

Name: _____

Matrikelnummer: _____

PRÜFER: Andreas Körner

Viel Erfolg bei der Prüfung!

PUNKTEVERTEILUNG:

Beispiel	1	2	3	4	5	6
Punkte	6	6	10	10	6	10

1. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{\ell=1}^n \frac{1}{2^\ell} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

- (a) Zeigen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion die Gültigkeit der Formel.
(b) Berechnen Sie mit Hilfe der gegebenen Formel für $m \in \mathbb{N}$ mit $n > m > 1$, die Summe

$$\sum_{\ell=m}^n \frac{1}{2^\ell}.$$

(c) Berechnen Sie

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{2^\ell}.$$

2. (a) Seien $z_1 = \sqrt{2} \exp(i\frac{\pi}{4})$ und $z_2 = 1 - i$. Berechnen Sie

$$\operatorname{Im}(z_1 z_2), \quad \arg\left(\frac{\bar{z}_1}{z_2}\right).$$

(b) Lösen Sie für $z \in \mathbb{C}$ die Gleichung $z^3 - (1 - i\sqrt{3}) = 0$.3. Sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ ax + b, & x \geq 0. \end{cases}$$

- (a) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$, sodass f auf \mathbb{R} stetig differenzierbar ist.
(b) Berechnen Sie die Tangente an der Stelle $x = 0$.
(c) Bestimmen Sie das Bild $f(\mathbb{R})$ der Funktion.
(d) Begründen Sie ob die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow f(\mathbb{R})$ bijektiv ist und berechnen Sie ggf. die Umkehrfunktion.

4. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \ln \left(\frac{x-1}{x^2+1} \right).$$

- (a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D von f an.
- (b) Untersuchen Sie, ob die Funktion Nullstellen besitzt.
- (c) Ermitteln Sie lokale Extrema und bestimmen Sie deren Typ ohne Berechnung der 2. Ableitung.
- (d) Geben Sie außerdem das Monotonieverhalten der Funktion f an, d.h. bestimmen Sie, auf welchen (möglichst großen) Intervallen die Funktion monoton ist, und begründen Sie dies.
- (e) Untersuchen Sie, ob $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ injektiv ist.

5. Untersuchen Sie die beiden Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^4 e^{-k} \quad \text{und} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 + \sqrt{m}}{m}$$

auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

6. Berechnen Sie jeweils eine Stammfunktion F der Funktion f :

(a) $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ (b) $f(x) = \frac{4}{4-x^2}$ (c) $f(x) = e^{-x} \cos(2x)$