Mathematik 1 **Schriftliche Prüfung** 08.07.2020

Name: ______________________________ Matrikelnummer: ____________________

PRÜFER: Andreas Körner *Viel Erfolg bei der Prüfung!*

---

1. Gegeben ist die Folge (a_n) durch $a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$.
   (a) Untersuchen Sie, ob für (a_n) Monotonie vorliegt.
   (b) Untersuchen Sie, ob (a_n) beschränkt ist.
   (c) Begründen Sie, warum die Folge (a_n) konvergent ist, und berechnen Sie den Grenzwert.

2. Seien $v = -4 - 4\mathrm{i}$ und $w = -1 + \mathrm{i}$.
   (a) Berechnen Sie
   $$\operatorname{Im}\left(\frac{\overline{v} + w}{v + \overline{w}}\right) \qquad \text{und} \qquad \arg\left(\frac{v\overline{w}}{w}\right).$$
   (b) Lösen Sie die Gleichung
   $$z^3 = w$$
   nach $z \in \mathbb{C}$, geben Sie alle Lösungen in Polarform an und skizzieren Sie diese in der Gaußschen Zahlenebene.

3. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch
   $$f(x) = |x^2 - 2x - 3| - 5.$$
   (a) Berechnen Sie die Nullstellen von f und skizzieren Sie die Funktion.
   (b) Bestimmen Sie anhand der Skizze aus (a) alle Intervalle $I \subset \mathbb{R}$, auf welchen die Funktion injektiv ist.
   (c) Bestimmen Sie das Bild $f(\mathbb{R})$.
   (d) Berechnen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon [-5, \infty) \to [3, \infty)$.

4. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch
   $$f(x) = \frac{x}{4 + x^2}.$$
   (a) Berechnen Sie durch Verwendung bekannter Summen von Reihen die Potenzreihendarstellung von f.
   (b) Bestimmen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Darstellung aus (a) konvergiert.
   (c) Berechnen Sie $f^{(100)}(0)$ und $f^{(101)}(0)$.
   (d) Zeigen Sie, dass $T_3(x) = \frac{x}{4} - \frac{x^3}{16}$ das Taylor-Polynom 3. Grades der Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$ ist.

5. Sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2}x^2, & x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Untersuchen Sie, ob f stetig ist, und skizzieren Sie die Funktion.

(b) Untersuchen Sie, ob f differenzierbar ist, und geben Sie ggf. die erste Ableitung an.

(c) Begründen Sie, warum f bijektiv ist.

6. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{x}.$$

(a) Verwenden Sie den Zwischenwertsatz um die Existenz von Nullstellen zu begründen und berechnen Sie diese anschließend.

(b) Bestimmen Sie jene Stelle $x = x_0$, an welcher die Tangente an f eine Steigung von $k = 1$ besitzt, und geben Sie diese Tangente $y = t(x)$ an.

(c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion f auf ganz $\mathbb{R}$, d.h. geben Sie Intervalle an, auf welchem die Funktion (streng) monoton steigend bzw. fallend ist, und begründen Sie dies.

(d) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten der Funktion f auf ganz $\mathbb{R}$, d.h. geben Sie Intervalle an, auf welchem die Funktion konvex bzw. konkav ist, und begründen Sie dies.

7. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{2x^2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int \ln\left(x^2-1\right)\,\mathrm{d}x$