

Name: _____

Matrikelnummer: _____

PRÜFER: Andreas Körner

Viel Erfolg bei der Prüfung!

PUNKTEVERTEILUNG:

Beispiel		1		2		3		4		5		6	
Punkte		/9		/7		/7		/8		/9		/8	

1. Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) = |x^2 - 1| - 3$.

- (a) Skizzieren Sie die Funktion f und bestimmen Sie das Bild $f(\mathbb{R})$.
- (b) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f .
- (c) Argumentieren Sie, dass die eingeschränkte Funktion $f: [1, \infty) \rightarrow [-3, \infty)$ bijektiv ist und berechnen Sie die Umkehrfunktion.
- (d) Berechnen Sie für $t > 1$ das Integral

$$\int_0^t f(x) \, dx.$$

2. Betrachten Sie die Folge (a_n) , rekursiv gegeben durch

$$a_{n+1} = \frac{1}{5}(a_n^2 + 6), \quad a_1 = 1.$$

- (a) Zeigen Sie, mit Hilfe vollständiger Induktion, dass die Folge (a_n) gemäß $0 < a_n < 2$ beschränkt ist.
 - (b) Untersuchen Sie, ob die Folge (a_n) monoton ist und weisen Sie Ihre Behauptung nach.
 - (c) Untersuchen Sie die Folge (a_n) auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.
3. (a) Seien $z_1 = 1 - i$ und $z_2 = \frac{1}{i}$. Berechnen Sie

$$\operatorname{Re}(z_1 z_2), \quad \arg(z_1 + z_2), \quad \text{sowie} \quad \left| \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_1} \right| \quad \text{und} \quad \log z_2.$$

- (b) Skizzieren Sie alle $z \in M$ in der Gaußschen Zahlenebene für

$$M = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > 0\} \subset \mathbb{C}.$$

4. Betrachten Sie für $D \subset \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x) = \frac{\cos x}{1-x}.$$

- (a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ der Funktion f .
- (b) Ermitteln Sie die Tangente t der Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$.
- (c) Berechnen Sie das Taylorpolynom 4. Grades der Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$ unter Verwendung bekannter Potenzreihen.
- (d) Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Taylor-Reihe der Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$, ohne diese Reihe explizit zu berechnen.

5. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = x \ln\left(\frac{1}{x}\right).$$

- (a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D von f an.
- (b) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f .
- (c) Berechnen Sie lokale Extrema und bestimmen Sie deren Typ. Geben Sie außerdem das Monotonieverhalten der Funktion f an, d.h. bestimmen Sie, auf welchen (möglichst großen) Intervallen die Funktion monoton ist, und begründen Sie dies.
- (d) Bestimmen Sie das Bild $f(D)$ der Funktion.
- (e) Bestimmen Sie die Krümmungsbereiche der f und berechnen Sie ggf. Wendepunkte.

6. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int e^{3x} \sin(2x) \, dx$

(b) $\int x \ln x \, dx$

(c) $\int \frac{x}{x^2 - x} \, dx$