Praktische Mathematik 1 für TPH **Nachklausur** 26.02.2021

1. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\sin y + 2x + (x \cos y + \cos y)y' = 0.$$

   (a) Untersuchen Sie, ob die Differentialgleichung exakt ist und berechnen Sie ggf. das erste Integral $\Phi(x, y)$.

   (b) Gegeben sei ein Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x, y) = \begin{pmatrix} \sin y + 2x \\ x \cos y + \cos y \end{pmatrix},$$

   und eine Kurve C mit Parametrisierung $\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} 2t + 3 \\ 4t + 5 \end{pmatrix}$ mit $t \in [0, 1]$. Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfelds $\boldsymbol{f}$ entlang der Kurve C.

   (c) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y(0) = \pi$ der gegebenen Differentialgleichung.

2. Gegeben sei für $y = y(t)$ die Differentialgleichung

$$y'' + 4y = 2\,\sin(2t).$$

   (a) Berechnen Sie die reelle homogene Lösung $y_h(t)$ der Differentialgleichung.

   (b) Berechnen Sie eine reelle partikuläre Lösung $y_p(t)$ der Differentialgleichung, sowie die allgemeine Lösung $y(t)$ zu den Anfangswerten $y(0) = 9$, $y'(0) = 8$.

3. Gegeben sei eine Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(X = x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{7}, & x = 1 \\ \frac{3}{14}, & x = 2 \\ a, & x = 3 \\ \frac{5}{14}, & x = 4 \\ 0, & x \geq 5 \end{cases}.$$

   (a) Berechnen Sie a, sodass $P(X = x)$ eine Wahrscheinlichkeitsfunktion darstellt.

   (b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ und fertigen Sie eine Skizze an.

   (c) Berechnen Sie $P(A)$ und $P(B)$, sowie $P(A \cup B)$ und $P(A \cap B)$ für $A = \{0 \leq X \leq 3\}$ und $B = \{1 \leq X \leq 4\}$.

   (d) Berechnen Sie $P(A|B)$ für A und B aus (c).