Gruppe A

PUNKTEVERTEILUNG:

Beispiel	1	2	3	4
Punkte	/7	/7	/7	/9

---

1. Gegeben sei der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ und ein Unterraum $\mathcal{U}$ von $\mathbb{R}^3$ durch

$$\mathcal{U} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \colon -2x_2 - 2x_3 = 0\right\}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis B von $\mathcal{U}$.

(b) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$, sodass $\boldsymbol{u} = (5, 6, a)^{\mathrm{T}} \in \mathcal{U}$ gilt.

(c) Betrachten Sie eine Teilmenge $\mathcal{W}$ von $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\mathcal{W} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \colon -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\right\}.$$

Weisen Sie nach, dass $\mathcal{W}$ einen Unterraum von $\mathbb{R}^3$ bildet. Bestimmen Sie hierfür zunächst eine Basis C von $\mathcal{W}$.

(d) Bestimmen Sie eine Basis D der Summe $\mathcal{U} + \mathcal{W}$ und dessen Dimension.

Lösung:

(a) Eine Basis B lässt sich wie folgt bestimmen.

$$\begin{aligned} -2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_2 &= -x_3 \end{aligned}$$

Ein Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}$ kann daher dargestellt werden durch

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{x_1}_{=:s} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{x_3}_{=:t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Somit ergibt sich eine Basis $B = \left\{(1, 0, 0)^{\mathrm{T}}, (0, -1, 1)^{\mathrm{T}}\right\}$.

(b)

$$s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ a \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad s = 5,\ t = -6$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a = -6$$

(c) $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^3$ wurde bereits in der Angabe angegeben. Die Menge $\mathcal{W}$ kann auch dargestellt werden als

$$\mathcal{W} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \colon s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Betrachten wir $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathcal{W}$, also

$$\boldsymbol{v} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ergeben sich

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (a+c) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (b+d) \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{W}$$

$$s\boldsymbol{v} = s \left(a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = sa \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + sb \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{W}$$

(d) $\mathcal{U} + \mathcal{W} = \left\{ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3 \colon \boldsymbol{u} \in \mathcal{U}, \boldsymbol{w} \in \mathcal{W} \right\}$

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da $\mathcal{U} + \mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^3$ muss zumindest ein Vektor der obigen Linearkombination linear abhängig sein. Überprüfen wir, ob die Vektoren $\{(1,0,0)^\mathrm{T}, (0,-1,1)^\mathrm{T}, (1,1,0)^\mathrm{T}\}$ linear unabhängig sind. Die ist auf mehrere Arten möglich.

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow$ Spaltenvektoren sind linear unabhängig.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow s = t = c = 0$

Somit ergibt sich $\dim \mathcal{U} + \mathcal{W} = 3$

2. Betrachten Sie die orthogonale Gruppe $O(3) = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \colon AA^\mathrm{T} = I_n\}$ ausgestattet mit der Matrixmuliplikation $(O(3), \cdot)$ und

$$B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Weisen Sie nach, dass $B \in O(3)$ und bestimmen Sie das neutrale und inverse Element von B.

(b) Berechnen Sie die Determinante von B.

(c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $B \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ für $\boldsymbol{b} = (6, 2, -5)^{\mathrm{T}}$. Ist die Lösung eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

(a) $BB^{\mathrm{T}} = \frac{1}{3}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad B \in O(3)$

Somit ergibt sich das inverse Element durch $B^{-1} = B^{\mathrm{T}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Das neutrale Element bzgl. der Matrixmultiplikation ist die Identität $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Da B eine orthogonale Matrix ist, folgt $\det B = \pm 1$. Beispielsweise kann argumentiert werden, dass die Spalten ein Rechtssystem bilden, da

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det B = 1.$$

Weiters kann die Determinante mithilfe der Regel von Sarrus oder den Laplaceschen Entwicklungssatz berechnet werden.

(c) Die Matrix B ist invertierbar, somit folgt

$$\boldsymbol{x} = B^{-1}\boldsymbol{b} = B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Da die Matrix B invertierbar ist, ist der Kern der linearen Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{x} \mapsto B\boldsymbol{x}$ trivial. Die Lösung ist somit eindeutig.

3. Gegeben sei eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Die Abbildung φ ist bezüglich der kanonischen Basis E_3 dargestellt durch

$$[\varphi]_{E_3,E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix $[\varphi]_{C,C}$ bezüglich der Basis C, wobei die Transformationsmatrizen gegeben sind durch

$$[\mathrm{id}]_{E_3,C} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [\mathrm{id}]_{C,E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Fertigen Sie eine Skizze des kommutativen Diagramms an.

(c) Gegeben sei der Vektor $\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{v}]_{E_3} = (-1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$. Bestimmen Sie $[\varphi(\boldsymbol{v})]_C$.

Lösung:

(a) Die Abbildungsmatrix ist gegeben durch

$$\begin{aligned} [\varphi]_{C,C} &= [\mathrm{id}]_{C,E_3}[\varphi]_{E_3,E_3}[\mathrm{id}]_{E_3,C} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 5 & 0 & 7 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Das Abbildungsdiagramm ist gegeben durch

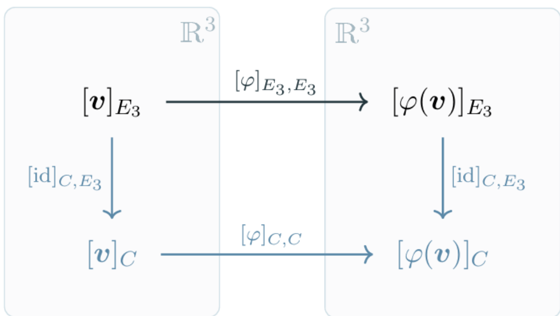

Abbildung 1: kommutatives Diagramm Gruppe

(c) Der Vektor $[\varphi(\boldsymbol{v})]_C$ kann auf zwei Arten bestimmt werden.

$$\begin{aligned}[\varphi(\boldsymbol{v})]_C &= [\mathrm{id}]_{C,E_3}[\varphi]_{E_3,E_3}[\boldsymbol{v}]_{E_3} \\ &= \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 5\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\varphi(\boldsymbol{v})]_C &= [\varphi]_{C,C}[\mathrm{id}]_{C,E_3}[\boldsymbol{v}]_{E_3} \\ &= \begin{pmatrix}2 & 1 & 6\\ 5 & 0 & 7\\ 7 & -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

4. Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ durch

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom von A gegeben ist durch $p(\lambda) = -(\lambda - 1)^3$.

(b) Bestimmen Sie das Spektrum σ_A von A.

(c) Geben Sie für alle Eigenwerte die algebraische und geometrische Vielfachheit an.

(d) Bestimmen Sie eine Matrix $J \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und eine reguläre Matrix $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass $A = PJP^{-1}$ gilt.

(e) Geben Sie die Dimensionen aller Eigenräume und Haupträume an.

(f) Ist A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

(a) $p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = (1-\lambda)\det\begin{pmatrix}2-\lambda & -1\\ 1 & -\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda(2-\lambda)+1) = -(\lambda-1)^3$

(b) $\sigma_A = \{1\}$

(c) $n_1 = 3$
Die Eigenvektoren werden durch $(A - \lambda I)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ bestimmt.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{z_2 - z_3} \left(\begin{array}{ccc|c}0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{array}\right)$$

$$2v_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 0, \qquad v_2 - v_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = v_3,$$

somit ergibt sich ein möglicher Eigenvektor als $\boldsymbol{v} = (0,1,1)^{\mathrm{T}}$ und die geometrische Vielfachheit als $g_\lambda = 1$.

(d) Die Matrix $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, da die algebraische Vielfachheit $n_\lambda = 1$, aber die geometrische Vielfachheit $g_\lambda = 1$ ist. Für die Matrix P müssen ein Hauptvektor 2. und 3. Stufe bestimmt werden.
Der Hauptvektor 2. Stufe $\boldsymbol{h}_1$ wird durch die Partikulärlösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{h}_1 = \boldsymbol{v}$$

bestimmt.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{z_2 - z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$2h_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad h_1 = 0, \qquad h_2 - h_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad h_2 = h_3 + 1,$$

somit ergibt sich $\boldsymbol{h} = (0,1,0)^{\mathrm{T}} + s(0,1,1)^{\mathrm{T}}$. Der erste Hauptvektor $\boldsymbol{h}_1$ ist die Partikulärlösung, also $\boldsymbol{h}_1 = (0,1,0)^{\mathrm{T}}$.

Der Hauptvektor 3. Stufe $\boldsymbol{h}_2$ wird durch die Partikulärlösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{h}_2 = \boldsymbol{h}_1$$

bestimmt.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{z_2 - z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$2h_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{1}{2}, \qquad h_2 - h_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad h_2 = h_3 + 1,$$

somit ergibt sich $\boldsymbol{h} = (0,1,0)^{\mathrm{T}} + s(0,1,1)^{\mathrm{T}}$. Der erste Hauptvektor $\boldsymbol{h}_1$ ist die Partikulärlösung, also $\boldsymbol{h}_1 = (0,1,0)^{\mathrm{T}}$.

Gruppe B

PUNKTEVERTEILUNG:

Beispiel	1	2	3	4
Punkte	/7	/7	/7	/9

---

1. Gegeben sei der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ und ein Unterraum $\mathcal{U}$ von $\mathbb{R}^3$ durch

$$\mathcal{U} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \colon -2x_1 - x_2 = 0\right\}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis B von $\mathcal{U}$.

(b) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$, sodass $\boldsymbol{u} = (4, a, 5)^{\mathrm{T}} \in \mathcal{U}$ gilt.

(c) Betrachten Sie eine Teilmenge $\mathcal{W}$ von $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\mathcal{W} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\right\}.$$

Weisen Sie nach, dass W einen Unterraum von $\mathbb{R}^3$ bildet. Bestimmen Sie hierfür zunächst eine Basis C von W.

(d) Bestimmen Sie eine Basis D der Summe $\mathcal{U} + \mathcal{W}$ und dessen Dimension.

2. Betrachten Sie die orthogonale Gruppe $O(3) = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \colon AA^{\mathrm{T}} = I_n\}$ ausgestattet mit der Matrixmuliplikation $(O(3), \cdot)$ und

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Weisen Sie nach, dass $B \in O(3)$ und bestimmen Sie das neutrale und inverse Element von B.

(b) Berechnen Sie die Determinante von B.

(c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $B \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ für $\boldsymbol{b} = (7, 2, 2)^{\mathrm{T}}$. Ist die Lösung eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort!

3. Gegeben sei eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Die Abbildung φ ist bezüglich der kanonischen Basen dargestellt durch

$$[\varphi]_{E_3,E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix $[\varphi]_{C,C}$ bezüglich der Basis C, wobei die Transformationsmatrizen wiefolgt gegeben sind,

$$[\mathrm{id}]_{E_3,C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad [\mathrm{id}]_{C,E_3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Fertigen Sie eine Skizze des Abbildungsdiagramms an.

(c) Gegeben sei der Vektor $[\boldsymbol{v}]_C = (-1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$. Bestimmen Sie $[\varphi(\boldsymbol{v})]_C$.

4. Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom von A gegeben ist durch
$p(\lambda) = -(\lambda - 1)^3$.

(b) Bestimmen Sie das Spektrum σ_A von A.

(c) Geben Sie für alle Eigenwerte die algebraische und geometrische Vielfachheit an.

(d) Bestimmen Sie eine Matrix $J \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und eine reguläre Matrix $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass $A = PJP^{-1}$ gilt.

(e) Geben Sie die Dimensionen aller Eigenräume und Haupträume an.

(f) Ist A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.