Mathematik 1 **Schriftliche Prüfung** 12.06.2019

Name: ______________________________ Matrikelnummer: ____________________

PRÜFER: Andreas Körner *Viel Erfolg bei der Prüfung!*

1. (a) Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe der vollständigen Induktion die Gültigkeit der Formel
$$\sum_{k=1}^{n}(3k-2) = \frac{n}{2}(3n-1).$$
   (b) Berechnen Sie
$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^k.$$
2. (a) Bestimmen Sie $z \in \mathbb{C}$, sodass für $w = 1 + 2\mathrm{i}$ gilt
$$\operatorname{Im}\left(\frac{z\overline{w}}{w^2}\right) = 1.$$
   (b) Lösen Sie für $z \in \mathbb{C}$ die Gleichung $z^4 - (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})z = 0$.
3. Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$f(x) = \frac{9x}{x^3 + 3x^2 - 4}.$$
   (a) Untersuchen Sie f an $x = -2$ und bestimmen Sie $D \subset \mathbb{R}$.
   (b) Ermitteln Sie die reelle Partialbruchzerlegung von f.
   (c) Berechnen Sie eine Stammfunktion F der Funktion f.
   (d) Untersuchen Sie mit Hilfe der Stammfunktion aus (c) die Existenz von
$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{sowie} \qquad \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$
4. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & \text{für } x < a, \\ x^2 + 4x - 2, & \text{sonst.} \end{cases}$$
   (a) Bestimmen Sie ein $a \in \mathbb{R}$, sodass f stetig auf $\mathbb{R}$ ist und skizzieren Sie diese Funktion.
   (b) Berechnen Sie die Tangente der Funktion f an der Stelle $x = 0$.

5. Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int 2x\ln(8x)\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int \frac{6x-1}{\sqrt{3x^2-x}}\,\mathrm{d}x$

6. Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}.$$

(a) Untersuchen Sie ob f symmetrisch, d.h. gerade bzw. ungerade, ist.

(b) Bestimmen Sie die stationären Punkte und das Krümmungsverhalten der Funktion. Untersuchen Sie, ob lokale Minima bzw. Maxima vorliegen.

(c) Wenden Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf dem Intervall $[-1,1]$ an und berechnen Sie das $\xi \in (-1,1)$.

(d) Untersuchen Sie die Monotonie der Funktion f und geben Sie ein Intervall an auf welchem f bijektiv ist und berechnen Sie die Umkehrfunktion.

7. Betrachten Sie die Funktion $f\colon\ \mathbb{R}\setminus\{-2\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{x}{2+x}.$$

(a) Ermitteln Sie mit Hilfe der geometrischen Reihe die Potenzreihe von f sowie das Intervall I auf welchem für $x \in I$ die Potenzreihe konvergiert.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe der Formel von Taylor die Ableitung $f^{(33)}(0)$.

(c) Berechnen Sie T_2, das Taylorpolynom 2. Grades an der Stelle $x_0 = 0$ und zeigen Sie

$$f(x) = T_2(x) + \mathcal{O}(x^3) \qquad \text{für} \qquad x \to 0.$$