

Name: _____

Matrikelnummer: _____

PRÜFER: Andreas Körner

Viel Erfolg bei der Prüfung!

1. (a) Skizzieren Sie die Menge

$$M = \{z \in \mathbb{C} : |z + i| \leq 1 \wedge \operatorname{Im} z + 1 > 0\}$$

in der Gaußschen Zahlenebene. Sind die Zahlen $z_1 = 0$ und $z_2 = 1 - i$ in M enthalten?

- (b) Lösen Sie die Gleichung

$$z^4 + z^2 + 1 = 0$$

für $z \in \mathbb{C}$.

2. (a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nx}$$

konvergiert und berechnen Sie gegebenenfalls die Summe.

- (b) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 3k + 2}$$

sowohl auf Konvergenz als auch auf absolute Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls die Summe.

3. Betrachten Sie die Funktion $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \int_{-1}^x |t - 1| - 1 dt.$$

- (a) Skizzieren Sie die Funktion $g(t) = |t - 1| - 1$ und ermitteln Sie die Nullstellen.
(b) Berechnen Sie die Funktion f explizit.
(c) Untersuchen Sie f auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit auf $[-1, 2]$.
(d) Überprüfen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, ob die Funktion f eine Nullstelle auf einem Intervall $[a, b] \subseteq [-1, 2]$ besitzt.

4. Berechnen Sie das Integral

$$\int \frac{1}{x} \ln x dx.$$

5. Seien $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = e^{\sqrt{x-1}}.$$

- (a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D an.
- (b) Berechnen Sie die Tangente von f an der Stelle $x_0 = 5$.
- (c) Untersuchen Sie, ob f injektiv ist und begründen Sie dies.
- (d) Geben Sie das Bild $f(D)$ an.
- (e) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $f^{-1}: f(D) \rightarrow D$.
- (f) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von f .
- (g) Bestimmen Sie das Krümmungsverhalten von f .

6. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right).$$

7. Sei

$$f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 1}{x^3 + 2x^2 + x}.$$

- (a) Untersuchen Sie f für $x \rightarrow 0$ und $x \rightarrow -1$ und bestimmen Sie den Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ von $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.
- (b) Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung der Funktion f .
- (c) Berechnen Sie eine Stammfunktion von f .
- (d) Untersuchen Sie, für welche $a, b \in \mathbb{R}$ das Integral

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

existiert.