Mathematik 1 **Schriftliche Prüfung** 05.08.2020

Name: ______________________________ Matrikelnummer: ____________________

Prüfer: Andreas Körner *Viel Erfolg bei der Prüfung!*

1. Gegeben ist die Folge (a_n), mit $n \in \mathbb{N}_0$, durch
$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2 + a_n}, \qquad a_0 = 1.$$
   (a) Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass die Folge (a_n) durch $L = 0$ und $U = 1$ beschränkt ist.
   (b) Beweisen Sie, dass die Folge (a_n) streng monoton fallend ist.
   (c) Begründen Sie, warum die Folge (a_n) konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.

2. Seien $u = \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{6}$ und $v = -1 - \mathrm{i}$.
   (a) Berechnen Sie die Exponentialform der komplexen Zahlen u und v, sowie $w = u^6 v^8$.
   (b) Lösen Sie die Gleichung $z^2 + 4\mathrm{i}z = v + 4$ indem Sie diese zuerst auf ein vollständiges Quadrat der Form $(z + \alpha)^2 + \beta = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, umwandeln und dann alle Lösungen für $z \in \mathbb{C}$ bestimmen.

3. Betrachten Sie die Funktion $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$f(x) = |2 \sin x| - 1.$$
   (a) Berechnen Sie die Nullstellen von f und skizzieren Sie die Funktion.
   (b) Bestimmen Sie anhand der Skizze aus (a) das Bild $f(\mathbb{R})$.
   (c) Berechnen Sie $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (d) Untersuchen Sie die Symmetrie der Funktion f und bestimmen Sie $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$.

4. Betrachten Sie die beiden Reihen
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 - 1} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k^2 - 1}.$$
   (a) Untersuchen Sie die beiden Reihen jeweils auf Konvergenz *und* absolute Konvergenz.
   (b) Berechnen Sie die Summe der absolut konvergenten Reihe.

5. Sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x}, & 0 \leq x < 2, \\ \frac{1}{2}x + 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

   (a) Untersuchen Sie, ob f stetig ist und skizzieren Sie die Funktion.

   (b) Untersuchen Sie, ob f differenzierbar ist und geben Sie ggf. die erste Ableitung an.

   (c) Begründen Sie, warum f bijektiv ist.

   (d) Berechnen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon [2, \infty) \to [2, \infty)$.

6. Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{x^3}{x^3 + 2x^2 + x}.$$

   (a) Klassifizieren Sie die Unstetigkeitsstellen der Funktion f und geben Sie ggf. eine stetige Fortsetzung $\tilde{f}$ an.

   (b) Berechnen Sie die Tangente der Funktion an der Stelle $x_0 = 0$.

   (c) Ermitteln Sie die stationären Punkte, lokale Minima und Maxima sowie Wendepunkte der Funktion.

7. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

   (a) $\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^{-2x^2}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int \frac{2\mathrm{e}^{3u}}{1-\mathrm{e}^{2u}}\mathrm{d}u$