

(d) Kann $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ mit der üblichen Addition und Multiplikation von Matrizen einen Körper bilden? Begründen Sie Ihre Antwort!

4. Sei $\mathcal{V} = \mathcal{P}_2$ der reelle Vektorraum aller Polynome vom Grad kleiner gleich 2. Gegeben sei weiters die Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathcal{V} \to \mathbb{R}^3, \qquad \varphi(p) = \varphi(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p'(1) \end{pmatrix},$$

wobei $p' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ die 1. Ableitung von $p \in \mathcal{V}$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung φ linear ist.

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{Kern}\varphi$ und geben Sie $\dim(\operatorname{Kern}\varphi)$ an.

(c) Bestimmen Sie eine Basis D von $\operatorname{Bild}\varphi$ und geben Sie $\dim(\operatorname{Bild}\varphi)$ an.

(d) Überprüfen Sie, ob φ injektiv, surjektiv oder bijektiv ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

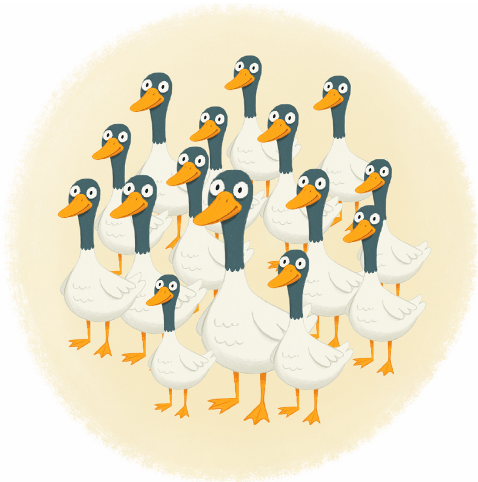

Abbildung 1: Gans viel Erfolg!

Gruppe B

PUNKTEVERTEILUNG:

Beispiel	1	2	3	4
Punkte	/8	/8	/7	/7

1. Sei ein lineares Gleichungssystem der Form $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$A\,\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ a & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1-a & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ äquivalent ist zu $\tilde{A}\,\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{b}}$ mit

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & -1 & -1-2a & -a^2 \\ 0 & 0 & 1+a & 1+a \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+a \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie Rang A, sowie dim (Kern A). Beachten Sie mögliche Fallunterscheidungen!
Geben Sie weiters an, für welche $a \in \mathbb{R}$ das lineare Gleichungssystem lösbar ist. Ist die Lösung eindeutig?

(c) Setzen Sie $a = 1$ und bestimmen Sie die allgemeine Lösung des linearen Gleichungssystems.

2. Betrachten Sie den Vektorraum $\mathcal{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$. Gegeben seien weiters die Mengen

$$\mathcal{U} = \left\{A \in \mathcal{V} \colon A^{\mathrm{T}} = A\right\},$$
$$\mathcal{W} = \left\{A \in \mathcal{V} \colon A^{\mathrm{T}} = -A\right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{U}$ und $\mathcal{W}$ Unterräume von $\mathcal{V}$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass

$$B_{\mathcal{U}} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\mathcal{U}$ ist.

(c) Bestimmen Sie eine Basis $B_{\mathcal{W}}$ von $\mathcal{W}$.

(d) Bestimmen Sie $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$.

(e) Bestimmen Sie dim $\mathcal{U}$, dim $\mathcal{W}$ und dim $(\mathcal{U} \cap \mathcal{W})$.

(f) Bildet $\mathcal{U} + \mathcal{W}$ eine direkte Summe? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. Betrachten Sie die Menge

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \colon\ \det A \neq 0\right\}.$$

(a) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Matrizenmultiplikation assoziativ ist. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe bildet.

(b) Gegeben sei die Abbildung $\det\colon G \to U$ mit den Gruppen $(G, \diamond) = (\mathrm{GL}_2, \cdot)$ und $(U, \blacklozenge) = (\mathbb{R}, \cdot)$, wobei $\diamond$ die Matrixmultiplikation und $\blacklozenge$ die gewöhnliche Multiplikation auf $\mathbb{R}$ sind.
Zeigen Sie, dass die Abbildung det einen Gruppenhomomorphismus bildet.

(c) Berechnen Sie für die Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ -2 & 8 \end{pmatrix},$$

$\det A$, $\det B$ und $\det(AB)$.

(d) Kann $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ mit der üblichen Addition und Multiplikation von Matrizen einen Körper bilden? Begründen Sie Ihre Antwort!

4. Sei $\mathcal{V} = \mathcal{P}_2$ der reelle Vektorraum aller Polynome vom Grad kleiner gleich 2. Gegeben sei weiters die Abbildung

$$\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathbb{R}^3, \qquad \varphi(p) = \varphi(p(x)) = \begin{pmatrix} p'(1) \\ p(1) \\ p(0) \end{pmatrix},$$

wobei $p' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ die 1. Ableitung von $p \in \mathcal{V}$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung φ linear ist.

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{Kern}\varphi$ und geben Sie $\dim(\operatorname{Kern}\varphi)$ an.

(c) Bestimmen Sie eine Basis D von $\operatorname{Bild}\varphi$ und geben Sie $\dim(\operatorname{Bild}\varphi)$ an.

(d) Überprüfen Sie, ob φ injektiv, surjektiv oder bijektiv ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

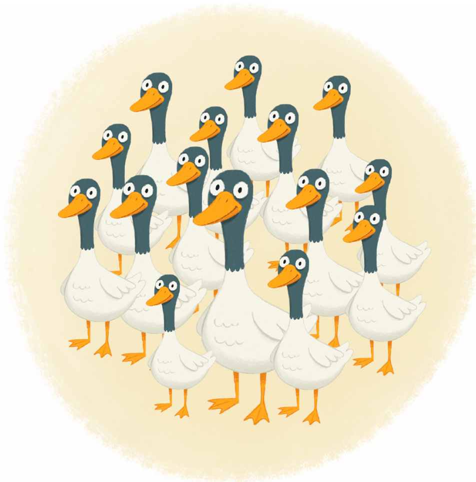

Abbildung 1: Gans viel Erfolg!