Mathematik 1 **Schriftliche Prüfung** 12.07.2021

Name: ______________________ Matrikelnummer: ______________________

PRÜFER: Andreas Körner *Viel Erfolg bei der Prüfung!*

PUNKTEVERTEILUNG:

Beispiel	1	2	3	4	5	6	7
Punkte	/7	/5	/8	/5	/8	/9	/6

---

1. Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = |x^2 - 2x| - 1$.
   (a) Bestimmen Sie das Bild $f(\mathbb{R})$.
   (b) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.
   (c) Ist die eingeschränkte Funktion $f\colon [2, \infty) \to [-1, \infty)$ bijektiv? Berechnen Sie ggf. die Umkehrfunktion.
   (d) Berechnen Sie für $t > 2$ das (von t abhängige) Integral
   $$\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Gegeben ist die Folge (a_n), mit $n \in \mathbb{N}_0$, durch
   $$a_{n+1} = \frac{a_n}{2 + a_n}, \qquad a_0 = 1.$$
   (a) Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass die Folge (a_n) durch $L = 0$ und $U = 1$ beschränkt ist.
   (b) Beweisen Sie, dass die Folge (a_n) streng monoton fallend ist.
   (c) Begründen Sie, warum die Folge (a_n) konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.

3. (a) Gegeben sei $z_1 = \sqrt{2}(1 + \mathrm{i})$ und $z_2 = \mathrm{i}$. Berechnen Sie z_1^6 in Komponentenform sowie
   $$\left|\tfrac{z_1}{z_2}\right|, \qquad \arg(\overline{z_1} z_2), \qquad \operatorname{Im}(z_1 z_2) \qquad \text{und} \qquad \exp(z_2).$$
   (b) Lösen Sie die Gleichung $z^4 - 2z^2 + 1 = 0$ nach $z \in \mathbb{C}$.
   (c) Zeigen Sie, für $x \in \mathbb{R}$, mit Hilfe der Formel von Euler die Gültigkeit von
   $$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x, \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

4. Betrachten Sie für $a \neq 0$ die Funktion

$$f(x) = \frac{ax+2}{x^2-4}.$$

   (a) Ermitteln Sie den Definitionsbereich D der Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$.

   (b) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ so, dass die Funktion f an der Stelle $x = 0$ eine Tangente parallel zur Geraden $y = -x$ aufweist.

   (c) Charakterisieren Sie für $a = 1$ die Unstetigkeitsstellen der Funktion f.

5. Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{für } x \leq 0, \\ \mathrm{e}^x - 1, & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

   (a) Skizzieren Sie die Funktion f.

   (b) Überprüfen Sie die Funktion f auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

   (c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten, d.h. bestimmen Sie, auf welchen (möglichst großen) Intervallen die Funktion monoton ist, und begründen Sie dies.

   (d) Argumentieren Sie ob die Funktion bijektiv ist.

   (e) Untersuchen Sie, ob Wendepunkte vorliegen und geben Sie die Krümmungsbereiche von f an.

6. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}.$$

   (a) Untersuchen Sie die Funktion auf Symmetrie (gerade bzw. ungerade).

   (b) Ermitteln Sie die Potenzreihendarstellung von f an $x_0 = 0$ und geben Sie an, für welche $x \in \mathbb{R}$ diese konvergiert.

   (c) Berechnen Sie die Werte von $f^{(50)}(0)$ und $f^{(51)}(0)$.

   (d) Ermitteln Sie die stationären Punkte und prüfen Sie ob es sich um lokale Minima bzw. Maxima handelt.

   (e) Bestimmen Sie die beiden Grenzwerte von f für $x \to \pm\infty$.

7. (a) Berechnen Sie das Integral

$$\int 2 \sin x \cos x \, \mathrm{d}x$$

   unter Verwendung des Summensatzes für $\sin(2x)$.

   (b) Begründen Sie ohne Integration, warum $F(x) = -\frac{1}{2}\exp(-x^2)$ eine Stammfunktion der Funktion $f(x) = x\exp(-x^2)$ darstellt. Argumentieren Sie, dass die Funktion $g(x) = |x|\exp(-x^2)$ integrierbar ist. Untersuchen Sie die Existenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \exp(-x^2) \, \mathrm{d}x$$

   (unter Verwendung von F) und berechnen Sie ggf. dessen Wert.