1. Betrachten Sie die Kurve $C = \{\boldsymbol{r}(t) \colon t \in [0, 2\pi]\}$ und ein Vektorfeld $\boldsymbol{F} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, jeweils gegeben durch

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t+1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xz - y^2 \\ \ln z - 2xy \\ x^2 + \frac{y}{z} \end{pmatrix}.$$

   (a) Berechnen Sie die Tangente an die Kurve C im Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 0, \pi + 1)$.

   (b) Untersuchen Sie, ob das Vektorfeld $\boldsymbol{F}$ wegunabhängig ist und berechnen Sie gegebenenfalls das zugehörige Potential Φ.

   (c) Untersuchen Sie, ob das Vektorfeld $\boldsymbol{F}$ wegunabhängig ist und berechnen Sie gegebenenfalls das zugehörige Potential Φ.

   (d) Berechnen Sie die Bogenlänge L der Kurve C.

2. Betrachten Sie für $x = x(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, die Differentialgleichung

$$t^2 x'' - 3tx' + 4x = 0.$$

   (a) Zeigen Sie, dass eine Lösung der Differentialgleichung durch $x_1(t) = t^\alpha$ gegeben ist und bestimmen Sie dieses $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (b) Berechnen Sie eine weitere linear unabhängig Lösung x_2 und geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

   (c) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems für $x(1) = 1$ und $x'(1) = 1$.

3. Sei X eine stetige Zufallsvariable mit der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} c, & \text{für } 0 \le x \le 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   (a) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}^+$ der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion.

   (b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariable X.

   (c) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_X und skizzieren Sie diese.

   (d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ und $P(B)$ der Ereignisse

$$A = \{\tfrac{1}{2} \le X < \tfrac{3}{2}\} \qquad \text{und} \qquad B = \{1 < X \le \tfrac{7}{4}\}.$$

   (e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(A \cup B)$ und $P(A|B)$.