Gruppe A

1. Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \exp(\sqrt{1-x})$.
   (a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f.
   (b) Berechnen Sie das Taylor-Polynom 2. Grades an der Stelle $x_0 = 0$.
2. Sei $z = 1 - \mathrm{i}$.
   (a) Berechnen Sie $\arg\left(z^7\right)$. Geben Sie das Ergebnis im Intervall $[0, 2\pi)$ an.
   (b) Geben Sie $\mathrm{Im}(z^7)$ an.
3. Gegeben Sei die Kurve
$$C = \left\{\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} : t \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]\right\}$$
   und das Skalarfeld $f(x,y) = x^2 y$.
   (a) Berechnen Sie die Tangente an die Kurve C im Punkt $(x_0, y_0) = (1, 0)$.
   (b) Berechnen Sie das Kurvenintegral
$$\int_C f \,\mathrm{d}s.$$
4. Gegeben Sei die Kurve
$$C = \left\{\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix}\mathrm{e}^t \cos t\\ \mathrm{e}^t \sin t\end{pmatrix} : t \in \left[-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4}\right]\right\}$$
   und für $y \neq 0$ das Vektorfeld
$$\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix}\mathrm{e}^x \sin(2y) + 2x\\ 2\mathrm{e}^x \cos(2y) - \frac{1}{y}\end{pmatrix}.$$
   (a) Weisen Sie nach, warum $\boldsymbol{f}$ ein Potential besitzt.
   (b) Berechnen Sie das Potential Φ zum Vektorfeld $\boldsymbol{f}$.
   (c) Berechnen Sie das Kurvenintegral
$$\int_C \boldsymbol{f} \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

Gruppe B

1. Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \ln(1-x^2)$.

   (a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f.

   (b) Berechnen Sie das Taylor-Polynom 2. Grades an der Stelle $x_0 = 0$.

2. Sei $z = -1 + \mathrm{i}$.

   (a) Berechnen Sie $\arg\left(z^7\right)$. Geben Sie das Ergebnis im Intervall $[0, 2\pi)$ an.

   (b) Geben Sie $\mathrm{Re}(z^7)$ an.

3. Gegeben Sei die Kurve

$$C = \left\{ \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} : t \in \left[\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}\right] \right\}$$

   und das Skalarfeld $f(x, y) = xy^2$.

   (a) Berechnen Sie die Tangente an die Kurve C im Punkt $(x_0, y_0) = (-1, 0)$.

   (b) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C f \,\mathrm{d}s.$$

4. Gegeben Sei die Kurve

$$C = \left\{ \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \sin t \\ \mathrm{e}^t \cos t \end{pmatrix} : t \in \left[-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4}\right] \right\}$$

   und für $x \neq 0$ das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x, y) = \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^y \cos(3x) - \frac{1}{x} \\ \mathrm{e}^y \sin(3x) + 3y^2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Weisen Sie nach, warum $\boldsymbol{f}$ ein Potential besitzt.

   (b) Berechnen Sie das Potential Φ zum Vektorfeld $\boldsymbol{f}$.

   (c) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C \boldsymbol{f} \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

Gruppe C

1. Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \ln(1 - x^2)$.

   (a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f.

   (b) Berechnen Sie das Taylor-Polynom 2. Grades an der Stelle $x_0 = 0$.

2. Sei $z = -1 - \mathrm{i}$.

   (a) Berechnen Sie $\arg\left(z^7\right)$. Geben Sie das Ergebnis im Intervall $[0, 2\pi)$ an.

   (b) Geben Sie $\operatorname{Im}(z^7)$ an.

3. Gegeben Sei die Kurve

$$C = \left\{ \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} : t \in \left[\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}\right] \right\}$$

   und das Skalarfeld $f(x, y) = x^2 y$.

   (a) Berechnen Sie die Tangente an die Kurve C im Punkt $(x_0, y_0) = (-1, 0)$.

   (b) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C f \,\mathrm{d}s.$$

4. Gegeben Sei die Kurve

$$C = \left\{ \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \cos t \\ \mathrm{e}^t \sin t \end{pmatrix} : t \in \left[-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4}\right] \right\}$$

   und für $y \neq 0$ das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x, y) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \sin(2y) + 2x \\ 2\mathrm{e}^x \cos(2y) - \frac{1}{y} \end{pmatrix}.$$

   (a) Weisen Sie nach, warum $\boldsymbol{f}$ ein Potential besitzt.

   (b) Berechnen Sie das Potential Φ zum Vektorfeld $\boldsymbol{f}$.

   (c) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C \boldsymbol{f} \,\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$