Gruppe A

1. Der Bereich B ist gegeben durch das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,1), (3,1)$ und $(3,3)$. Skizzieren Sie den Bereich B und berechnen Sie das Bereichsintegral

$$\int_B 1 \,\mathrm{d}F.$$

2. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2}$ gegeben und der Bereich B beschränkt durch $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \le x^2+y^2 \le z^2, 0 \le z \le 4\right\}$. Berechnen Sie das Bereichsintegral

$$\int_B f \,\mathrm{d}V.$$

3. Gegeben sei die Differentialgleichung $\dot{y} = y \sin t$ und der Anfangswert $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. Berechnen Sie die Lösung dieses Anfangswertproblems.

4. Gegeben sei die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = f(t).$$

   (a) Berechnen Sie das Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung.

   (b) Bestimmen Sie für die Inhomogenität $f(t) = \mathrm{e}^{-2t}$ eine partikuläre Lösung.

5. Betrachten Sie die Funktion f auf $[0, 2\pi]$, gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le \pi, \\ 2\pi - x & \pi < x \le 2\pi, \end{cases}$$

   die außerhalb des Intervalls periodisch fortgesetzt wird.

   (a) Skizzieren Sie die Funktion f auf $[0, 2\pi]$.

   (b) Untersuchen Sie die Funktion f auf Symmetrie (gerade/ungerade) für $x \in \mathbb{R}$.

   (c) Begründen Sie, welche der folgenden Berechnungsformeln für die Fourierkoeffizienten a_0, a_k und b_k für die gegebene Funktion f richtig sind:

   - $a_0 = 0$
   - $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\left(\displaystyle\int_0^\pi x \,\mathrm{d}x + \int_\pi^{2\pi} (2\pi - x) \,\mathrm{d}x\right)$
   - $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^\pi (\pi - x) \,\mathrm{d}x + \dfrac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} (-\pi + x) \,\mathrm{d}x$
   - $a_k = \dfrac{1}{\pi}\left(\displaystyle\int_0^\pi x\cos(kx) \,\mathrm{d}x + \int_\pi^{2\pi} (2\pi - x)\cos(kx) \,\mathrm{d}x\right)$

- $a_k = 0$
- $a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} (\pi - x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} (-\pi + x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x$
- $b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} (\pi - x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} (-\pi + x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x$
- $b_k = \dfrac{1}{\pi}\left(\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(kx)\,\mathrm{d}x + \displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x\right)$
- $b_k = 0$

Die Berechnung ist nicht durchzuführen!

Gruppe B

1. Der Bereich B ist gegeben durch das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,2),(4,2)$ und $(4,4)$. Skizzieren Sie den Bereich B und berechnen Sie das Bereichsintegral
$$\int_B 1 \,\mathrm{d}F.$$

2. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x,y,z) = 2z\sqrt{x^2+y^2}$ gegeben und der Bereich B beschränkt durch $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \le x^2+y^2 \le z^2, 0 \le z \le 3\right\}$. Berechnen Sie das Bereichsintegral
$$\int_B f \,\mathrm{d}V.$$

3. Gegeben sei die Differentialgleichung $\dot{y} = y\,\cos t$ und der Anfangswert $y(\pi) = 3$. Berechnen Sie die Lösung dieses Anfangswertproblems.

4. Gegeben sei die Differentialgleichung 2. Ordnung
$$\ddot{y} + 7\dot{y} + 12y = f(t).$$
   (a) Berechnen Sie das Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung.
   (b) Bestimmen Sie für die Inhomogenität $f(t) = \mathrm{e}^{-3t}$ eine partikuläre Lösung.

5. Betrachten Sie die Funktion f auf $[0,2\pi]$, gegeben durch
$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & 0 \le x \le \pi, \\ -\pi + x & \pi < x \le 2\pi. \end{cases}$$
die außerhalb des Intervalls periodisch fortgesetzt wird.
   (a) Skizzieren Sie die Funktion f auf $[0,2\pi]$.
   (b) Untersuchen Sie die Funktion f auf Symmetrie (gerade/ungerade) für $x \in \mathbb{R}$.
   (c) Begründen Sie, welche der folgenden Berechnungsformeln für die Fourierkoeffizienten a_0, a_k und b_k für die gegebene Funktion f richtig sind:
      - $a_0 = 0$
      - $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\left(\displaystyle\int_0^\pi x\,\mathrm{d}x + \int_\pi^{2\pi} (2\pi - x)\,\mathrm{d}x\right)$
      - $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^\pi (\pi - x)\,\mathrm{d}x + \dfrac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} (-\pi + x)\,\mathrm{d}x$
      - $a_k = \dfrac{1}{\pi}\left(\displaystyle\int_0^\pi x\cos(kx)\,\mathrm{d}x + \int_\pi^{2\pi} (2\pi - x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x\right)$
      - $a_k = 0$

- $a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} (\pi - x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x + \dfrac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} (-\pi + x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x$
- $b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} (\pi - x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x + \dfrac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} (-\pi + x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x$
- $b_k = \dfrac{1}{\pi}\left(\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(kx)\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x\right)$
- $b_k = 0$

Die Berechnung ist nicht durchzuführen!

Gruppe C

1. Der Bereich B ist gegeben durch das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,1), (3,1)$ und $(3,3)$. Skizzieren Sie den Bereich B und berechnen Sie das Bereichsintegral
$$\int_B 1\,\mathrm{d}F.$$

2. Die Funktion $f\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x,y,z) = 2z\sqrt{x^2+y^2}$ gegeben und der Bereich B beschränkt durch $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \leq x^2+y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 3\right\}$. Berechnen Sie das Bereichsintegral
$$\int_B f\,\mathrm{d}V.$$

3. Gegeben sei die Differentialgleichung $\dot{y} = y\,\cos t$ und der Anfangswert $y(\pi) = 3$. Berechnen Sie die Lösung dieses Anfangswertproblems.

4. Gegeben sei die Differentialgleichung 2. Ordnung
$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = f(t).$$
   (a) Berechnen Sie das Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung.
   (b) Bestimmen Sie für die Inhomogenität $f(t) = \mathrm{e}^{-2t}$ eine partikuläre Lösung.

5. Betrachten Sie die Funktion f auf $[0,2\pi]$, gegeben durch
$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & 0 \leq x \leq \pi, \\ -\pi + x & \pi < x \leq 2\pi. \end{cases}$$
die außerhalb des Intervalls periodisch fortgesetzt wird.
   (a) Skizzieren Sie die Funktion f auf $[0,2\pi]$.
   (b) Untersuchen Sie die Funktion f auf Symmetrie (gerade/ungerade) für $x \in \mathbb{R}$.
   (c) Begründen Sie, welche der folgenden Berechnungsformeln für die Fourierkoeffizienten a_0, a_k und b_k für die gegebene Funktion f richtig sind:
   - $a_0 = 0$
   - $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\left(\displaystyle\int_0^\pi x\,\mathrm{d}x + \int_\pi^{2\pi} (2\pi - x)\,\mathrm{d}x\right)$
   - $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^\pi (\pi - x)\,\mathrm{d}x + \dfrac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} (-\pi + x)\,\mathrm{d}x$
   - $a_k = \dfrac{1}{\pi}\left(\displaystyle\int_0^\pi x\cos(kx)\,\mathrm{d}x + \int_\pi^{2\pi} (2\pi - x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x\right)$
   - $a_k = 0$

- $a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} (\pi - x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} (-\pi + x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x$

- $b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} (\pi - x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} (-\pi + x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x$

- $b_k = \dfrac{1}{\pi}\left(\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(kx)\,\mathrm{d}x + \displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x\right)$

- $b_k = 0$

Die Berechnung ist nicht durchzuführen!