1. Gegeben Sei eine Kurve

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} -2+5t \\ 2+3t \end{pmatrix} : t \in [0,1] \right\},$$

ein Skalarfeld

$$f(x,y) = x\cos y + x^2 + \cos y,$$

sowie das Vektorfeld

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \cos y + 2x \\ -x\sin y + \mathrm{e}^y \sin y + \mathrm{e}^y \cos y \end{pmatrix}.$$

   (a) Berechnen Sie die Tangetialebene $z = T(x,y)$ an das Skalarfeld f im Punkt $(x_0, y_0) = (2, 5\pi)$.

   (b) Untersuchen Sie, ob $\boldsymbol{F}$ ein Potential besitzt und of f ein solches darstellt.

   (c) Bestimmen Sie das Potential Φ zum Vektorfeld $\boldsymbol{F}$.

   (d) Berechnen Sie
$$\int_C \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

   (e) Berechnen Sie
$$\int_C f \;\mathrm{d}s.$$

2. Gegeben Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y,z) = -4x^2 + 6xy - 4y^2 - 4z^2.$$

Es bezeichnet $B_1 \subset \mathbb{R}^3$ jenen Körper, der durch die Ebenen $x = 0$, $y = 0$ und $z = 0$ sowie durch $3x + 5y + 2z = 6$ beschränkt sind. Weiters bezeichnet $B_2 \subset \mathbb{R}^3$ eine Halbkugel mit Mittelpunkt $M = (0,0,0)$ und dem Radius $r = 3$, für welche $z \geq 0$ gilt.

   (a) Skizzieren Sie die beiden Körper B_1 und B_2.

   (b) Berechnen Sie das folgende Integral über den Körper B_1.
$$\int_{B_1} 1\mathrm{d}V$$

   (c) Berechnen Sie das folgende Integral über den Körper B_2.
$$\int_{B_2} f\mathrm{d}V$$

3. Betrachten Sie für das Beispiel mit $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ die inhomogene Differentialgleichung

$$a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = f(t).$$

(a) Seien $a_2 = a_0 = 0$, $n = 3$ und $f(t) = 5\exp(2t)$. Berechnen Sie mit der Methode Trennung der Variablen die Lösung y des Anfangswertproblems

$$3(\dot{y})^3 = 5\exp(2t) \qquad \text{mit} \qquad y(0) = 1.$$

(b) Seien $a_2 = a_0 = 0$, $n = 3$ und $f(t) = 5\exp(2t)$. Die Differentialgleichung lautet wie in (a) demnach $3(\dot{y})^3 = 5\exp(2t)$. Berechnen Sie die Tangete $y = T(t)$ an die Lösung der Differentialgleichung $y(t)$ im Punkt $(t_0, y_0) = (0, 1)$ und skizzieren Sie diese in der (t, y)-Ebene.

(c) Seien insbesondere $a_2 = 1$ und $n = 1$. Die Differentialgleichung ist gegeben durch

$$\ddot{y} - 2\dot{y} - 8y = 2\exp(-2t).$$

Berechnen Sie das Fundamentalsystem $\{y_1, y_2\}$ und eine Partikulärlösung y_p der inhomogenen Differentialgleichung.