Mathematik 1 **Schriftliche Prüfung** 21.10.2021

Name: ______________________________ Matrikelnummer: ____________________

Prüfer: Andreas Körner *Viel Erfolg bei der Prüfung!*

Punkteverteilung:

Beispiel	1	2	3	4	5	6	7
Punkte	10	6	7	7	6	6	6

---

1. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist rekursiv gegeben durch

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{3}\left(a_n + 1\right), \qquad a_1 = \tfrac{1}{3}.$$

   (a) Beweisen Sie, dass die Folge (a_n) streng monoton und beschränkt ist.

   (b) Begründen Sie, warum die Folge (a_n) konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.

   (c) Untersuchen Sie, welche der folgenden expliziten Bildungsgesetze die gegebene Folge darstellt und beweisen Sie dies mit Hilfe der vollständigen Induktion.

   (i) $a_n = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$ (ii) $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

   (d) Für welche a_n aus (c) ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent? Begründen Sie dies.

2. (a) Seien $u = -1 - \mathrm{i}$ und $w = \sqrt{2}\exp(\mathrm{i}\frac{\pi}{4})$. Berechnen Sie

$$\operatorname{Im}(\overline{uw}), \quad \arg(uw), \quad u^8, \quad u^{\mathrm{i}}.$$

   (b) Lösen Sie für $z \in \mathbb{C}$ die Gleichung $z^2 - 2z + 1 - 2\mathrm{i} = 0$ und geben Sie die Lösungen in Polardarstellung und Binomialform an.

3. Sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \geq -1, \\ -4x - 1, & x < -1. \end{cases}$$

   (a) Skizzieren Sie die Funktion und untersuchen Sie, ob f stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist.

   (b) Untersuchen Sie, ob f differenzierbar und stetig differenzierbar ist, und geben Sie ggf. die erste Ableitung an.

   (c) Berechnen Sie die Tangente an der Stelle $x = 0$.

   (d) Bestimmen Sie einen Definitionsbereich D und einen Wertebereich W, sodass die Funktion $f\colon D \to W, y = f(x)$ bijektiv ist und geben Sie die Umkehrfunktion an.

4. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = x \ln\left(\frac{1}{x}\right).$$

   (a) Untersuchen Sie, ob stationäre Punkte und Wendepunkte der Funktion existieren.

   (b) Geben Sie das Monotonieverhalten der Funktion f an, d.h. bestimmen Sie, auf welchen (möglichst großen) Intervallen die Funktion monoton ist, und begründen Sie dies.

   (c) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0+} f(x).$$

5. Gegeben ist eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = |x - x^2| - 6.$$

   (a) Berechnen Sie die Nullstellen von f.

   (b) Fertigen Sie eine Skizze der Funktion an und bestimmen Sie das Bild $f(\mathbb{R})$.

   (c) Berechnen Sie

$$\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

6. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = x\cos(x^2).$$

   (a) Berechnen Sie durch Verwendung bekannter Reihendarstellungen die Potenzreihe von f.

   (b) Bestimmen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Darstellung aus (a) konvergiert.

   (c) Berechnen Sie $f^{(100)}(0)$ und $f^{(101)}(0)$.

   (d) Berechnen Sie T_5, das Taylor-Polynom 5. Grades der Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$.

7. (a) Berechnen Sie das Integral

$$\int \frac{1}{\sinh x}\,\mathrm{d}x.$$

   (b) Untersuchen Sie, ob das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x$$

   existiert und berechnen Sie dieses gegebenenfalls.