Praktische Mathematik 1 für TPH **Klausur 1** 22.10.2019

1. Betrachten Sie die Kurve $C = \{\boldsymbol{r}(t) \colon t \in [0,\pi]\}$ und ein Vektorfeld $\boldsymbol{F} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 6x\cos y + 2\cos x \\ -3x^2\sin y - 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Berechnen Sie die Tangente an die Kurve C für den Parameterwert $t_0 = 0$, sowie im Punkt $(x_0, y_0) = (0,1)$.

   (b) Untersuchen Sie, ob das Vektorfeld $\boldsymbol{F}$ wegunabhängig ist und berechnen Sie gegebenenfalls das zugehörige Potential Φ.

   (c) Berechnen Sie die Tangentialebene von $z = \Phi(x,y)$ im Punkt $(x_0, y_0) = (0,1)$.

   (d) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

2. Die Bahn eines Teilchens ist durch die Kurve $C = \{\boldsymbol{r}(t) \colon t \in [0,\pi]\}$ gegeben. Es ist bekannt, dass die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(t)$ und Beschleunigung $\boldsymbol{a}(t)$ des Teilchens gegeben ist durch

$$\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ 2\sin(2t) \\ 2\cos(2t) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}(t) = \begin{pmatrix} -4\mathrm{e}^{-2t} \\ a_2(t) \\ a_3(t) \end{pmatrix}.$$

   (a) Berechnen Sie den Positionsvektor $\boldsymbol{r}(t)$, sowie die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(t)$ und die Beschleunigung $\boldsymbol{a}(t)$, wenn gilt

$$\boldsymbol{r}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   (b) Zeigen Sie durch Nachrechnen, dass die Bogenlänge $s = s(t)$, für $t \in [0,\pi]$, gegeben ist durch

$$s(t) = 2\int_0^t \sqrt{\mathrm{e}^{-4\tau} + 1}\,\mathrm{d}\tau. \tag{1}$$

   Berechnen Sie im Anschluss $s(t)$, indem Sie das Integral in Gleichung (1) mit Hilfe der Substitution

$$u^2 = \mathrm{e}^{-4\tau} + 1$$

   berechnen, und lösen Sie das in der Folge auftretende Integral mit Hilfe der Partialbruchzerlegung.

   (c) Berechnen Sie das Differential der Bogenlänge $\mathrm{d}s$, sowie für $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

   das Kurvenintegral

$$\int_C f\,\mathrm{d}s.$$

3. Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x,y,z) = z\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2},$$

und ein Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ beschrieben durch

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 \le x^2+y^2 \le 2, 0 \le z \le 4\}.$$

(a) Berechnen Berechnen Sie die Richtungsableitung von f, abhängig von x, y, z, in Richtung von

$$\boldsymbol{v} = (1,0,1)^T.$$

(b) Skizzieren Sie B.

(c) Berechnen Sie das Volumen von B mit Hilfe eines Bereichsintegrals.

(d) Schreiben Sie $\int_B f\,\mathrm{d}V$ als iteriertes Integral in kartesischen Koordinaten an, *ohne* es anschließend zu berechnen.

(e) Berechnen Sie $\int_B f\,\mathrm{d}V$ unter der Verwendung von Zylinderkoordinaten.