Mathematik 1 für BI, MB, WIMB, UI und VT

Prüfer: Gabriel Maresch

Prüfung am 27.6.2025

Name (bitte ausfüllen): .....

Matrikelnummer (bitte ausfüllen): .....

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus fünf Aufgaben I, II, III, IV und V, untergliedert jeweils in mehrere Teilaufgaben A, B, C, D ...
  Die Gewichtung jeder Aufgabe und jedes Unterpunktes ist jeweils am Beginn angegeben. Insgesamt können 100 Punkte erreicht werden, ab 50 Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- In den meisten Fällen sollte der freie Platz am Angabeblatt jeweils für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie sich, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung.

  Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Aufgabe	I	II	III	IV	V	Total
Punkte	20	20	20	20	20	100
erreicht						

Aufgabe I ..... *20 Punkte*

$\boxed{\text{8 P.}}$ (Teil A) Faktorisieren Sie das Polynom $p(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 2x$ in reell irreduzible Faktoren und geben Sie alle reellen Lösungen der Gleichung $p(x) = 0$ an!

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil B) Wie lauten die Summationsgrenzen ① und ②, sowie die Ausdrücke ③ – ⑥ in folgender Formel?

$$(a-b)^n = \sum_{①}^{②} (-1)^{③} \binom{④}{k} a^{⑤} b^{⑥}$$

$\boxed{\text{3 P.}}$ (Teil C) Verwenden Sie die Formel aus (B), um für passend gewähltes $a = \ldots\ldots$ und $b = \ldots\ldots$ die Potenz 9^4 explizit zu berechnen!

Nota Bene: es soll hier die angegebene Formel benutzt werden und nicht $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$ direkt berechnet werden!

$\boxed{\text{3 P.}}$ (Teil D) Gilt für jedes $N \in \mathbb{N}$ stets die Rechenregel

$$\sum_{\substack{0 \le k \le N, \\ k \text{ gerade}}} \binom{N}{k} = \sum_{\substack{0 \le k \le N, \\ k \text{ ungerade}}} \binom{N}{k} ?$$

Wenn ja: warum? Wenn nein: warum nicht?

Aufgabe II. . . . . *20 Punkte*

$\boxed{\text{2 P.}}$ (Teil A) Das **Sandwich-Theorem** erlaubt es, von der Konvergenz zweier Folgen a_n und b_n mit $a_n \leq x_n \leq b_n$ (für alle bis auf endliche viele $n \in \mathbb{N}$) auf die Konvergenz der Folge x_n zu schließen. Was muss dabei für die Grenzwerte $\lim a_n$ und $\lim b_n$ gelten, damit das möglich ist?

$\boxed{\text{8 P.}}$ (Teil B) Verwenden Sie das Sandwich-Theorem aus Teil A und $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, um den Grenzwert der unendlichen Folge $x_n = \sqrt[n]{2025 + \sin(n^2) + n^\pi}$ zu berechnen. Geben Sie dazu a_n und b_n wie in Teil A gefordert an!

$a_n =$ _____, $b_n =$ _____, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =$ _____

$\boxed{\text{10 P.}}$ (Teil C) Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{2 \cdot n!}$ auf absolute und bedingte Konvergenz. Geben Sie im Falle der Konvergenz ein $N \in \mathbb{N}$ an, von dem Sie argumentieren können, dass die Partialsumme s_N um höchstens $\varepsilon = 10^{-3}$ vom tatsächlichen Grenzwert abweicht.

Aufgabe III ..... *20 Punkte*

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil A) Wie lautet die ε-δ-Definition der Stetigkeit einer reellen Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an einer Stelle $x_0 \in D$?

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil B) Geben Sie ein Beispiel einer reellen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ welche an $x_0 = 0$ *nicht* stetig ist. Zeigen Sie explizit, dass Ihre Definition aus Teil A an $x_0 = 0$ nicht erfüllt ist.

$\boxed{\text{2 P.}}$ (Teil C) Was versteht man unter einer Sprungstelle bzw. der Sprunghöhe einer reellen Funktion? Verwenden Sie zur Erklärung die Funktionsgrenzwerte $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil D) Die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ ist streng monoton. Wie lautet die Umkehrfunktion $f^{(-1)}(x)$ und was läßt sich über deren Stetigkeit an der Stelle $x_0 = 0$ aussagen?

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil E) Fertigen Sie jeweils eine Skizze der Funktion f und $f^{(-1)}$ aus Teil D an, anhand derer die Monotonie-Eigenschaften, sowie Definitions und Wertebereiche ersichtlich sind.

Aufgabe IV ..... *20 Punkte*

In dieser Aufgabe geht es um die Funktion $f(x) = \dfrac{\ln(1+4x^2)}{x}$.

$\boxed{\text{2 P.}}$ (Teil A) Wie muss man $f(0)$ definieren, damit f zu einer auf ganz $\mathbb{R}$ stetigen Funktion wird?

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil B) Ist die stetig fortgesetzte Funktion aus Teil (A) an $x_0 = 0$ differenzierbar? Wenn ja: Wie lautet $f'(0)$? Wenn nein: Warum ist f an $x_0 = 0$ nicht differenzierbar?

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil C) Berechnen Sie mit einer Methode Ihrer Wahl das Taylorpolynom $T_{0,3}(x)$ von f, d.h. mit Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ und Grad 3.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil D) Argumentieren Sie, dass die Funktion f zumindest auf dem Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ streng montoton und daher umkehrbar ist.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil E) Ist die Umkehrfunktion $f^{(-1)}(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar? Wenn ja: Wie lautet $f^{(-1)'}(0)$? Wenn nein: Warum ist $f^{(-1)}(x)$ an $x_0 = 0$ nicht differenzierbar?

Aufgabe V ..... *20 Punkte*

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil A) Wie lautet der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für eine integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$? Welche (stärkere) Voraussetzung wird anstelle der Integrierbarkeit an die Funktion f gestellt und wo geht diese in die Aussage ein?

Nota Bene: Achten Sie darauf, alle von Ihnen verwendeten Objekte zu erklären und zu definieren!

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil B) Berechnen Sie für $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ die Funktion $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$. Den Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ können Sie dabei frei wählen. Gilt $F'(0) = f(0)$? Wenn ja: rechnen Sie diese Gleichheit bitte explizit nach! Wenn nein: erklären Sie, weshalb das nicht dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung widerspricht!

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil C) Berechnen Sie die Untersumme $U(f; \mathcal{Z})$ und die Obersumme $O(f; \mathcal{Z})$ für die Funktion $f(x) = \cos^2 x$ und die Zerlegung $\mathcal{Z}$ mit $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} < 0 < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ des Intervalls $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil D) Beantworten Sie die folgenden beiden Fragen! Geben Sie jeweils ein kurzes Argument oder ein Gegenbeispiel an!

- Gibt es monotone Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ die nicht integrierbar sind?
- Gibt es integrierbare Funktionen $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ die nicht stetig sind?

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.