Name: ______________________________ Matrikelnummer: ____________________

PRÜFER: Andreas Körner *Viel Erfolg bei der Prüfung!*

1. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$f(x) = x^2 - |x + \tfrac{1}{4}|.$$
   (a) Berechnen Sie die Nullstellen von f, skizzieren Sie die Funktion.
   (b) Bestimmen Sie den Bildbereich $f(\mathbb{R})$.
   (c) Geben Sie ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ an, auf welchem die Funktion injektiv ist.
2. Es seien $z = 3 - 4\mathrm{i}$ und $w = -1 - \mathrm{i}$ gegeben. Berechnen Sie
$$|z|, \quad |w|, \quad \arg z, \quad \arg w, \quad |z^{13}|, \quad \arg(w^{20}), \quad \left|\frac{z}{w}\right|, \quad \arg\left(\frac{z}{w}\right), \quad \mathrm{e}^z.$$
3. Sei $q \in [-1, 1]$. Eine Folge (a_n), ist gegeben durch
$$a_n = \frac{n^2 + n^3 \sin(q^n \frac{\pi}{2})}{2n^3 + n + 1}.$$
Untersuchen Sie die Folge auf Konvergenz und berechnen Sie ggf. den Grenzwert.
4. Untersuchen Sie die beiden Reihen
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 4k + 3} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k^2 + 4k + 3}$$
auf Konvergenz und absolute Konvergenz und berechnen Sie ggf. die Summe der Reihe. Was kann über die Reihen
$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2 + 4k + 3} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k^2 + 4k + 3}$$
ausgesagt werden?
5. Betrachten Sie die Funktion Funktion $f(x) = x\mathrm{e}^x$.
   (a) Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen und bestimmen Sie dann eine Formel für die Ableitung $f^{(n)}(x)$ für $n \in \mathbb{N}_0$.
   (b) Beweisen Sie diese Formel aus (a) mit Hilfe der vollständigen Induktion.

6. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{für } x < 0, \\ 1 - \mathrm{e}^x, & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

   (a) Skizzieren Sie die Funktion f.

   (b) Untersuchen Sie, ob die Funktion stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

   (c) Berechnen Sie

   $$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   (d) Formulieren Sie den ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung. Überprüfen Sie, ob dieser in (c) anwendbar ist und berechnen Sie ggf. $\xi \in (-1, 1)$.

7. Berechnen Sie die folgenden Integrale.

   (a) $\displaystyle\int \sin(2t)\,\mathrm{e}^{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t$

   (b) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \sin(2x)\,\mathrm{d}x$

8. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(1 - \frac{1}{x}\right).$$

   (a) Untersuchen Sie f für $x \to 0$ und $x \to \infty$.

   (b) Untersuchen Sie f auf Differenzierbarkeit.

   (c) Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion und untersuchen Sie, ob lokale und globale Minima bzw. Maxima vorliegen.

   (d) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion f.

   (e) Zeigen Sie, dass $x_0 = 2.269\ldots$ eine Wendestelle von f ist. Verwenden Sie dazu, dass x_0 Lösung der Gleichung

   $$x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0$$

   auf $\mathbb{R}^+$ ist. Bestimmen Sie damit des weiteren das Krümmungsverhalten von f.

   (f) Skizzieren Sie die Funktion f.