Mathematik 1 **Schriftliche Prüfung** 28.10.2020

Name: ______________________________ Matrikelnummer: ____________________

PRÜFER: Andreas Körner *Viel Erfolg bei der Prüfung!*

---

1. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist rekursiv gegeben durch

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{2}a_n + \tfrac{1}{2}, \qquad a_1 = \tfrac{1}{2}.$$

   (a) Beweisen Sie, dass die Folge (a_n) streng monoton und beschränkt ist.

   (b) Begründen Sie, warum die Folge (a_n) konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.

   (c) Untersuchen Sie, welche der folgenden expliziten Bildungsgesetze die gegebene Folge darstellt und beweisen Sie dies mit Hilfe der vollständigen Induktion.

   (i) $a_n = 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n$ (ii) $a_n = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n$

   (d) Für welche a_n aus (c) ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent? Begründen Sie dies.

2. Seien $u = -1 - \mathrm{i}$ und $w = \sqrt{2}\exp(\mathrm{i}\frac{\pi}{4})$.

   (a) Berechnen Sie

$$\mathrm{Im}(\overline{uw}), \quad \arg(uw), \quad u^8, \quad u^{\mathrm{i}}.$$

   (b) Lösen Sie für $z \in \mathbb{C}$ die Gleichung

$$z^3 - w\,z = 0.$$

3. Sei die Funktion $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2}x^2, & x < 0, \\ \mathrm{e}^x - 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

   (a) Skizzieren Sie die Funktion und untersuchen Sie, ob f stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist.

   (b) Untersuchen Sie, ob f differenzierbar und stetig differenzierbar ist, und geben Sie ggf. die erste Ableitung an.

   (c) Begründen Sie, warum f bijektiv ist und berechnen Sie die Umkehrfunktion

$$f^{-1}\colon\ \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+\,.$$

   (d) Berechnen Sie für $t > 0$ das Integral

$$\int_{-2}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

4. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}.$$

   (a) Berechnen Sie die Tangente an der Stelle $x_0 = 0$.

   (b) Ermitteln Sie die stationären Punkte, lokale Minima und Maxima sowie Wendepunkte der Funktion.

   (c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten, d.h. bestimmen Sie, auf welchen (möglichst großen) Intervallen die Funktion monoton ist, und begründen Sie dies.

   (d) Untersuchen Sie, ob die Funktion injektiv ist.

5. Gegeben ist eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = |x^2 - x| - 2.$$

   (a) Berechnen Sie die Nullstellen von f.

   (b) Fertigen Sie eine Skizze der Funktion an und bestimmen Sie das Bild $f(\mathbb{R})$.

   (c) Berechnen Sie

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

6. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = x\exp(2x^2).$$

   (a) Berechnen Sie durch Verwendung bekannter Summen von Reihen die Potenzreihendarstellung von f.

   (b) Bestimmen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Darstellung aus (a) konvergiert.

   (c) Berechnen Sie $f^{(100)}(0)$ und $f^{(101)}(0)$.

   (d) Berechnen Sie T_3, das Taylor-Polynom 3. Grades der Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$, und verifizieren Sie

$$|f(x) - T_3(x)| = \mathcal{O}(x^4), \qquad x \to x_0.$$

7. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

   (a) $\displaystyle\int \frac{6x+3}{x^2+x+7}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int \ln\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$