Name: ______________________________ Matrikelnummer: ____________________

PRÜFER: Andreas Körner *Viel Erfolg bei der Prüfung!*

PUNKTEVERTEILUNG:

Beispiel	1	2	3	4	5	6	7
Punkte	/6	/6	/7	/6	/8	/8	/7

1. Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = |\mathrm{e}^x - 1| - 1$.
   (a) Skizzieren Sie die Funktion f und bestimmen Sie das Bild $f(\mathbb{R})$.
   (b) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.
   (c) Argumentieren Sie, dass die eingeschränkte Funktion $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to [-1, \infty)$ bijektiv ist und berechnen Sie die Umkehrfunktion.

2. (a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge (a_n), gegeben durch $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}$.
   (b) Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$, dass die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{n+1}{n}$, beschränkt und monoton ist.

3. (a) Seien $z = -4 - 2\mathrm{i}$ und $w = 3 + 4\mathrm{i}$. Berechnen Sie

$$\operatorname{Re}\left(\overline{z} + \mathrm{i}w\right), \qquad \text{sowie} \qquad \arg\left(\frac{z\overline{w}}{w}\right) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{i}^{\mathrm{i}z}.$$

   (b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, welche die Gleichung

$$z^4 - (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})z = 0$$

   erfüllen.
   (c) Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}$ die Gültigkeit von

$$\mathrm{i}\sin(x) = \sinh(\mathrm{i}x).$$

4. (a) Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{nx}$ konvergiert.
   (b) Zeigen Sie mit dem Vergleichskriterium, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

   konvergiert und berechnen Sie deren Summe.

5. Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = |x|\, x^3.$$

(a) Skizzieren Sie die Funktion f.

(b) Untersuchen Sie die Funktion f auf $\mathbb{R}$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

(c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten, d.h. bestimmen Sie, auf welchen (möglichst großen) Intervallen die Funktion monoton ist, und begründen Sie dies.

(d) Argumentieren Sie mit (c), dass die Funktion bijektiv ist.

(e) Untersuchen Sie, ob Wendepunkte vorliegen und geben Sie die Krümmungsbereiche von f an.

6. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = x^2 \mathrm{e}^x.$$

(a) Ermitteln Sie die Potenzreihendarstellung von f an $x_0 = 0$ unter Verwendung bekannter Potenzreihen und geben Sie an, für welche $x \in \mathbb{R}$ diese konvergiert.

(b) Berechnen Sie das Taylor-Polynom 3. Grades an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.

(c) Bestimmen Sie $f^{(100)}(0)$ und $f^{(101)}(0)$.

(d) Ermitteln Sie die stationären Punkte und prüfen Sie ob es sich um lokale Minima bzw. Maxima handelt.

(e) Berechnen Sie

$$\lim_{x \to -\infty} f(x).$$

7. (a) Berechnen Sie das Integral

$$\int \sqrt{x^2 + 4}\, \mathrm{d}x$$

mit Hilfe einer speziellen Substitution.

(b) Zeigen Sie für $a \in \mathbb{R}$, dass $F(x) = \ln(x + a)$ eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x+a}$ ist. Verwenden Sie

$$\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}$$

um zu untersuchen, ob das (uneigentliche) Integral

$$\int_0^2 \frac{2}{x^2 - 1}\, \mathrm{d}x$$

existiert und berechnen Sie dieses gegebenenfalls.