Name: _____

Matrikelnummer: _____

PRÜFER: Andreas Körner

Viel Erfolg bei der Prüfung!

PUNKTEVERTEILUNG:

Beispiel	1	2	3	4	5	6	7
Punkte	/6	/6	/6	/7	/6	/10	/7

1. (a) Lösen Sie für $z = a + ib \in \mathbb{C}$ die Gleichung

$$2z + 1 - i = \bar{z} + 3 + 2i.$$

- (b) Skizzieren Sie die Menge

$$M = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Im}(\bar{z})\}$$

in der Gaußschen Zahlenebene.

- (c) Zeigen Sie für $z = a + ib \neq 0$ die Gültigkeit von

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

2. Betrachten Sie die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1, & \text{für } x < 0, \\ e^x, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (a) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$, sodass f stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist und skizzieren Sie diese Funktion.
(b) Berechnen Sie die Tangente der Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$.
(c) Berechnen Sie

$$\int_{-1}^1 f(x) \, dx.$$

3. (a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{3}{k^2 - k - 2}$$

konvergent ist und berechnen Sie die Summe.

- (b) Untersuchen Sie, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n^2}{(n+3)!}$$

konvergent *und* absolut konvergent ist.

4. Seien $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Betrachten Sie die Funktion $f: \mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{a}\} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{ax + b}.$$

- (a) Finden Sie für $k \in \mathbb{N}$ eine Formel für die k -te Ableitung $f^{(k)}(x)$ und beweisen Sie diese mit vollständiger Induktion.
 - (b) Berechnen Sie für $a = 2$ und $b = 1$ mit Hilfe von (a) das Taylor-Polynom n -ten Grades T_n der Funktion f an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.
 - (c) Zeigen Sie für $a = 2$ und $b = 1$ explizit, dass $T_2(x) = \mathcal{O}(x^2)$ für $x \rightarrow x_0$ gilt.
 - (d) Geben Sie für $a = 2$ und $b = 1$ mit Hilfe von (b) die Taylor-Reihe an und bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$, für welche diese konvergiert.
5. Betrachten Sie die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = |e^x - 1| - 1.$$

- (a) Skizzieren Sie die Funktion.
 - (b) Bestimmen Sie mit Hilfe von (a) das Bild $f(\mathbb{R})$ der Funktion.
 - (c) Untersuchen Sie, ob die Funktion f injektiv, surjektiv, bijektiv ist und argumentieren Sie dies mit Hilfe von (a) und (b).
 - (d) Berechnen Sie die Umkehrfunktion für $f: \mathbb{R}^- \rightarrow [-1, 0)$.
6. Gegeben ist die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \ln \left| \frac{1}{x-1} \right|.$$

- (a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$.
 - (b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion f mit Hilfe einer Fallunterscheidung für $x \in D$, mit D aus (a).
 - (c) Untersuchen Sie ob stationäre Punkte, lokale Minima und Maxima sowie Wendepunkte vorliegen und berechnen Sie diese gegebenenfalls.
 - (d) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten, d.h. bestimmen Sie, auf welchen (möglichst großen) Intervallen die Funktion monoton ist, und begründen Sie dies.
7. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int \frac{1}{x^2} \ln x \, dx$

(b) $\int \frac{1}{x^3 - x^2} \, dx$