Lineare Algebra für TPH **2. Klausur** 24. 01. 2025

Gruppe A

PUNKTEVERTEILUNG:

Beispiel	1	2	3	4	5
Punkte	/8	/3	/3	/8	/8

---

1. Betrachten Sie die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\varphi(p) = \varphi(a_0 + a_1 x) = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \\ \displaystyle\int_0^1 p(x)\,\mathrm{d}x \end{pmatrix}.$$

Sei $B = \{1, x\}$ eine Basis von $\mathcal{P}_1$ und $E_2 = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^2$.

(a) Geben Sie das kommutative Diagramm von φ an und bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[\varphi]_{E_2,B}$.

(b) Betrachten Sie weitere Basen der Vektorräume, und zwar die Basis $G = \{2+x, x-1\}$ von $\mathcal{P}_1$ und die Basis $C = \{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2\}$ von $\mathbb{R}^2$, gegeben durch $\boldsymbol{c}_1 = (1, -1)^{\mathrm{T}}$ und $\boldsymbol{c}_2 = (-2, 1)^{\mathrm{T}}$. Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen $[\mathrm{id}]_{B,G}$ und $[\mathrm{id}]_{E_2,C}$.

(c) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix $[\varphi]_{C,G}$ auf zwei verschiedene Wege: Einmal unter Verwendung der Abbildungsmatrix aus (a) und einmal direkt über die Abbildung φ der Angabe. Die Transformationsmatrizen aus (b) dürfen in beiden Fällen verwendet werden.
Geben Sie auch für diese Situation das kommutative Diagramm an.

2. Betrachten Sie den Vektorraum $\mathcal{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit der kanonischen Basis

$$E = \{E_1, E_2, E_3, E_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sei $\varphi \in \mathcal{V}^*$ und $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ beliebig mit $\varphi = \varphi_1 E^1 + \varphi_2 E^2 + \varphi_3 E^3 + \varphi_4 E^4$.

(a) Geben Sie die definierende Eigenschaft der dualen Basis $E^* = \{E^1, E^2, E^3, E^4\}$ an.

(b) Berechnen Sie $\varphi(A)$.

3. Betrachten Sie $\psi\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mapsto (a_{11}, 0, a_{12}, a_{22})^{\mathrm{T}}$.

(a) Zeigen Sie, dass ψ ein Vektorraumhomomorphismus ist.

(b) Geben Sie eine Basis K von $\operatorname{Kern}\psi$ an. Ist ψ injektiv bzw. surjektiv? Begründen Sie Ihre Antworten!

4. Betrachten Sie den Vektorraum $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$ mit dem euklidischen Skalarprodukt und die linear unabhängigen Vektoren

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(\boldsymbol{v}) = Q\boldsymbol{v}$ eine lineare Abbildung mit

$$Q = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & a \\ x_2 & y_2 & b \\ x_3 & y_3 & c \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$, sodass Q eine orthogonale Matrix ist.

(b) Geben Sie einen Vektor $\boldsymbol{z} \in \mathcal{V}$ an, sodass $B = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{V}$ bildet. Begründen Sie Ihre Antwort!

(c) Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten von $\boldsymbol{u} = (-3,\ \sqrt{3},\ -5)^{\mathrm{T}}$ bezüglich der Basis B aus (b).

(d) Überprüfen Sie, ob die Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon\ \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, mit

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = -4\, v_1 w_1 - v_1 w_3 - v_3 w_1 + 2\, v_3 w_3$$

ein Skalarprodukt bildet.

5. Betrachten Sie die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2,\ \varphi(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass A eine hermitesche Matrix ist.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und geben Sie jeweils die algebraische sowie die geometrische Vielfachheit an.

(c) Zeigen Sie, dass die Eigenräume zu den Eigenwerten λ_1, λ_2 gegeben sind durch

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} -1-\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(d) Geben Sie eine Spektralzerlegung von A an.

(e) Ist A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Gruppe B

PUNKTEVERTEILUNG:

Beispiel	1	2	3	4	5
Punkte	/8	/3	/3	/8	/8

1. Betrachten Sie die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\varphi(p) = \varphi(a_0 + a_1 x) = \begin{pmatrix} \int_0^1 p(x)\,\mathrm{d}x \\ \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \end{pmatrix}.$$

Sei $B = \{1, x\}$ eine Basis von $\mathcal{P}_1$ und $E_2 = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^2$.

(a) Geben Sie das kommutative Diagramm von φ an und bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[\varphi]_{E_2,B}$.

(b) Betrachten Sie weitere Basen der Vektorräume, und zwar die Basis $G = \{1+x, x-2\}$ von $\mathcal{P}_1$ und die Basis $C = \{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2\}$ von $\mathbb{R}^2$, gegeben durch $\boldsymbol{c}_1 = (-1, 1)^{\mathrm{T}}$ und $\boldsymbol{c}_2 = (2, -1)^{\mathrm{T}}$ Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen $[\mathrm{id}]_{B,G}$ und $[\mathrm{id}]_{E_2,C}$.

(c) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix $[\varphi]_{C,G}$ auf zwei verschiedene Wege: Einmal unter Verwendung der Abbildungsmatrix aus (a) und einmal direkt über die Abbildung φ der Angabe. Die Transformationsmatrizen aus (b) dürfen in beiden Fällen verwendet werden.
Geben Sie auch für diese Situation das kommutative Diagramm an.

2. Betrachten Sie den Vektorraum $\mathcal{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit der kanonischen Basis

$$E = \{E_1, E_2, E_3, E_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sei $\varphi \in \mathcal{V}^*$ und $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ beliebig mit $\varphi = \varphi_1 E^1 + \varphi_2 E^2 + \varphi_3 E^3 + \varphi_4 E^4$.

(a) Geben Sie die definierende Eigenschaft der dualen Basis $E^* = \{E^1, E^2, E^3, E^4\}$ an.

(b) Berechnen Sie $\varphi(A)$.

3. Betrachten Sie $\psi\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mapsto (a_{11}, a_{21}, 0, a_{22})^{\mathrm{T}}$.

(a) Zeigen Sie, dass ψ ein Vektorraumhomomorphismus ist.

(b) Geben Sie eine Basis K von $\operatorname{Kern}\psi$ an. Ist ψ injektiv bzw. surjektiv? Begründen Sie Ihre Antworten!

4. Betrachten Sie den Vektorraum $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$ mit dem euklidischen Skalarprodukt und die linear unabhängigen Vektoren

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \varphi(\boldsymbol{v}) = Q\boldsymbol{v}$ eine lineare Abbildung mit

$$Q = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & a \\ x_2 & y_2 & b \\ x_3 & y_3 & c \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$, sodass Q eine orthogonale Matrix ist.

(b) Geben Sie einen Vektor $\boldsymbol{z} \in \mathcal{V}$ an, sodass $B = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{V}$ bildet. Begründen Sie Ihre Antwort!

(c) Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten von $\boldsymbol{u} = (-\sqrt{3},\ 3,\ -4)^{\mathrm{T}}$ bezüglich der Basis B aus (b).

(d) Überprüfen Sie, ob die Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon\ \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, mit

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = 2\, v_1 w_1 - v_1 w_3 - v_3 w_1 - 3\, v_3 w_3$$

ein Skalarprodukt bildet.

5. Betrachten Sie die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2,\ \varphi(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 - \mathrm{i} \\ 1 + \mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass A eine hermitesche Matrix ist.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und geben Sie jeweils die algebraische sowie die geometrische Vielfachheit an.

(c) Zeigen Sie, dass die Eigenräume zu den Eigenwerten λ_1, λ_2 gegeben sind durch

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 + \mathrm{i} \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(d) Geben Sie eine Spektralzerlegung von A an.

(e) Ist A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.