Name: ______________________________ Matrikelnummer: ____________________

PRÜFER: Andreas Körner *Viel Erfolg bei der Prüfung!*

1. (a) Sei $v = 5 - 4\mathrm{i}$ und $w = 2 + 4\mathrm{i}$. Berechnen Sie
$$\mathrm{Re}(\overline{v} + \mathrm{i}w) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Im}(\tfrac{v\overline{w}}{w}).$$
   (b) Berechnen Sie jeweils den Betrag und das Argument aller 3–ten Wurzeln von
$$z^3 = 8 + \mathrm{i}8\sqrt{3}.$$

2. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$f(x) = |2x^2 - 4x - 6|.$$
   (a) Berechnen Sie die Nullstellen von f und skizzieren Sie die Funktion.
   (b) Bestimmen Sie das Bild $f(\mathbb{R})$.
   (c) Geben Sie ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ an, auf welchem die Funktion injektiv ist.
   (d) Berechnen Sie
$$g(t) = \int_{-1}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$
   in Abhängigkeit von $t \in [-1, \infty)$.

3. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch
$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x}.$$
   (a) Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung $f^{(n)}$ der Funktion f und beweisen Sie diese Formel mit Hilfe der vollständigen Induktion.
   (b) Verwenden Sie die Formel von Taylor um eine Potenzreihe der Funktion f an $x_0 = 0$ anzugeben.
   (c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Potenzreihe aus (b) absolut konvergent ist.

4. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

   (a) $\displaystyle\int \sqrt{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{\cos t} \sin t\,\mathrm{d}t$ (c) $\displaystyle\int \ln\sqrt{1 + x^2}\,\mathrm{d}x$

5. Betrachten Sie die Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = \sqrt{2x}.$$

(a) Bestimmen Sie jene Stelle $x = x_0$, an welcher die Tangente an f eine Steigung $k = 1$ besitzt und geben Sie diese Tangente $y = t(x)$ an.

(b) Zeigen Sie mit x_0 aus (a), dass gilt

$$|f(x) - t(x)| = \mathcal{O}(x), \qquad x \to x_0.$$

6. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\ln(1-\mathrm{e}^x)}.$$

7. Sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x - 1, & x < a \\ 1 - x^2, & x \geq a. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie alle $a < 0$, sodass f stetig ist und skizzieren Sie die Funktion.

(b) Verwenden Sie für a aus (a) den Zwischenwertsatz um die Existenz von Nullstellen zu begründen und berechnen Sie diese anschließend.

(c) Untersuchen Sie die Monotonie der Funktion f für $a = -1$.

(d) Geben Sie einen Definitions- und Wertebereich an, auf welchem f bijektiv ist und berechnen Sie die Umkehrfunktion.