

Name: \_\_\_\_\_

Matrikelnummer: \_\_\_\_\_

PRÜFER: Andreas Körner

*Viel Erfolg bei der Prüfung!*

1. (a) Skizzieren Sie die Menge

$$M = \{z \in \mathbb{C} : |z + i| \leq 1 \wedge \operatorname{Im} z + 1 > 0\}$$

in der Gaußschen Zahlenebene. Sind die Zahlen  $z_1 = 0$  und  $z_2 = 1 - i$  in  $M$  enthalten?

- (b) Lösen Sie die Gleichung

$$z^4 + z^2 + 1 = 0$$

für  $z \in \mathbb{C}$ .

2. (a) Bestimmen Sie alle  $x \in \mathbb{R}$ , für welche die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nx}$$

konvergiert und berechnen Sie gegebenenfalls die Summe.

- (b) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 3k + 2}$$

sowohl auf Konvergenz als auch auf absolute Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls die Summe.

3. Betrachten Sie die Funktion  $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x) = \int_{-1}^x |t - 1| - 1 dt.$$

- (a) Skizzieren Sie die Funktion  $g(t) = |t - 1| - 1$  und ermitteln Sie die Nullstellen.  
(b) Berechnen Sie die Funktion  $f$  explizit.  
(c) Untersuchen Sie  $f$  auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit auf  $[-1, 2]$ .  
(d) Überprüfen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, ob die Funktion  $f$  eine Nullstelle auf einem Intervall  $[a, b] \subseteq [-1, 2]$  besitzt.

4. Berechnen Sie das Integral

$$\int \frac{1}{x} \ln x dx.$$

5. Seien  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x) = e^{\sqrt{x-1}}.$$

- (a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich  $D$  an.
- (b) Berechnen Sie die Tangente von  $f$  an der Stelle  $x_0 = 5$ .
- (c) Untersuchen Sie, ob  $f$  injektiv ist und begründen Sie dies.
- (d) Geben Sie das Bild  $f(D)$  an.
- (e) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion  $f^{-1}: f(D) \rightarrow D$ .
- (f) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von  $f$ .
- (g) Bestimmen Sie das Krümmungsverhalten von  $f$ .

6. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right).$$

7. Sei

$$f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 1}{x^3 + 2x^2 + x}.$$

- (a) Untersuchen Sie  $f$  für  $x \rightarrow 0$  und  $x \rightarrow -1$  und bestimmen Sie den Definitionsbereich  $D \subseteq \mathbb{R}$  von  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ .
- (b) Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung der Funktion  $f$ .
- (c) Berechnen Sie eine Stammfunktion von  $f$ .
- (d) Untersuchen Sie, für welche  $a, b \in \mathbb{R}$  das Integral

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

existiert.