Mathematik 1 **Schriftliche Prüfung** 17.06.2021

Name: ______________________ Matrikelnummer: ______________________

PRÜFER: Andreas Körner *Viel Erfolg bei der Prüfung!*

PUNKTEVERTEILUNG:

Beispiel	1	2	3	4	5	6	7
Punkte	/6	/6	/7	/6	/8	/9	/6

1. (a) Gegeben sei $u = 2\exp(\mathrm{i}\frac{\pi}{2})$ und $w = -\mathrm{i}$. Berechnen Sie u^4 in Komponentenform sowie
$$|uw|, \qquad \arg(u\overline{w}) \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Im}\left(\frac{u}{w}\right).$$
   (b) Skizzieren Sie die Menge
$$M = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im}(z) \leq \operatorname{Re}(\overline{z})\}$$
   in der Gaußschen Zahlenebene.
   (c) Lösen Sie die Gleichung $z^3 = -\mathrm{i}$ nach $z \in \mathbb{C}$.

2. Betrachten Sie die Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$f(x) = |x^2 - 2x| - 1.$$
   (a) Skizzieren Sie die Funktion und berechnen Sie die Nullstellen von f.
   (b) Bestimmen Sie mit Hilfe von (a) das Bild $f(\mathbb{R})$ der Funktion.
   (c) Untersuchen Sie, ob die Funktion f injektiv, surjektiv, bijektiv ist und argumentieren Sie dies mit Hilfe von (a) und (b).
   (d) Berechnen Sie von $f \colon [2, \infty) \to [-1, \infty)$ die Umkehrfunktion f^{-1}.

3. Gegeben ist die Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \leq 0, \\ \sqrt{x} + 1, & \text{für } 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, & \text{für } x > 1. \end{cases}$$
   (a) Skizzieren Sie die Funktion f.
   (b) Überprüfen Sie die Funktion f auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit auf $\mathbb{R}$.
   (c) Untersuchen Sie, ob die Funktion f an $x = 1$ eine Tangente t besitzt und berechnen Sie diese gegebenenfalls.
   (d) Berechnen Sie für $y > 1$ das Integral
$$\int_{-1}^{y} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

4. (a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n^2+5n+6}$$

konvergent ist und berechnen Sie die Summe.

(b) Betrachten Sie die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k}(x+1)^k.$$

Untersuchen Sie für welche $x \in \mathbb{R}$ die Potenzreihe (absolut) konvergiert.

5. Betrachten Sie die Funktion $f(x) = x\mathrm{e}^x$.

(a) Bestimmen Sie eine Formel für die Ableitung $f^{(n)}(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, und beweisen Sie diese Formel mit Hilfe der vollständigen Induktion.

(b) Ermitteln Sie die Potenzreihendarstellung von f an $x_0 = 0$ und geben Sie an, für welche $x \in \mathbb{R}$ diese konvergiert.

(c) Berechnen Sie die Tangente t an die Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$.

(d) Bestimmen Sie den Wert von $f^{100}(0)$.

(e) Ermitteln Sie die beiden Grenzwerte von f für $x \to \pm\infty$.

6. Gegeben ist die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = x\ln(x^2).$$

(a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$.

(b) Untersuchen Sie die Grenzwerte von f für $x \to 0$ sowie $x \to \pm\infty$.

(c) Berechnen Sie die stationären Punkte und entscheiden Sie, ob lokale Minima und Maxima vorliegen.

(d) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten, d.h. bestimmen Sie, auf welchen (möglichst großen) Intervallen die Funktion monoton ist, und begründen Sie dies.

(e) Untersuchen Sie, ob Wendepunkte vorliegen und geben Sie die Krümmungsbereiche von f an.

7. (a) Berechnen Sie mit Hilfe der Substitution $t = \tan(\frac{x}{2})$ das Integral

$$\int \frac{2}{\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

(b) Untersuchen Sie, für welche $a, b \in \mathbb{R}$ das (uneigentliche) Integral

$$\int_a^b \frac{1}{2x-2}\,\mathrm{d}x$$

existiert.