Praktische Mathematik 1 für TPH **2.WH. Klausur** 12.06.2020

1. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$(4x\cos y)\mathrm{d}x + (-2x^2\sin y + 3)\mathrm{d}y = 0.$$

   (a) Zeigen Sie, dass diese Differentialgleichung exakt ist. Berechnen Sie ein erstes Integral und für $\Phi(0,0)=0$ die Lösung $x = x(y)$.

   (b) Betrachten Sie die Kurve $C = \{\boldsymbol{r}(t)\colon t \in [0,\pi]\}$ und das Vektorfeld F gegeben durch

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t-\sin t \\ 1-\cos t \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 4x\cos y \\ -2x^2\sin y + 3 \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

   (c) Berechnen Sie die Bogenlänge L der Kurve C.
   Hinweis: $\cos(t) = \cos(2\frac{t}{2}) = \cos^2(\frac{t}{2}) - \sin^2(\frac{t}{2})$.

2. Betrachten Sie für $x = x(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, die Differentialgleichung

$$t^3x'' + t^2x' - 4tx = 0.$$

   (a) Berechnen Sie eine Lösung der Differentialgleichung mit Hilfe des Ansatzes

$$x_1(t) = t^\alpha.$$

   (b) Berechnen Sie eine weitere linear unabhängige Lösung x_2 unter Zuhilfenahme der Variation der Konstanten und geben Sie die allgemeine Lö sung der Differentialgleichung an.

   (c) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems für $x(1) = 1$ und $x'(1) = 1$.

3. Sei X eine stetige Zufallsvariable mit

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{x}} & \text{für } 0 < x, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   (a) Zeigen Sie, dass es sich hier um eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion handelt.

   (b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_X und skizzieren Sie diese.

   (c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariable X.

   (d) Gegeben sind die Ereignisse

$$A = \{-1 \le X < 2\} \qquad \text{und} \qquad B = \{1 < X \le 3\}.$$

   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(B), P(A \cup B)$ und $P(A|B)$.

Bemerkung. Aufgrund der COVID19-Situation beim ersten Termin der Wiederholungsklausur (Absage der Präsenzlehre) war es notwendig im Juni einen weiteren Termin anzubieten. Dies ist in regulären Semester nicht vorgesehen.