Praktische Mathematik 1 für TPH **2. Klausur** 24.01.2020

1. (a) Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$(y^2 + y\sin x)\,\mathrm{d}x + (2xy - \cos x)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Zeigen Sie, dass diese Differentialgleichung exakt ist, berechnen Sie ein erstes Integral und für $\Phi(0,0) = 0$ die Lösung $y = y(x)$.

(b) Zeigen Sie, dass $y(x) = \frac{\cos x}{x}$ ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$x^3 y'' + 2x^2 y' = -x^2 \cos x.$$

ist.

(c) Betrachten Sie die homogene Differentialgleichung aus (b), der Form

$$x^3 y'' + 2x^2 y' = 0.$$

Zeigen Sie, dass $y_1(x) = \frac{1}{x}$ eine Lösung ist und finden Sie eine weitere linear unabhängige Lösung y_2. Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

2. (a) Berechnen Sie die Lösung $y = y(x)$ der Differentialgleichung

$$y'' + 3y' - 4y = 0.$$

(b) Wählen Sie einen passenden Ansatz und bestimmen Sie eine Partikulärlösung der Differentialgleichung

$$y'' + 3y' - 4y = 5\mathrm{e}^x.$$

(c) Betrachten Sie die Funktion $u(x,t) = f(x)\mathrm{e}^{-2t}$. Berechnen Sie die Funktion f aus der partiellen Differentialgleichung

$$3u_x + u_{xx} = u_{tt},$$

mit der Randbedingung $u(x,0) = 2\mathrm{e}^x$.

3. Sei X eine diskrete Zufallsvariable, welche die Werte $\{1,2,3,4\}$ annehmen kann. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten sind gegeben durch

$$P(1) = \tfrac{1}{6}, \qquad P(2) = \tfrac{1}{3}, \qquad P(3) = c, \qquad P(4) = 2c.$$

(a) Berechnen Sie $c \in \mathbb{R}^+$, geben Sie die Verteilungsfunktion an und skizzieren Sie diese.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}$ und die Varianz $\mathbb{V}$.

(c) Zwei Ereignisse sind gegeben durch $A = \{X \le 2\}$ und $B = \{1 < X \le 3\}$. Berechnen Sie $P(A \cup B)$ und $P(A|B)$.

(d) Es sind $H_1 = \{1 \le X \le 2\}$ und $H_2 = \{3 \le X \le 4\}$ zwei disjunkte Ereignisse und die Wahrscheinlichkeiten

$$P(C|H_1) = \tfrac{1}{5} \qquad \text{und} \qquad P(C^c|H_2) = \tfrac{1}{4}$$

sind gegeben. Berechnen Sie $P(C)$.