Mathematatik 1 **Schriftliche Prüfung** 09.09.2020

Name: ______________________________ Matrikelnummer: ____________________

PRÜFER: Andreas Körner *Viel Erfolg bei der Prüfung!*

1. (a) Lösen Sie für $z \in \mathbb{C}$ die Gleichung $z^2 - 4z + 4 - 2\mathrm{i} = 0$ und geben Sie die Lösungen in Polardarstellung und Binomialform an.

   (b) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$, welche die Gleichung
$$\frac{z + \overline{z}}{z - \overline{z}} = \mathrm{i}$$
   erfüllen und skizzieren Sie diese in der Gaußschen Zahlenebene.

2. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$f(x) = x\,|x|.$$
   (a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

   (b) Argumentieren Sie, dass die Funktion f bijektiv ist und berechnen Sie die Umkehrfunktion.

   (c) Zeigen Sie, dass die Funktion f stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist.

   (d) Ermitteln Sie die stationären Punkte, lokale Minima und Maxima sowie Wendepunkte der Funktion.

   (e) Bestimmen Sie, auf welchen (möglichst großen) Intervallen die Funktion konvex bzw. konkav ist, und begründen Sie dies.

3. Berechnen Sie den Grenzwert
$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2}{1 - \cos x} + x \, \ln(x^2) \right).$$

4. Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x}{(x-1)(x-2)(x+2)}.$$
   (a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D und klassifizieren Sie die Unstetigkeitsstellen.

   (b) Ermitteln Sie die reelle Partialbruchzerlegung von f.

   (c) Berechnen Sie eine Stammfunktion F der Funktion f.

   (d) Untersuchen Sie mit Hilfe der Stammfunktion von f aus (c) die Existenz von
$$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{sowie} \qquad \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$

6. Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = (\mathrm{e}^x - 2)^2.$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass für $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung gegeben ist durch

$$f^{(n)}(x) = 2^n \mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^x.$$

(b) Berechnen Sie mit Hilfe von (a) die Potenzreihe der Funktion f an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.

(c) Ermitteln Sie das Taylorpolynom T_2 der Funktion f an der Entwicklungsstelle $x_0 = 1$ und zeigen Sie

$$|f(x) - T_2(x)| = \mathcal{O}(x^3), \qquad x \to x_0.$$

7. Untersuchen Sie die beiden Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin(\tfrac{1}{n}) \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt[k]{\frac{2k+3}{3k+2}}$$

jeweils auf Konvergenz.