Mathematik 1 **Schriftliche Prüfung** 02.12.2021

Name: ______________________________ Matrikelnummer: ____________________

Prüfer: Andreas Körner *Viel Erfolg bei der Prüfung!*

Punkteverteilung:

Beispiel	1	2	3	4	5	6	7
Punkte	3	10	9	9	6	6	5

---

1. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gegeben durch

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}.$$

   (a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge.

   (b) Ist die Folge beschränkt? Begründen Sie Ihre Antwort!

2. (a) Seien $z_1 = \sqrt{2}\exp(\mathrm{i}\frac{5\pi}{4})$ und $z_2 = 1 + \mathrm{i}$. Berechnen Sie

$$\mathrm{Re}(\overline{z_1}z_2), \quad \arg(z_1\overline{z_2}), \quad z_2^8, \quad \exp(z_2).$$

   (b) Berechnen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^3 = \mathrm{i}^5.$$

   (c) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$, welche die Gleichung

$$\frac{z+\overline{z}}{z-\overline{z}} = \mathrm{i}$$

   erfüllen und skizzieren Sie diese in der Gaußschen Zahlenebene.

3. Sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ \mathrm{e}^x, & x \geq 0. \end{cases}$$

   (a) Skizzieren Sie die Funktion und untersuchen Sie, ob f stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist.

   (b) Untersuchen Sie, ob f differenzierbar und stetig differenzierbar ist, und geben Sie ggf. die erste Ableitung an.

   (c) Berechnen Sie die Tangente an der Stelle $x = 0$.

   (d) Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich D und den zugehörigen Wertebereich W, sodass die Funktion $f\colon D \to W, y = f(x)$ bijektiv ist und geben Sie die Umkehrfunktion an.

4. Betrachten Sie für $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ die Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = \frac{ax^2 - bx}{x + c}.$$

   (a) Bestimmen Sie $a, b, c > 0$, sodass im Punkt $(2, -2)$ ein lokales Minimum vorliegt.

   (b) Geben Sie das Monotonieverhalten der Funktion f mit den in (a) bestimmten $a, b, c > 0$ an, d.h. bestimmen Sie, auf welchen (möglichst großen) Intervallen die Funktion monoton ist, und begründen Sie dies.

   (c) Geben Sie mit den Informationen aus (a) und (b) ein Intervall an, auf welchem die Funktion eine bestimmte Krümmung aufweist, ohne dafür eine Berechnung durchzuführen. Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie die Art der Krümmung auf diesem Intervall an.

5. Gegeben ist eine Funktion $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = |2 \sin x| - 1.$$

   (a) Berechnen Sie die Nullstellen von f.

   (b) Fertigen Sie eine Skizze der Funktion an.

   (c) Bestimmen Sie das Bild $f(\mathbb{R})$.

   (d) Begründen Sie, warum die Funktion f für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ injektiv ist, für $x \in [0, \pi]$ jedoch nicht.

6. (a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

   absolut konvergiert und Berechnen Sie Ihre Summe.

   (b) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)(k+2)}$$

   divergiert.

7. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, gegeben durch $f(x) = \mathrm{e}^{|x|}$.

   (a) Begründen Sie, warum die Funktion f integrierbar ist.

   (b) Berechnen Sie

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   (c) Untersuchen Sie, ob das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

   existiert und berechnen Sie es gegebenenfalls.