

Fakultät für Physik und Astronomie

Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Diplomarbeit
im Studiengang Physik

vorgelegt von

Tobias Jenke
aus Berlin-Friedrichshain

2008

**Weiterentwicklung eines Experiments zur
Realisierung eines Quantum Bouncing Balls
und Suche nach Extradimensionen der
Raumzeit**

Die Diplomarbeit wurde von Tobias Jenke ausgeführt am
Physikalischen Institut
der Universität Heidelberg
unter der Betreuung von
Herrn Prof. Hartmut Abele

Weiterentwicklung eines Experiments zur Realisierung eines Quantum Bouncing Balls und Suche nach Extradimensionen der Raumzeit: Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurde ein Experiment weiterentwickelt, mit dem die Beziehung zwischen Gravitation und Quantenmechanik untersucht werden soll. Ziel des Experiments ist die erstmalige Realisierung eines *Quantum Bouncing Balls* mit ultrakalten Neutronen sowie der Test auf Nicht-Newtonsche Gravitation.

In den Berechnungen wurden mögliche Abweichungen vom bekannten Gravitationspotential als Yukawa-artige Fünfte Kraft parametrisiert. Das Experiment ist sensitiv auf Reichweiten von 10^{-7} bis $10^{-5} m$. In diesem Bereich werden Abweichungen vom Newtonschen Gravitationsgesetz von neuen Theorien vorhergesagt, die eventuell alle vier fundamentalen Wechselwirkungen vereinheitlicht beschreiben können[1]. Sowohl für die Realisierung des Quantum Bouncing Balls als auch für den Test des Newtonschen Gravitationsgesetzes wurden konkrete realisierbare Experimente vorgeschlagen, die ab Juli 2008 am Institut Laue-Langevin in Grenoble/ Frankreich durchgeführt werden.

Parallel wurde mit der Inbetriebnahme und Überarbeitung des bestehenden Versuchsaufbaus begonnen. Insbesondere wurde die Entwicklung eines ortsauffösenden Detektors für ultrakalte Neutronen mit Auflösungen im Mikrometerbereich vorangetrieben. Hierzu wurden zwei Prototypen eines Strahlfächers konstruiert, gebaut und am Institut Laue-Langevin getestet.

Enhancements of an experiment realizing a Quantum Bouncing Ball with ultracold neutrons and searching for non-Newtonian Gravity: Within this diploma thesis an experiment to determine the relation between gravity and quantum mechanics was further developed. The aim of this experiment is the first realization of a *Quantum Bouncing Ball* with ultracold neutrons and also to test non-Newtonian gravity.

Possible deviations from the inverse square law of gravity were parametrized as Yukawa-like fifth forces. The experiment is sensitive to ranges between 10^{-7} and $10^{-5} m$. In this range predictions for non-Newtonian gravity are made by new theories that eventually describe all four known basic interactions in a unified way[1]. For both the realization of the Quantum Bouncing Ball and the test for non-Newtonian gravity suggestions for feasible experiments were made. They will be carried out at the Institute Laue-Langevin in Grenoble/ France from July 2008 onwards.

Furthermore, the existing experimental setup began to be developed further and was put into operation. Particularly, advances were made in the development of a position-sensitive detector for ultracold neutrons with a spatial resolution of a few microns. Two prototypes were designed and tested at the Institut Laue-Langevin in Grenoble/ France.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	9
2	Ultrakalte Neutronen im Gravitationsfeld der Erde	13
2.1	Ultrakalte Neutronen	13
2.1.1	Eigenschaften	13
2.1.2	Erzeugung	17
2.2	UCNs in einem externen Gravitationsfeld	19
2.2.1	Klassische Betrachtung	19
2.2.2	Quantenmechanische Betrachtung	20
3	Studien zum Quantum Bouncing Ball	25
3.1	Realisierung eines Quantum Bouncing Balls mit ultrakalten Neutronen .	25
3.1.1	Versuchsaufbau	25
3.1.2	Bereich I: Präparation eines quantenmechanischen Zustands . . .	26
3.1.3	Übergang I/ II: Berechnung der Matrixübergangselemente an der Stufe	31
3.2	Die Klassische Erwartung	34
3.3	Quantenmechanische Phänomene - Oszillationen und Revival	36
3.4	Berechnung konkreter Experimente	39
3.4.1	Optimierung von l_1 und x_1	39
3.4.2	Versuch I: Quantum Bouncing Ball mit kleiner Stufe ($7 \mu m$) . . .	40
3.4.3	Versuch II: Quantum Bouncing Ball mit großer Stufe ($28 \mu m$) . .	44
4	Fünfte Kräfte und Extradimensionen der Raumzeit	47
4.1	Motivation	47
4.2	Störungstheorie	51
4.2.1	Das Störpotential H'	52
4.2.2	Berechnung und Diskussion der Energieeigenwerte	53
4.2.3	Bestimmung der gestörten Eigenzustände	56
4.3	Simulation konkreter Experimente	59
4.3.1	Versuch I: Transmissionsmessung	59
4.3.2	Versuch II: Ausnutzung verschiedener Plattenbeschichtungen . .	62
4.3.3	Versuch III: Quantum Bouncing Ball mit Fünften Kräften	67
4.4	Abschätzung der Sensitivität der vorgeschlagenen Experimente	70

5	Überblick über geplante Veränderungen am bestehenden Versuchsaufbau	73
5.1	Diskussion des bisherigen Setups	74
5.2	Geplante Veränderungen im Überblick	76
6	Optimierung der Realisierung einzelner Komponenten	79
6.1	Test eines ortsauflösenden Online-Detektors für UCNs	79
6.1.1	Bisherige Methode: CR39 + Mikroskop	81
6.1.2	Taper + CASCADE	83
6.2	Zuführung der ultrakalten Neutronen zum Experiment	92
7	Schlussbemerkungen	97
A	Technische Zeichnungen des Prototyps des Tapers	99
B	Literaturverzeichnis	101

Kapitel 1

Einleitung

Die Gravitation ist die fundamentale Wechselwirkung, deren Gesetzmäßigkeiten uns bereits seit dem 17. Jahrhundert geläufig sind – die Formulierung der Newtonschen Gesetze markierten den Beginn der modernen, empirischen Naturwissenschaften.

Das Gravitationsgesetz lässt sich sehr allgemein aus dem Gaußschen Satz in drei Dimensionen ableiten. Es ergibt sich, dass der Betrag der Kraft, mit der sich zwei Körper im Abstand r anziehen, proportional ist zu r^{-2} .

Das Newtonsche Gravitationsgesetz ist experimentell bestätigt in Größenordnungen von Millimetern bis zu kosmischen Längen von $10^{15} m$. Obwohl das Gesetz demnach die Natur auf 18 Größenordnungen richtig beschreiben kann, gibt es begründete Annahmen, dass Abweichungen von der $1/r^2$ -Abhängigkeit der Kraft auf kleineren Längenskalen zu erwarten sind.

Die Annahmen gründen darauf, dass wir heute davon ausgehen, dass unsere Welt einer Quantenwelt entspricht. Tatsächlich lassen sich die anderen drei uns bekannten Wechselwirkungen – die elektromagnetische, die schwache und die starke – als Quantentheorien verstehen. Lediglich die Beschreibung der Gravitation macht hier bisher eine Ausnahme. Die allgemeinste Formulierung, die Allgemeine Relativitätstheorie von A. Einstein, widersetzt sich seit einigen Jahrzehnten beharrlich der quantentheoretischen Betrachtungsweise.

Auf der Suche nach einer Theorie, die den Elektromagnetismus und die Gravitation gemeinsam beschreiben kann, stießen T. Kaluza und O. Klein darauf, dass eine solche Vereinheitlichung möglich ist, allerdings nur in mehr als drei Raumdimensionen. Heute gibt es eine Vielzahl an Anwärtern von Theorien, die sogar alle vier Wechselwirkungen beschreiben können, allen voran sind Stringtheorien zu nennen. Alle Theorien teilen allerdings die Eigenschaft, dass sie mehr als drei Raumdimensionen erfordern.

Damit stellt sich die Frage, wie die Einführung solcher Extradimensionen mit unserer täglichen Erfahrung übereinkommt, dass wir in einer dreidimensionalen Welt leben. Dies wird dadurch erklärt, dass es im Rahmen der vereinheitlichten Theorien vorstellbar ist, dass die Extradimensionen auf sehr kleine Zylinder oder Tori aufgerollt oder in anderen Worten *kompaktifiziert* sind. Sind die Kompaktifizierungsradien sehr klein gegenüber den Abständen in unserem täglichen Leben, so würden wir von den Extradimensionen nichts merken. Lange Zeit wurde die Größe der zusätzlichen Dimensionen mit der Planck-Länge $l_P \approx 10^{-33} cm$ verknüpft, was experimentelle Tests unmöglich erscheinen lässt. Dies änderte sich nach einer Veröffentlichung von N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos-

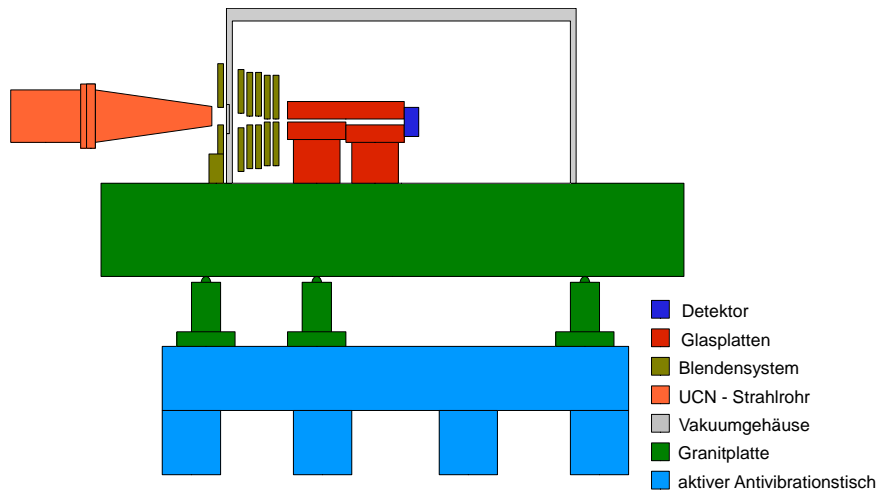


Abbildung 1.1: Schematischer Versuchsaufbau

los und G. Dvali [1], der einige weitere bahnbrechende Entwicklungen vorausgegangen waren [2, 3]. Extradimensionen mit Kompaktifizierungsradien im sub-mm-Bereich sind demnach denkbar. Auch die Dunkle Energie kann neuen Erkenntnissen von P. Calin und C. P. Burgess zufolge eventuell mit Hilfe von Abweichungen vom bekannten Gravitationsgesetz erklärt werden [4]. Mit diesen Ideen erhielten Tests des Newtonschen Gravitationsgesetzes auf kleinen Längenskalen eine neue Bedeutung.

In dieser Diplomarbeit geht es darum, ein solches Experiment weiterzuentwickeln. Mit diesem soll die Beziehung zwischen Quantenmechanik und Gravitation weiter erforscht werden, indem der Fall ultrakalter Neutronen im Gravitationsfeld der Erde untersucht wird. Mit diesem Experiment ist es möglich, gebundene Zustände der Neutronen zu beobachten. Die Energie des Grundzustands beträgt 1.4 peV . Die gebundenen Zustände sind sensitiv auf Abweichungen vom Newtonschen Gravitationsgesetz im Längenbereich zwischen 10^{-8} und 10^{-5} m .

Die Eigenschaften der für dieses Gravitationsexperiment hervorragend geeigneten ultrakalten Neutronen sowie ihre Erzeugung sind in Kapitel 2 beschrieben. Außerdem gibt das Kapitel einen Einblick in die quantenmechanische Beschreibung von Neutronen im Gravitationsfeld der Erde.

Einen Überblick über den Versuchsaufbau vermittelt Abbildung 1.1. Die Neutronen werden von links durch das Strahlrohr mit Hilfe eines Blendensystems in das Experiment geleitet. Sie werden dort in einem System bestehend aus einer sehr glatt polierten und einer aufgerauten Glasplatte in einen quantenmechanischen Zustand präpariert. Dieser fällt dann eine bestimmte Höhe im Bereich zwischen 5 und $50 \mu\text{m}$ auf eine zweite glatt polierte Glasplatte herunter. Im Anschluss an diese wird die Wahrscheinlichkeitsdichte des Neutrons in Abhängigkeit der Höhe bestimmt.

Kapitel 3 widmet sich der theoretischen Beschreibung dieses Systems, welches in der Literatur unter dem Namen *Quantum Bouncing Ball* oder *The Quantum Bouncer* zu

finden ist [5, 6]. Nach einer ausführlichen Diskussion der theoretischen Behandlung der einzelnen Komponenten des Setups werden Vorschläge für Versuche gemacht, um quantenmechanische Phänomene zu beobachten. Diesen Versuchen ist die nächste Experimentierzeit am Institut Laue-Langevin in Grenoble/ Frankreich im Juli 2008 gewidmet.

In Kapitel 4 wird auf die Sensitivität des Experiments auf Nicht-Newtonsche Gravitation näher eingegangen. Wie bereits dargelegt, ist eine experimentelle Abweichung vom Newtonschen Gravitationsgesetz ein Hinweis auf die Existenz zusätzlicher Dimensionen.

In der Annahme, dass sich das Nicht-Newtonsche Gravitationspotential als Yukawa-Term darstellen lässt, lautet das verallgemeinerte Gravitationspotential

$$V = -G \frac{m_n m_{Erde}}{r} \left(1 + \alpha \cdot e^{-r/\lambda} \right). \quad (1.1)$$

Dabei bezeichnet G die Gravitationskonstante, m_n die Masse des Neutrons und m_{Erde} die Masse der Erde. Die Stärke des zusätzlichen Potentialteils wird α genannt, seine Reichweite λ .

Das zusätzlich auftretende Yukawa-artige Potential wird in Kapitel 4 störungstheoretisch in die Rechnungen einbezogen. Die Parameter des Versuchsaufbaus werden optimiert, um die Sensitivität auf eine mögliche Nicht-Newtonsche Gravitation zu maximieren. Im letzten Teil des Kapitels werden drei verschiedene Vorschläge für konkrete Experimente gemacht, die in naher Zukunft am Institut Laue-Langevin mit unserem Versuchsaufbau durchgeführt werden sollen.

Nach dieser gründlichen theoretischen Analyse wird im zweiten Teil der Diplomarbeit auf die experimentelle Seite eingegangen. In Kapitel 5 wird der bestehende Versuchsaufbau näher erläutert. Es werden Änderungsvorschläge diskutiert. Alle beschriebenen Änderungen wurden bereits verwirklicht und befinden sich momentan in der Testphase oder werden zur Zeit durch die Konstruktionsabteilung sowie die mechanische Werkstatt und die Elektronikwerkstatt des Physikalischen Instituts realisiert.

Schließlich werden in Kapitel 6 die Ergebnisse zweier experimenteller Tests zur Verbesserung des Versuchsaufbaus vorgestellt. Dies betrifft zum einen das Detektorkonzept. Es wird die Konstruktion und der Test eines Prototyps vorgestellt, mit dessen Hilfe die Ortsauflösung eines herkömmlichen, für unser Experiment bisher nicht einsetzbaren Online-Detektors für ultrakalte Neutronen um zwei bis drei Größenordnungen verbessert werden kann. Die Tests wurden am Institut Laue-Langevin in Grenoble/ Frankreich durchgeführt.

Zum Zweiten wurde die Beeinflussung des Geschwindigkeitsspektrums der ultrakalten Neutronen durch die Biegung von Strahlrohren bestimmt. Ziel dieses Versuchs war es, herauszufinden, ob auf diesem Wege das Spektrum auf unser Experiment besser abgestimmt werden kann.

Kapitel 2

Ultrakalte Neutronen im Gravitationsfeld der Erde

Für Fallexperimente im Gravitationsfeld der Erde weisen ultrakalte Neutronen sehr günstige Eigenschaften auf. Dies soll im folgenden Abschnitt gezeigt werden.

2.1 Ultrakalte Neutronen

2.1.1 Eigenschaften

Ultrakalte Neutronen (engl.: ultracold neutrons, abgekürzt UCN) sind Neutronen, deren kinetische Energie so klein ist, dass sie beim Auftreffen auf viele Materialien unter beliebigen Einfallswinkeln total reflektiert werden. Die Geschwindigkeit, für die Neutronen ein solches Verhalten zeigen, liegt im Bereich einiger Meter pro Sekunde. In Abbildung 2.1 ist die Geschwindigkeit und die kinetische Energie der ultrakalten Neutronen in Abhängigkeit ihrer de Broglie - Wellenlänge aufgetragen.

Neutronen unterliegen allen vier fundamentalen Wechselwirkungen.

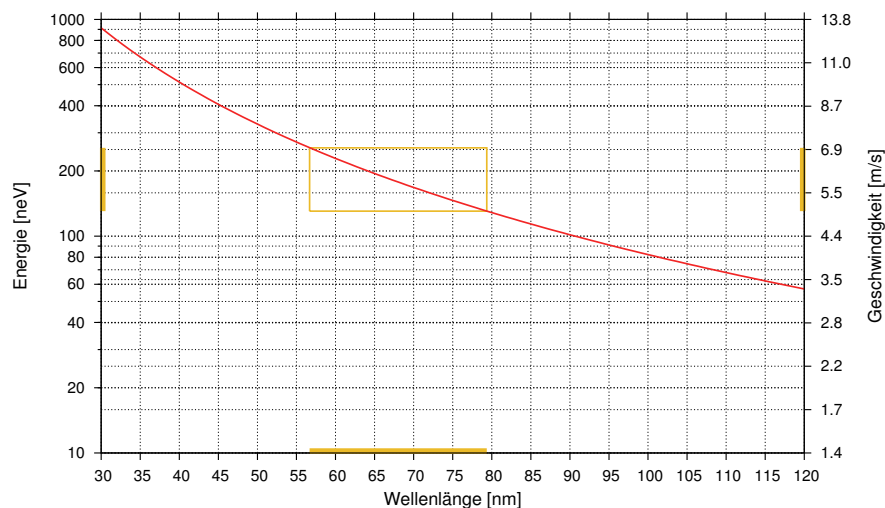


Abbildung 2.1: Geschwindigkeit und kinetische Energie von UCNs in Abhängigkeit der Wellenlänge. Der für unser Gravitationsexperiment relevante Bereich ist orange umrissen.

Elektromagnetische Wechselwirkung Neutronen sind Baryonen, sie besitzen demnach drei Valenzquarks: zwei down- und ein up-Quark. Demzufolge sind sie elektrisch neutrale Teilchen. Dies ist vorteilhaft für Gravitationsexperimente, in denen die relativ schwachen Effekte der Gravitation ansonsten durch die um 40 Größenordnungen stärkere elektrische Wechselwirkung überdeckt werden würden.

Trotzdem kann das Neutron aufgrund seines magnetischen Moments $\vec{\mu}_n$ magnetisch wechselwirken. Das Wechselwirkungspotential beträgt

$$V_{mag} = -\vec{\mu}_n \cdot \vec{B}. \quad (2.1)$$

Das magnetische Moment ist proportional zum Kernmagneton $\vec{\mu}_N$

$$\vec{\mu}_n = -1.913 \vec{\mu}_N, \quad (2.2)$$

welches definiert ist als

$$\vec{\mu}_N = \frac{e \hbar}{2m_p} = 3.152 \cdot 10^{-8} \frac{eV}{T}, \quad (2.3)$$

wobei m_p die Protonenmasse bezeichnet. Die potentielle Energie eines Neutrons in einem externen Magnetfeld beträgt demnach

$$V_{mag} \approx 60 \frac{neV}{T}. \quad (2.4)$$

Das bedeutet, dass der Versuchsaufbau vom $60 \mu T$ starken Magnetfeld der Erde abgeschirmt werden muss, weil die sich ergebende potentielle Energie von $3.6 peV$ im Energiebereich der gebundenen Zustände des Neutrons liegt.

Außerdem weisen Neutronen eine sehr kleine Polarisierbarkeit von $10^{-21} eV$ auf, die für unser Experiment keine Rolle spielt[7].

Schwache Wechselwirkung Freie Neutronen sind nicht stabil, sie zerfallen mit einer Lebensdauer von $885.7 s$ [8] in ein Proton, ein Elektron und ein Anti-Elektronneutrino:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (+782keV). \quad (2.5)$$

Aufgrund der Erhaltung der Baryonenzahl B und der Tatsache, dass das Neutron das zweitleichteste Baryon nach dem Proton ist, folgt, dass es keine weiteren Zerfallskanäle gibt.

Die Lebensdauer des Neutrons ist für unser Gravitationsexperiment nur insofern wichtig, als dass sie groß genug ist, damit die UCNs den Versuchsaufbau durchlaufen können.

Starke Wechselwirkung Die Wechselwirkung ultrakalter Neutronen mit Materie ist vor allem durch die starke elastische Streuung an den Atomkernen der Materie bestimmt. Das Potential eines Atomkerns lässt sich in guter Näherung durch einen sphärischen

Potentialtopf mit einem Radius in der Größenordnung $R \approx 1.3 fm \cdot A^{1/3}$ und einer Tiefe von $V_0 \approx 40 MeV$ beschreiben. A bezeichnet hierbei die Massenzahl des Atomkerns.

$$V_{Nukleus} = \begin{cases} -V_0 & r \leq R \\ 0 & r > R. \end{cases} \quad (2.6)$$

Ein Neutron lässt sich während eines Streuprozesses an Materie beschreiben durch eine Wellenfunktion in der Form

$$\psi = e^{i\vec{k}\vec{r}} + f(\Theta) \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{r}, \quad (2.7)$$

wobei der erste Summand eine einlaufende ebene Welle darstellt und der zweite Summand eine auslaufende Kugelwelle. Der Faktor $f(\Theta)$ heißt Streuamplitude und hat die Dimension einer Länge. Die Streuamplitude ist abhängig vom Streuwinkel Θ . In ihr stecken die Informationen über das Streupotential.

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ergibt sich zu

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\Theta)|^2. \quad (2.8)$$

Da die de Broglie - Wellenlänge ultrakalter Neutronen sehr viel größer ist als die Reichweite des Kernpotentials, tritt nur s-Wellenstreuung auf. Die Streuamplitude ist daher unabhängig vom Streuwinkel Θ und beträgt

$$f(\Theta) = -a, \quad (2.9)$$

wobei a die Streulänge bezeichnet. Damit ergibt sich der totale Wirkungsquerschnitt zu $\sigma_{total} = 4\pi a^2$.

Es stellt sich die Frage, wie die Streulänge a mit dem Streupotential $V_{Nukleus}$ verbunden werden kann. Da die Potentialtopftiefe V_0 deutlich größer ist als die Energie der ultrakalten Neutronen, scheidet ein störungstheoretischer Ansatz aus. Allerdings ist die Reichweite R des Potentials sehr klein gegenüber den Abständen, für die wir uns für die Wellenfunktion interessieren. Daher kann das Potential des Nukleus ersetzt werden durch das Fermipotential

$$V_{Fermi} = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \delta^3(\vec{r}). \quad (2.10)$$

Für einen Festkörper mit den Atomkernen an den Orten \vec{r}_i gilt dementsprechend

$$V_{Fermi} = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \sum_i a_i \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_i). \quad (2.11)$$

Die Streuung eines ultrakalten Neutrons an einem Festkörper entspricht der Streuung an sehr vielen Nuklei gleichzeitig, da die de Broglie - Wellenlänge λ einige Größenordnungen größer ist als die Distanz zwischen den Nuklei. Somit ist es möglich, ein effektives Potential einzuführen, welches sich wie folgt darstellt:

$$V_{eff} = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \bar{a}n. \quad (2.12)$$

Dabei ist \bar{a} die mittlere Streulänge und n die Teilchenzahldichte. Tabelle 2.1 gibt Aufschluss über die effektiven Fermipotentiale einiger im Experiment verwendeter Materialien.

Material	Realteil des Fermipotentials [neV]	Grenzgeschwindigkeit [m/s]
Al	54.2	3.2
^{58}Ni	335	8.0
BK7-Glas	100	4.4

Tabelle 2.1: Fermipotential und Grenzgeschwindigkeit verwendeter Materialien

Ist das Fermipotential größer als die Energie des Neutrons, so wird es unter allen Einfallswinkeln total reflektiert. Man kann daher aus dem Fermipotential eine Grenzgeschwindigkeit v_G berechnen, unter der ein UCN dieses Verhalten zeigt:

$$V_{eff} = E_{kin,max} \quad \Rightarrow \quad v_G = \sqrt{\frac{2V_{eff}}{m}}. \quad (2.13)$$

In Tabelle 2.1 sind die Grenzgeschwindigkeiten einiger Materialien exemplarisch angegeben. Wichtig ist die Grenzgeschwindigkeit von BK7-Glas. Aus diesem Material bestehen die Platten, auf denen die ultrakalten Neutronen reflektieren sollen. Mit 4.4 m/s ist die Grenzgeschwindigkeit deutlich höher als die klassische Geschwindigkeit der Neutronen in z-Richtung, die im Bereich einiger cm/s liegt.

Außerdem bestimmt die Größe des Fermipotentials die Eindringtiefe der Wellenfunktion in das Material. Sie kann aus der zeitunabhängigen Schrödingergleichung

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{eff} \right) \psi = E\psi \quad (2.14)$$

berechnet werden. Die Gleichung wird gelöst durch

$$\psi = \text{const.} \cdot e^{\vec{\kappa} \cdot \vec{r}}, \quad (2.15)$$

wobei $|\vec{\kappa}|^{-1}$ der Eindringtiefe entspricht:

$$|\vec{\kappa}|^{-1} = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{(V_{eff} - E)}}. \quad (2.16)$$

Die Eindringtiefe eines Neutrons mit einer kinetischen Energie $E \ll V_{eff}$ in ein BK7-Glas entspricht demnach ungefähr 140 \AA .

Gravitative Wechselwirkung Die Masse des Neutrons beträgt $m_n = 939.6 \text{ MeV}/c^2$. Die potentielle Energie eines Neutrons im Gravitationsfeld der Erde ergibt demnach

$$V(z) = mgz \approx 100 \frac{\text{neV}}{m} \cdot z [\text{m}]. \quad (2.17)$$

Für ein ultrakaltes Neutron liegt diese Energie im Bereich seiner kinetischen Energie.

Aufgrund dieser Eigenschaften eignen sich ultrakalte Neutronen hervorragend für Gravitationsexperimente. Schirmt man das Experiment gegen Magnetfelder hinreichend gut ab, so ist bei Abständen größer als Atomradien die Gravitation die stärkste Wechselwirkung.

2.1.2 Erzeugung

Um Experimente mit freien Neutronen durchführen zu können, ist man auf eine Neutronenquelle wie einen Forschungsreaktor oder eine Spallationsquelle angewiesen.

Spallationsquellen Beschießt man schwere, neutronenreiche Atomkerne wie zum Beispiel Uran oder Blei mit hochenergetischen Elektronen oder Protonen aus einem Beschleuniger, so werden die Bestandteile der Kerne, Protonen und Neutronen, in sehr hohe Kernzustände angeregt. Allerdings werden die Neutronen höher angeregt, da sie sich aufgrund ihrer Überzahl von vornherein auf höheren Zuständen befinden. Es kommt in der Folge zur Abdampfung einer großen Zahl an Neutronen. Der entstehende Restkern hat nun einen Protonenüberschuss und zerfällt demzufolge radioaktiv. Möglich sind hier β^+ -Zerfall oder Elektroneneinfang.

UCN-Gewinnung an Forschungsreaktoren Die leistungsfähigste UCN-Quelle befindet sich momentan am Institut Laue-Langevin in Grenoble/ Frankreich. Es handelt sich hierbei um einen Forschungsreaktor, einen schematischen Querschnitt zeigt Abbildung 2.2.

Im Reaktorkern des Reaktors wird in einem Reaktorzyklus von ca. 50 Tagen das Brennelement abgebrannt. Dabei entstehen hochenergetische Neutronen mit einer Energie im Bereich mehrerer MeV . Um den Reaktorkern befindet sich schweres Wasser mit einer Temperatur von rund 300 K , welches als Moderator dient. Die hochenergetischen Neutronen stoßen inelastisch an den Molekülen des Moderators und geben bei jedem Stoß Energie ab. Schon nach einer geringen Anzahl von Stößen befinden sich die Neutronen im thermischen Gleichgewicht mit dem schweren Wasser, d.h. die Geschwindigkeitsverteilung der Neutronen folgt einer Maxwell-Boltzmann-Verteilung mit einer Temperatur von 300 K .

Ein Teil der thermischen Neutronen durchsetzt eine kalte Quelle. In ihr befindet sich flüssiges Deuterium mit einer Temperatur von rund 25 K . Somit können die Neutronen nochmals abgekühlt werden. Das größte Problem besteht jetzt darin, die langsamsten Neutronen aus der entstehenden Geschwindigkeitsverteilung zu extrahieren. Aus Sicherheitsgründen befinden sich nämlich dicke Schutzschichten von Material zwischen der kalten Quelle und den Neutronenleitern, die zu den Experimenten führen. Die ultrakalten Neutronen werden hier reflektiert und verbleiben in der kalten Quelle.

Deswegen bedient man sich eines Tricks:

Die sehr kalten Neutronen (engl.: Very Cold Neutrons, VCN) können die Schutzschicht sehr wohl durchdringen. In einem senkrechten, leicht gebogenem Neutronenleiter werden sie 13 m in die Höhe transportiert und gewinnen dabei eine potentielle Energie von $1.3\text{ }\mu\text{eV}$, wodurch sich das Geschwindigkeitsspektrum nach unten verschiebt. Durch die Biegung des Steigrohrs überschreiten zu schnelle Neutronen den Grenzwinkel und werden vom Neutronenleiter absorbiert.

Ein Teil der oben ankommenden Neutronen wird nach dem Steigrohr in die sogenannte UCN-Turbine geleitet. Die UCN-Turbine besteht aus 690 reflektierenden gekrümmten Schaufeln aus dünnen Nickelschalen. Das Rad mit einem Durchmesser von 1.70 m dreht sich mit einer Geschwindigkeit von 230 Umdrehungen pro Minute in Richtung der einlaufenden Neutronen. Dies entspricht einer Bahngeschwindigkeit von 25 m/s , der Hälfte

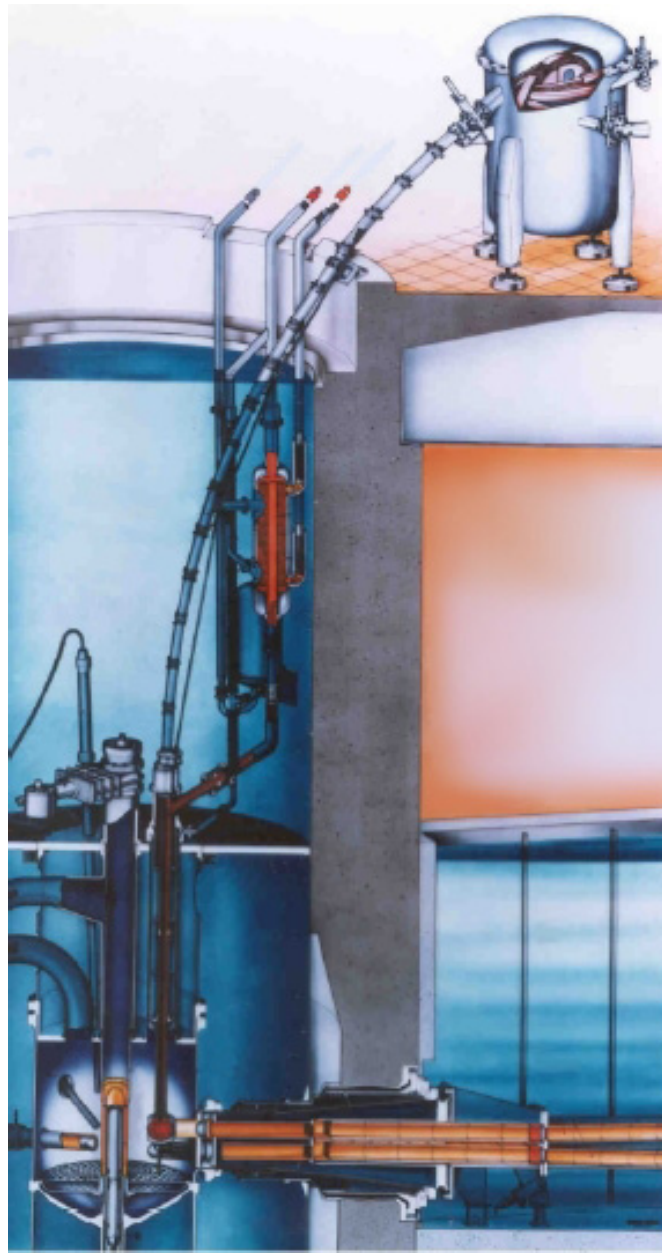


Abbildung 2.2: Schema des Reaktors am Institut Laue - Langevin in Grenoble

der mittleren Geschwindigkeit der Neutronen. Die Neutronen werden so auf die Turbine gerichtet, dass sie von dieser total reflektiert werden. Ist die Bahngeschwindigkeit der Turbine genau halb so groß wie die Geschwindigkeit eines eintreffenden Neutrons, so ist seine Geschwindigkeit nach dem Stoß rund 0. Eine Geschwindigkeitsverteilung der Neutronen entsteht durch die Verteilung der Eintrittsgeschwindigkeiten und die Verteilung der Eintreffwinkel. Zwischen dem Turbinentank und den Experimenten befindet sich ein Aluminiumfenster, das dazu führt, dass Neutronen mit einer Geschwindigkeit unterhalb

der kritischen Geschwindigkeit von Aluminium, $v_{krit} = 3.2 \text{ m/s}$, nicht im Experiment zu finden sind. Aufgrund der geringen Reichweite von langsamen Neutronen in Luft ist der Turbinentank evakuiert, das Vakuum beträgt 10^{-5} mbar . Am Turbinentank befinden sich Shutter, mit denen die ultrakalten Neutronen zu einem von vier Experimenten geleitet werden können. Zusätzlich gibt es einen intensitätsschwächeren Experimentierplatz, den sogenannten TEST-Strahl, an dem die Neutronen im Mittel etwas schneller sind.

Das Geschwindigkeitsspektrum der Neutronen am TEST-Strahl wurde im Rahmen dieser Diplomarbeit experimentell bestimmt, die Messung und ihre Ergebnisse sind in Abschnitt 6.2 beschrieben.

2.2 UCNs in einem externen Gravitationsfeld

Das Gravitationspotential der Erde ist gegeben durch

$$V_{grav} = -\frac{GM}{r}. \quad (2.18)$$

Dabei bezeichnet G die Gravitationskonstante, M die Masse der Erde und r den Abstand vom Erdmittelpunkt. Die Potentialdifferenz zwischen der Erdoberfläche R_E und der Höhe z eines Neutrons über der Erdoberfläche beträgt somit

$$\Delta V_{grav} = -GM \left(\frac{1}{R_E + z} - \frac{1}{R_E} \right). \quad (2.19)$$

In unserem Experiment ist die Fallhöhe z viele Größenordnungen kleiner als der Erdradius. Eine Taylorentwicklung ergibt

$$\Delta V_{grav} = -GM \left(\frac{1}{R_E + z} - \frac{1}{R_E} \right) \quad (2.20)$$

$$= -\frac{GM}{R_E} \left(\frac{R_E}{R_E + z} - 1 \right) \quad (2.21)$$

$$\approx \frac{GM}{R_E^2} \cdot z + \mathcal{O}(z^3). \quad (2.22)$$

Durch eine Substitution der vorstehenden Konstanten durch die Erdbeschleunigung g ergibt sich in erster Näherung das bekannte lineare Potential. Die potentielle Energie eines Neutrons im Schwerfeld der Erde ergibt sich in erster Näherung zu $E_{pot} = mgz$.

2.2.1 Klassische Betrachtung

Wir betrachten nun ein Neutron als Partikelchen, das sich in x -Richtung mit einer konstanten Geschwindigkeit v_x über eine horizontale Glasplatte bewegt. Zum Zeitpunkt t_0 befinde sich das Teilchen in einer Höhe z_0 über der Platte und habe eine Geschwindigkeit in z -Richtung von v_{0z} . Das Teilchen wird von der Glasplatte unter allen Einfallswinkeln total reflektiert, es führt also Hüpfbewegungen auf der Glasplatte aus.

Im höchsten Punkt hat das Teilchen unter diesen Anfangsbedingungen eine potentielle Energie von

$$E_{ges} = \frac{m}{2}v_{0z}^2 + mgz_0, \quad (2.23)$$

es kann daher eine maximale Höhe von

$$h_{max} = z_0 + \frac{v_{0z}^2}{2g} \quad (2.24)$$

erreichen. Die doppelte Fallzeit aus dieser Höhe entspricht der Periodendauer der Hüpfbewegung und ergibt sich zu

$$T = 2\sqrt{\frac{2h_{max}}{g}}. \quad (2.25)$$

Innerhalb dieser Zeit hat sich das Teilchen um $x = v_x T$ in x-Richtung bewegt. Typische Größen des Experiments sind x-Geschwindigkeitskomponenten von $5 - 7 \text{ m/s}$ und maximale Steighöhen von $50 \text{ }\mu\text{m}$. Das entspricht also Periodendauern von ca. 6 ms bzw. in Längen in x ausgedrückt $3 - 4.5 \text{ cm}$.

2.2.2 Quantenmechanische Betrachtung

Wir betrachten nun den freien Fall eines ultrakalten Neutrons im Gravitationsfeld der Erde aus quantenmechanischer Sicht. Das Problem lässt sich nicht-relativistisch behandeln, somit läuft es auf die Lösung der Schrödingergleichung

$$H(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) \quad (2.26)$$

hinaus. Der Hamiltonoperator $H(\vec{r}, t)$ ergibt bei Einsetzen des Gravitationspotentials

$$H(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{grav} \quad (2.27)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - GM \left(\frac{1}{R_E + z} - \frac{1}{R_E} \right) \quad (2.28)$$

$$\approx -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + mgz \quad (2.29)$$

und ist nicht explizit zeitabhängig.

Die zu lösende Schrödingergleichung sieht also folgendermaßen aus:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + mgz \right) \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t). \quad (2.30)$$

Da der Hamiltonoperator nicht explizit zeitabhängig ist, lassen sich orts- und zeitabhängiger Teil der Wellenfunktion separieren. Weiterhin gibt es weder im Laplace-Operator noch im Gravitationspotential Mischterme zwischen verschiedenen Koordinaten, deswegen können auch die einzelnen Koordinaten voneinander separiert werden. Der vollständige Separationsansatz lautet demnach

$$\Psi(\vec{r}, t) = \chi_x(x) \cdot \chi_y(y) \cdot \varphi(z) \cdot \xi(t). \quad (2.31)$$

und führt zu einer Aufspaltung der Schrödingergleichung in vier simultan zu lösende Gleichungen

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \chi_x(x) = E_x \chi_x(x) \quad (2.32)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \chi_y(y) = E_y \chi_y(y) \quad (2.33)$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + mgz \right) \varphi(z) = E_z \varphi(z) \quad (2.34)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \xi(t) = (E_x + E_y + E_z) \xi(t). \quad (2.35)$$

Gleichungen (2.32) und (2.33) werden gelöst durch einen Ansatz mit ebenen Wellen. Bis auf beliebige Konstanten $const_1$ und $const_2$ ergibt sich:

$$\chi_x(x) = const_1 \cdot e^{\pm ik_x x} \quad \text{mit} \quad E_x = \frac{\hbar^2}{2m} k_x^2 \quad (2.36)$$

$$\chi_y(y) = const_2 \cdot e^{\pm ik_y y} \quad \text{mit} \quad E_y = \frac{\hbar^2}{2m} k_y^2. \quad (2.37)$$

Ein ähnlicher Ansatz der Form

$$\xi(t) = const_3 \cdot e^{-i \frac{(E_x + E_y + E_z)}{\hbar} t} = const_3 \cdot e^{-i \frac{E_x}{\hbar} t} e^{-i \frac{E_y}{\hbar} t} e^{-i \frac{E_z}{\hbar} t} \quad (2.38)$$

löst die zeitabhängige Gleichung (2.35). $const_3$ ist wiederum eine beliebige Konstante.

Im Folgenden geht es darum, eine Lösung für Gleichung (3.38) zu finden. Es ist vorteilhaft, mit dimensionslosen Variablen zu rechnen. Die Differentialgleichung hat dann ihre einfachste Gestalt. Die Einführung der Skalierungsfaktoren

$$z_0 = \sqrt[3]{\frac{\hbar^2}{2m^2 g}} \quad (2.39)$$

$$E_0 = \frac{1}{mgz_0} \quad (2.40)$$

sowie die Substitution

$$\tilde{z} = \frac{z}{z_0} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{E} = \frac{E}{E_0} \quad (2.41)$$

überführt Gleichung (3.38) in die dimensionslose Form

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2} + (\tilde{z} - \tilde{E}) \right) \tilde{\varphi}(\tilde{z}) = 0. \quad (2.42)$$

Aus der Lösung der zeitabhängigen Gleichung (2.38) lässt sich außerdem ein Skalierungsfaktor für die Zeit ableiten, um auch die Zeitkoordinate dimensionslos zu machen: Das Argument der Exponentialfunktion muss dimensionslos sein. Verwendet man statt E die dimensionslose Größe \tilde{E} , so kann man dies durch die Einführung einer Skalierungskonstante für die Zeit wieder ausgleichen:

$$e^{-i \frac{E}{\hbar} t} = e^{-i \frac{E}{\hbar} \frac{E_0 t_0}{E_0} t} = e^{-i \frac{E}{E_0} \frac{E_0 t_0}{\hbar} \frac{t}{t_0}}. \quad (2.43)$$

Somit ergibt sich die Substitution

$$\tilde{t} = \frac{t}{t_0} \quad \text{mit} \quad t_0 = \frac{\hbar}{E_0}. \quad (2.44)$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird von nun an die Tilde über den Variablen weggelassen, in den Rechnungen wird, insofern nicht anders angegeben, immer mit dimensionslosen Variablen gearbeitet. Die Angabe der physikalischen Größen und Ergebnisse erfolgt in den physikalisch sinnvollen Einheiten.

Die dimensionslose Gleichung (2.42) wird durch die Airy-Funktionen gelöst. Der allgemeinste Ansatz setzt sich aus der Linearkombination der beiden linear unabhängigen Airy-Funktionen $Ai(z)$ und $Bi(z)$ zusammen:

$$\varphi(z) = c_1 Ai(z - E) + c_2 Bi(z - E). \quad (2.45)$$

Die beiden Konstanten c_1 und c_2 ergeben sich durch die jeweiligen Anfangsbedingungen, die durch den Aufbau des Experiments gegeben sind, sowie die richtige Norm der Lösung. Das Integral des Betragsquadrats der Lösung über den gesamten Raum sollte eins betragen.

$$\int dz \varphi(z)^* \cdot \varphi(z) = 1. \quad (2.46)$$

Dies ist gleichbedeutend damit, dass die Gesamtwahrscheinlichkeit, das ultrakalte Neutron zwischen $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow \infty$ zu finden, gleich 1 ist. Außerdem besteht noch die Freiheit der Wahl einer globalen Phase $e^{-i\phi}$, da nicht die Wellenfunktion selbst, sondern nur das Betragsquadrat gemessen werden kann.

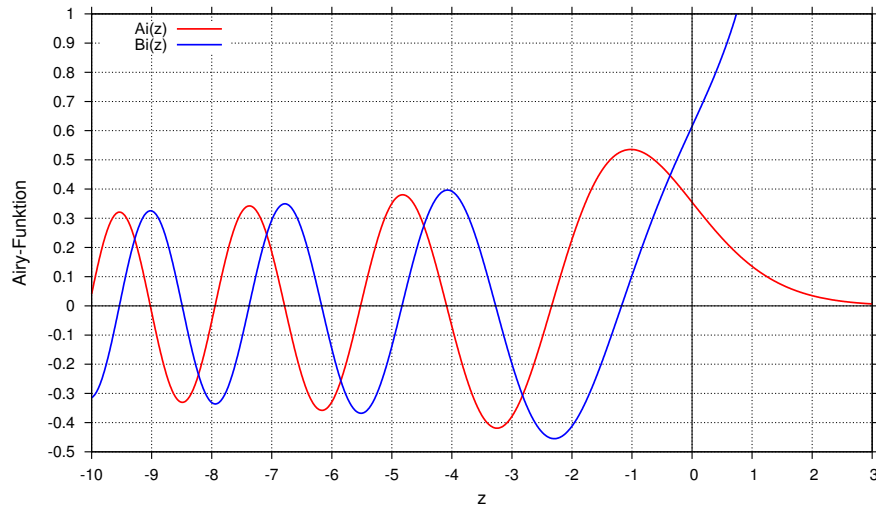
Die beiden unabhängigen Lösungen, die Airy-Funktionen $Ai(z)$, sind in Abbildung 2.3 gezeigt. Für negative Werte von z oszillieren beide Funktionen ähnlich der Sinusfunktion. Für $z \rightarrow +\infty$ fällt die Funktion $Ai(z)$ exponentiell auf 0 ab, während $Bi(z)$ exponentiell ansteigt.

Freier Fall ultrakalter Neutronen Im einfachsten möglichen Experiment fallen die Neutronen auf eine horizontale Platte bei $z = 0$. Die Skalierungsfaktoren z_0 , E_0 und t_0 geben die typischen Größenordnungen der Länge, Energie und Zeit an, in dem sich ein solches Experiment abspielt:

$$z_0 \approx 5.87 \mu m ; \quad E_0 \approx 0.60 \text{ peV} ; \quad t_0 \approx 1.10 \text{ ms}. \quad (2.47)$$

Ist die Fallhöhe gering genug, so ist die Energie des ultrakalten Neutrons sehr viel kleiner als das Fermipotential der Platte. In unserem Experiment verwenden wir Borsilikatglas mit einem Fermipotential von rund 100 neV . Eine typische Fallhöhe liegt im Bereich einiger Mikrometer, das entspricht einer Energie von rund einem Pico-Elektronenvolt. Die Energie ist also fünf Größenordnungen kleiner als die Fermienergie. Damit kann das Potential für negative z -Werte in guter Näherung auf

$$V = \begin{cases} \infty & z \leq 0 \\ mgz & z > 0 \end{cases} \quad (2.48)$$


 Abbildung 2.3: Die beiden Airy-Funktionen $Ai(z)$ und $Bi(z)$

gesetzt werden, womit die Wellenfunktion für $z < 0$ verschwindet. Es ergeben sich folgende Randbedingungen:

- Für $z = 0$ muss die Wellenfunktion eine Nullstelle besitzen.
- Die Wellenfunktion muss quadratintegrabel sein. Aufgrund des asymptotischen Verhaltens von $Bi(z)$ muss der Koeffizient c_2 verschwinden.

Nach Einsetzen der Randbedingungen in die allgemeine Lösung (2.45) ergibt sich die Quantisierungsbedingung

$$Ai(E) = 0. \quad (2.49)$$

Dies bedeutet also, dass nur bestimmte $E \in \{E_n\}$ erlaubt sind, wobei n eine natürliche Zahl ist. Die erlaubten E_n entsprechen den Energieeigenwerten. Sie müssen numerisch bestimmt werden, da die Airy-Funktion transzendent ist. Man kann die Eigenwerte auch mit der Wentzel-Kramers-Brillouin-Methode (WKB) bestimmen, einer Näherung,

n	E_n [peV]	z_n [μm]
1	1.41	13.75
2	2.46	24.04
3	3.32	32.47
4	4.09	39.92
5	4.78	46.73

Tabelle 2.2: Energien der ersten fünf Eigenzustände in peV bzw. in μm über die Umrechnung $E_n = mgz_n$.

die recht gute Ergebnisse liefert. Es ergibt sich

$$E_n = \left(\frac{3\pi}{2} \left(n - \frac{1}{4} \right) \right)^{2/3}. \quad (2.50)$$

Auf diese Näherung soll hier jedoch nicht weiter eingegangen werden. Eine genaue Beschreibung findet sich aber zum Beispiel in [9].

Tabelle 2.2 gibt die exakten Energieeigenwerte der ersten fünf Eigenfunktionen in Einheiten von peV und als Höhen an.

Damit ist das System vollständig gelöst, es ergibt sich als Wellenfunktion

$$\varphi_n(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ N_n \cdot Ai(z - E_n) & z \geq 0 \end{cases}. \quad (2.51)$$

Der Faktor N_n wird numerisch so bestimmt, dass das Betragsquadrat der Wellenfunktion auf eins normiert ist. Abbildung 2.4 zeigt die Wahrscheinlichkeitsdichten der ersten fünf Eigenzustände. Die vertikale Verschiebung der Zustände entspricht den Energien der Eigenzustände. Die lineare Funktion zeigt dazu das Gravitationspotential $V_{grav} = mgz$.

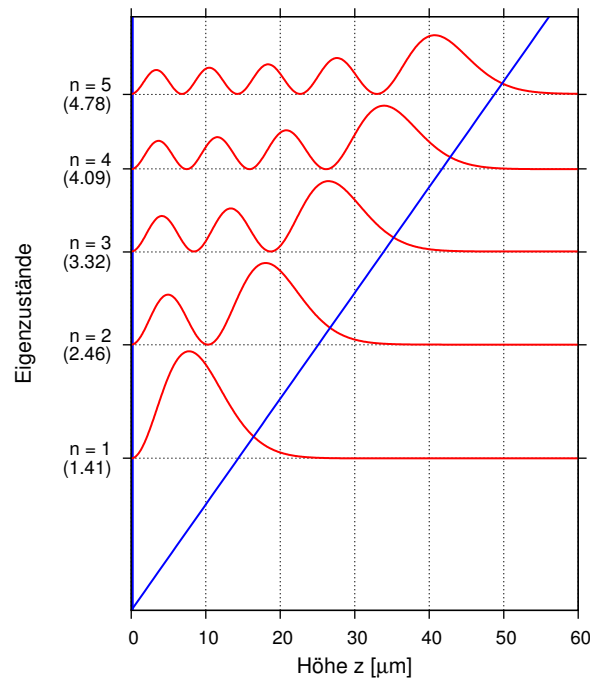


Abbildung 2.4: Dargestellt sind die Wahrscheinlichkeitsdichten der ersten fünf Eigenzustände. Die vertikale Verschiebung entspricht den Energieeigenwerten in peV , die auch in Klammern angegeben sind. Die Gerade zeigt das Gravitationspotential $V_{grav} = mgz$.

Kapitel 3

Studien zum Quantum Bouncing Ball

Die Lösung der Schrödingergleichung für ein Teilchen, welches unter dem Einfluss der Gravitation auf einer perfekt reflektierenden Oberfläche hüpfte, wird in der Literatur häufig als „Quantum Bouncing Ball“ bezeichnet. Anhand dieses Systems lassen sich sehr gut die Unterschiede zwischen klassischer Physik und Quantenmechanik studieren, was zum Beispiel in [5] und [6] diskutiert wird.

Es ist auch möglich, mit einer Realisierung des Quantum Bouncing Balls neue, bisher experimentell unbestätigte Theorien der Physik wie zum Beispiel Stringtheorien zu testen. Die Simulation eines solchen Tests wird in Kapitel 4 behandelt.

Aufgrund ihrer in 2.1.1 beschriebenen Eigenschaften eignen sich ultrakalte Neutronen hervorragend für die experimentelle Realisierung eines solchen Systems. Die grundlegenden Rechnungen wurden bereits in 2.2.2 ab Seite 20 vorgeführt. Im Folgenden wird es darum gehen, das quantenmechanische System unter Einbeziehung des konkreten Versuchsaufbaus analytisch zu berechnen und mit der klassischen Erwartung zu vergleichen. Mit diesen Ergebnissen sollen dann freie Parameter des Experiments optimiert werden.

3.1 Realisierung eines Quantum Bouncing Balls mit ultrakalten Neutronen

3.1.1 Versuchsaufbau

Das Herzstück des Experiments besteht im Wesentlichen aus drei Glasplatten und einem Detektor, die wie in Figur 3.1 angeordnet sind. Die Glasplatten 2 und 3 weisen eine Rauheit von unter 2 nm und eine Parallelität von unter $0.8\ \mu\text{m}$ auf. Ultrakalte Neutronen werden auf ihnen ideal reflektiert.

Die Glasplatte Nummer 1, der sogenannte „Absorber“, wurde dagegen aufgeraut. Die Unterfläche besitzt eine Rauheit von $0.75\ \mu\text{m}$. In einer halbklassischen Vorstellung wird das Neutron in eine zufällige Richtung gestreut, wenn es gegen einen „Zacken“ der rauen Oberfläche stößt. Gelangt es dadurch auf den Detektor, der in Figur 3.1 die Nummer 4 trägt, so trägt es zum Untergrund bei. Das ist jedoch relativ unwahrscheinlich, da der Abstand zwischen den Glasplatten 1 und 2, l_1 , nur wenige Mikrometer beträgt. Eine quantenmechanische Beschreibung des Absorbers wurde von Alexander Westphal et al. entwickelt [10]. Sie wird im nächsten Abschnitt vorgestellt.

Die Länge von Glasplatte 2 wird mit x_1 bezeichnet, die Länge von Platte 3 mit x_2 . Die beiden Platten sind vertikal um einige Mikrometer versetzt, der Abstand beträgt l_2 . Die Höhe der Oberkante von Glasplatte 2 wird mit h bezeichnet.

In den folgenden Rechnungen wird das Koordinatensystem so definiert, dass die hori-

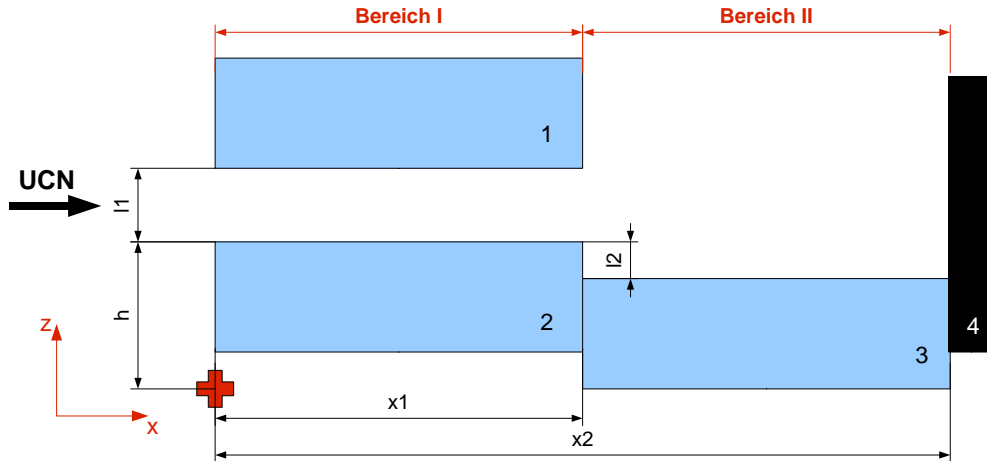


Abbildung 3.1: Schematischer Versuchsaufbau

zontale Achse die x-Achse und die vertikale Achse die z-Achse bezeichnet. Der Koordinatenursprung ist im Bild mit einem roten Kreuz gekennzeichnet.

Die ultrakalten Neutronen werden von links in das Absorber - Glasplatte 2 - System, den sogenannten Bereich 1, geleitet. Nehmen wir an, ein Neutron trete bei $x = 0$ in einer Höhe $z = z_0$ mit der z-Geschwindigkeit v_{0z} in das System ein. Ist die z-Geschwindigkeit der Neutronen jedoch so groß, dass

$$mg(z_0 - h) + \frac{m}{2}v_{0z}^2 > mgl_1 \quad (3.1)$$

ist, so wird es aus dem Experiment herausgestreut. Zusätzlich wird x_1 so groß gewählt, dass alle Neutronen mehrfach auf Glasplatte 2 hüpfen müssen und nicht direkt auf den Detektor gelangen können.

Die Neutronen hüpfen danach die Stufe zwischen Bereich I und II hinunter und werden am Ende von Glasplatte 3 mit sehr guter Ortsauflösung detektiert. Auf den Detektor wird in 6.1 eingegangen.

3.1.2 Bereich I: Präparation eines quantenmechanischen Zustands

Setup und Potential Die Anordnung von Absorber und Glasplatte 2 in Bereich I haben die Aufgabe, einen quantenmechanischen Zustand zu präparieren. Figur 3.2 zeigt das zu Bereich I zugehörige Potential.

Außerhalb des Schlitzes zwischen den beiden Glasplatten kann das Potential in sehr guter Näherung auf unendlich gesetzt werden, da es fünf Größenordnungen größer ist als die Energie der quantenmechanischen Zustände (siehe 2.1.1).

In die Rechnung gehen folgende Parameter ein:

- die Plattenlänge x_1 , typischerweise einige cm groß
- die Schlitzbreite l_1 , die ungefähr im Bereich von $10^{-5}m$ liegen wird
- die Rauheit des Absorbers σ , die im letzten Experiment $0.75 \mu m$ betrug.

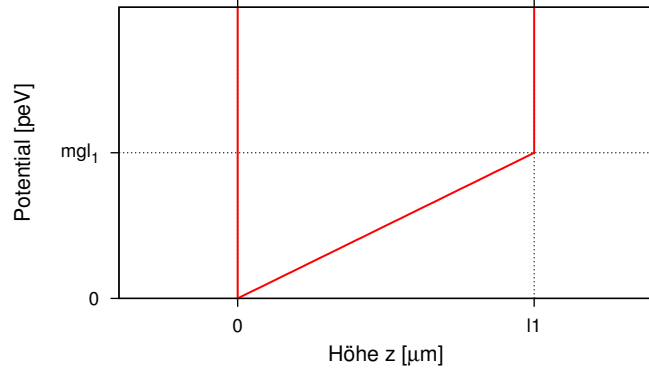


Abbildung 3.2: Das Potential in Bereich I

Der Parameter h verschiebt die gesamte Lösung in z , um später den Übergang in Bereich 2 problemlos einbeziehen zu können.

Berechnung der Energieeigenwerte Die Lösung des Systems wurde im Wesentlichen bereits in 2.2.2 vorgeführt, die Berechnungen bis Gleichung (2.46) bleiben gültig. Die Berechnung der Energieeigenwerte folgt der Argumentation in [11].

Die allgemeine Lösung stellt sich demnach dar als

$$\varphi^I(z) = \begin{cases} 0 & z < h \\ N(c_1 Ai((z-h) - E) + c_2 Bi((z-h) - E)) & z \geq 0 \wedge z \leq l_1 \\ 0 & z > h + l_1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Allerdings ergeben sich jetzt zwei Randbedingungen, nämlich dass die Wellenfunktion für $z = h$ und $z = h + l_1$ verschwinden muss. Eingesetzt in (3.2) ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} Ai(-E) & Bi(-E) \\ Ai(l_1 - E) & Bi(l_1 - E) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \vec{0}. \quad (3.3)$$

Für nicht verschwindende Koeffizienten c_1 und c_2 wird Gleichung (3.3) gelöst, wenn die Determinante der 2×2 -Matrix verschwindet. Somit ergibt sich als Randbedingung für erlaubte Energiewerte E in Abhängigkeit der Schlitzbreite l_1

$$Ai(E)Bi(l_1 - E) - Ai(l_1 - E)Bi(-E) \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.4)$$

Diese Gleichung lässt sich leider nicht analytisch nach E auflösen. Es ist aber relativ einfach möglich, die Gleichung numerisch für feste l_1 zu lösen. Abbildung 3.3 zeigt die Lösung der Gleichung für die ersten zehn Eigenzustände in Abhängigkeit der Schlitzbreite l_1 . Für genügend große l_1 gehen die Energieeigenwerte in die in 2.2.2 berechneten über, da dann die Zustände nicht mehr durch die obere Glasplatte gestört werden, weil die Wellenfunktion sowieso schon nahezu auf null abgefallen ist (vergleiche auch Abb. 2.4). Für kleine l_1 zeigen die Energieeigenwerte ein exponentiell steigendes Verhalten. Da die obere Glasplatte zudem die Eigenschaft besitzt, Neutronen mit zu großer Geschwindigkeit in z -Richtung aus dem Experiment zu streuen, erwartet man deshalb, dass

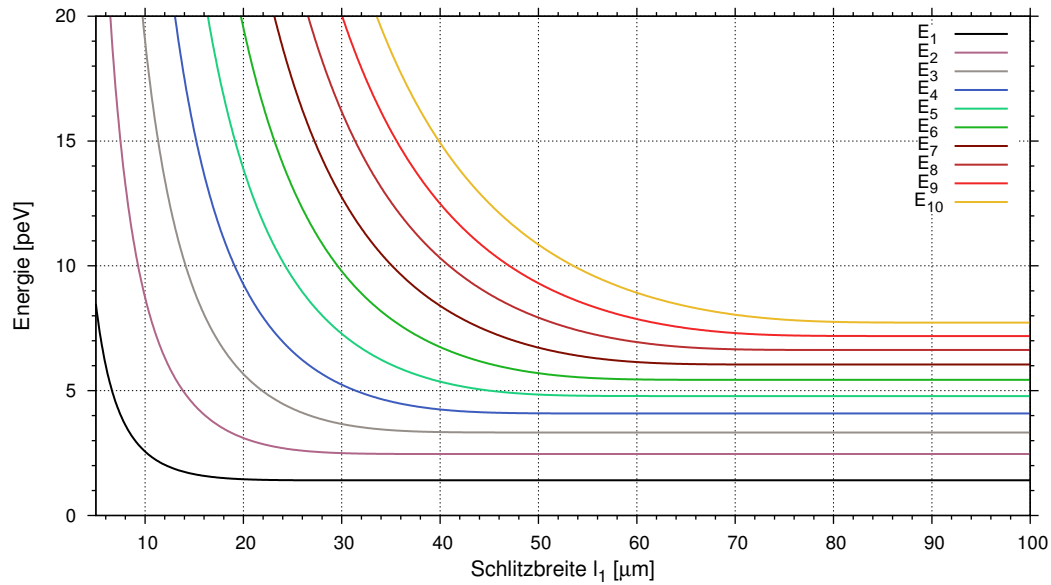


Abbildung 3.3: Energieeigenwerte der ersten zehn Zustände in Abhängigkeit der Schlitzbreite l_1 .

unterhalb eines gewissen Plattenabstands l_1 keine Neutronen mehr das System durchlaufen können. Dies steht in krassem Widerspruch zur klassischen Vorstellung, wonach dieser Effekt nicht auftritt.

Berechnung von c_1 und c_2 Die beiden Gleichungen in (3.3) sind linear abhängig, numerische Werte für E_n wurden im letzten Abschnitt bestimmt.

Somit kann nun eine der beiden Gleichungen verwendet werden, um das Verhältnis der Koeffizienten c_1 und c_2 zu bestimmen. Außerdem soll das Betragsquadrat der Zustände normiert sein, was die zweite Gleichung zur Bestimmung der Koeffizienten einbringt:

$$0 = c_1 Ai(-E_n) + c_2 Bi(-E_n) \quad (3.5)$$

$$1 = \int_h^{h+l_1} dz |c_1 Ai(z - h - E_n) + c_2 Bi(z - h - E_n)|^2. \quad (3.6)$$

Damit ist das System prinzipiell bestimmt. Vorsicht ist jedoch bei Gleichung (3.6) geboten. Zwar sind die beiden Airy-Funktionen linear unabhängig, sie sind aber nicht orthogonal. Somit verschwindet das Integral über die Mischterme nicht.

Außerdem besteht zusätzlich noch die Freiheit einer zusätzlichen globalen Phase $e^{i\phi}$. Wird die gesamte Lösung mit einem solchen Phasenfaktor multipliziert, so löst die neue Funktion die Schrödingergleichung in gleicher Weise. Aus physikalischer Sicht hat die globale Phase jedoch keinen Einfluss, da sie nicht beobachtbar ist.

Zeitentwicklung des Systems Als Zwischenergebnis ist festzuhalten, dass die Zustände für $z < 0$ und $z > l_1$ verschwinden und für $0 \leq z \leq l_1$

$$\varphi_n^I(z) = (c_1 Ai(z - E_n) + c_2 Bi(z - E_n)) \quad (3.7)$$

ergeben. Die Gesamtwellenfunktion lässt sich hieraus als Linearkombination aller Eigenzustände mit geeigneten Vorfaktoren konstruieren. Da das System konservativ ist und das Energiespektrum diskret, lautet der allgemeinste Ansatz für die Wellenfunktion

$$|\psi^I(z, t)\rangle = \sum_{n=1}^N d_n(t) \cdot |\varphi_n^I\rangle. \quad (3.8)$$

Multipliziert man an diese Gleichung von links die Schrödingergleichung, so ergibt sich

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \varphi_n^I | \psi^I(z, t) \rangle = \langle \varphi_n^I | H | \psi^I(z, t) \rangle \quad (3.9)$$

$$= E_n \langle \varphi_n^I | \psi^I(z, t) \rangle \quad (3.10)$$

und somit

$$i\hbar \frac{d}{dt} d_n(t) = E_n d_n(t). \quad (3.11)$$

Diese Gleichung liefert für die Vorfaktoren

$$d_n(t) = d_n(t_0) \cdot e^{-iE_n(t-t_0)} \quad (3.12)$$

mit einer beliebigen, aber festen Anfangsphase t_0 .

Die Koeffizienten $d_n(t_0)$ bestimmen die Verhältnisse der einzelnen Zustände vom Gesamtzustand. Damit die Norm stimmt, muss die Summe ihrer Betragsquadrate eins betragen. In unserem Experiment nehmen wir an, dass alle Zustände mit gleicher Häufigkeit auftreten, daher gilt

$$d_n(t_0) = \frac{1}{\sqrt{N}}. \quad (3.13)$$

Die Gesamtwellenfunktion lässt sich damit schreiben als

$$\psi^I(z) = \sum_{n=1}^N d_n \varphi_n^I(z) e^{-iE_n(t-t_0)}. \quad (3.14)$$

Außerdem lassen wir im Experiment alle Anfangsphasen t_0 gleichberechtigt zu. Deswegen muss bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeitsdichte nach der Quadrierung der Wellenfunktion noch über alle möglichen t_0 integriert werden. Dies ist gleichbedeutend mit der inkohärenten Addition der Einzelzustände:

$$|\psi(z)^I| = \sum_{n=1}^N d_n^2 |\varphi_n^I(z)|. \quad (3.15)$$

Einbeziehung der oberen Glasplatte als „Absorber“ Als Nächstes muss das bereits beschriebene Verhalten des Absorbers quantitativ in die Rechnungen mit einbezogen werden.

Aus quantenmechanischer Sicht unterdrückt der Absorber Zustände mit genügend hoher Energie. Quantitativ läßt sich dies beschreiben durch die Einführung einer Verlustrate $\Gamma_n(l_1)$, die proportional ist zur Wahrscheinlichkeit, das Neutron im rauen Kantenbereich der oberen Glasplatte zu finden:

$$\Gamma_n(l) = \alpha_{loss,n} \int_{h+l_1-2\sigma}^{h+l_1} dz |\varphi_n^I(z-h)|^2. \quad (3.16)$$

Dieser erstreckt sich näherungsweise über den doppelten Wert der rms-Rauheit in z-Richtung. Die Proportionalitätskonstante $\alpha_{loss,n}$ beschreibt die mikrophysikalischen Eigenschaften des Absorbers und ist im Allgemeinen abhängig vom Zustand n . Allerdings ist zu erwarten, dass die makroskopische Wellenfunktion nicht von den mikrophysikalischen Eigenschaften abhängt, weswegen die Konstante als unabhängig von n angenommen wird [10]. Die Berechnung von α_{loss} ist in keiner Weise trivial. Der Faktor muss später durch einen 1-Parameter-Fit an die Messdaten bestimmt werden. Da wir einen zum letzten Experiment im Jahr 2005 baugleichen Absorber einsetzen werden, werden für die folgenden Simulationen dieses Experiments eingesetzt:

$$\sigma = 0.75 \mu m \quad (3.17)$$

$$\alpha_{loss} = (3.4 \pm 0.1) \cdot 10^4 \frac{1}{s}. \quad (3.18)$$

Die Änderung der Gesamtwahrscheinlichkeit in der Zeit ist proportional zur Anfangswahrscheinlichkeit und zur Verlustrate:

$$\frac{d \langle \varphi_n^I | \varphi_n^I \rangle}{dt} = - \langle \varphi_n^I | \varphi_n^I \rangle \cdot \Gamma_n(l_1). \quad (3.19)$$

Diese Gleichung führt auf die Lösung [10]

$$\langle \varphi_n^I | \varphi_n^I \rangle = |P_n(l_1, t)|^2, \quad P_n = e^{-\frac{1}{2} \Gamma_n(l_1) \cdot t}. \quad (3.20)$$

Die Gesamtwellenfunktion des Bereichs I stellt sich somit dar als

$$\psi(z)^I = \sum_{n=1}^N d_n \cdot P_n(l_1, x_1, v_x) \cdot \varphi_n^I(z) e^{-iE_n(t-t_0)}. \quad (3.21)$$

Bei gegebener Verteilung der x-Geschwindigkeit bestimmen der Plattenabstand l_1 und die Länge des Absorbers x_1 das Verhältnis der Zustände und sind damit verantwortlich für die Präparation einer quantenmechanischen Gesamtwellenfunktion.

Die Wahl dieser Parameter entspricht im Wesentlichen einer Optimierungsaufgabe. Sie erfolgt in Abschnitt 3.4, nachdem eine Gesamtlösung des Problems bekannt ist.

3.1.3 Übergang I/ II: Berechnung der Matrixübergangselemente an der Stufe

Aufstellen der Wellenfunktion Die Eigenzustände in Bereich II sind bereits aus der Rechnung in 2.2.2 bekannt. Dort wurden sie für den Freien Fall im Gravitationsfeld der Erde berechnet. Eine Glasplatte mit unendlichem Potential für $z \leq 0$ sorgte für die Randbedingung.

Diese Lösung lässt sich für $z \geq 0$ zu folgender Wellenfunktion verallgemeinern:

$$\psi^{II}(z) = \sum_{m=1}^M \tilde{f}_m \cdot \varphi_m^{II}(z) \cdot e^{-iE_m(t-t')}. \quad (3.22)$$

Berechnung der Vorfaktoren f_m und Phase t' An der Stufenstelle x_1 muss die Wellenfunktion $\psi^I(z)$ stetig und differenzierbar in die Wellenfunktion $\psi^{II}(z)$ übergehen. Dies liefert für $x = x_1$ die Randbedingungen

$$|\psi^I(z)\rangle = |\psi^{II}(z)\rangle \quad (3.23)$$

$$\frac{d}{dz}|\psi^I(z)\rangle = \frac{d}{dz}|\psi^{II}(z)\rangle, \quad (3.24)$$

die die Vorfaktoren \tilde{f}_n und die Phase t' festlegen. Multipliziert man Gleichung (3.23) von links mit einem Eigenzustand $\langle \varphi_m^{II} |$, so ergibt sich

$$\sum_n d_n \cdot P_n(l_1, x_1, v_x) \cdot \langle \varphi_m^{II} | \varphi_n^I \rangle \cdot e^{-iE_n(t-t_0)} = \tilde{f}_m \cdot e^{-iE_m(t-t')} \quad (3.25)$$

und damit

$$\tilde{f}_m = e^{iE_m(t-t')} \cdot \sum_n d_n \cdot P_n(l_1, x_1, v_x) \cdot \langle \varphi_m^{II} | \varphi_n^I \rangle \cdot e^{-iE_n(t-t_0)}. \quad (3.26)$$

Hier wurde die Orthonormiertheit der Eigenzustände ausgenutzt.

Es fällt auf, dass die Phase t' keine Rolle spielt. Sie hebt sich direkt wieder heraus, wenn man \tilde{f}_m in den Ansatz für $\psi^{II}(z)$ einsetzt. Außerdem kann die Lösung einfacher geschrieben werden, wenn man den zeitabhängigen Faktor $e^{iE_m t}$ in die Phase von Gleichung (3.22) aufnimmt und nicht in f_m . Als Endergebnis erhält man dann

$$\psi^{II}(z) = \sum_{m=1}^M f_m \cdot \varphi_m^{II}(z) \cdot e^{-iE_m \frac{x-x_1}{v_x}} \quad (3.27)$$

mit

$$f_m = \sum_{n=1}^N d_n \cdot P_n(l_1, x_1, v_x) \cdot \langle \varphi_m^{II} | \varphi_n^I \rangle \cdot e^{-iE_n(\frac{x_1}{v_x} - t_0)}. \quad (3.28)$$

Gleichung (3.24) wird durch diese Funktion ebenfalls gelöst.

Berechnung der Wahrscheinlichkeitsdichte Es sei darauf hingewiesen, dass die letzte Gleichung die Wellenfunktion für *ein* ultrakaltes Neutron darstellt. Das Betragsquadrat dieser Wellenfunktion entspricht der Wahrscheinlichkeitsdichte, das Neutron in einer bestimmten Höhe z zu finden. In unserem Experiment messen wir die Orte sehr vieler Neutronen mit sehr guter Auflösung. Bei hinreichend guter Statistik ergibt sich dabei eine Höhenverteilung, die dieser Wahrscheinlichkeitsdichte entspricht. Vorsicht ist aber bei zwei entscheidenden Punkten geboten:

- Zum einen lassen wir alle Anfangsphasen t_0 im Experiment gleichberechtigt zu. Deswegen muss nach Quadrierung der Wellenfunktion noch über alle t_0 integriert werden.
- Zum anderen weisen die Neutronen eine Verteilung der Geschwindigkeit in x -Richtung auf. Die Wahrscheinlichkeitsdichte muss daher noch mit der Geschwindigkeitsverteilung gefaltet werden. Dies bedeutet natürlich, dass diese bekannt sein muss! Die Faltung entspricht bildlich gesprochen einer gewichteten Mittelung über verschiedene Wellenfunktionen und ist daher ein störender Effekt, weil eventuell Effekte verwaschen werden. Außerdem sind die sich ergebenden Integrale sehr rechenintensiv, da die Geschwindigkeit v_x stets in einer e^{-1/v_x} -Abhängigkeit auftritt.

Wir erwarten im Experiment näherungsweise die in 3.4 gezeigte Dreiecksverteilung der Geschwindigkeit der Neutronen mit einem Maximum bei 6 m/s und einer Breite von $\pm 1 \text{ m/s}$:

$$v_x = (6 \pm 1) \frac{m}{s}. \quad (3.29)$$

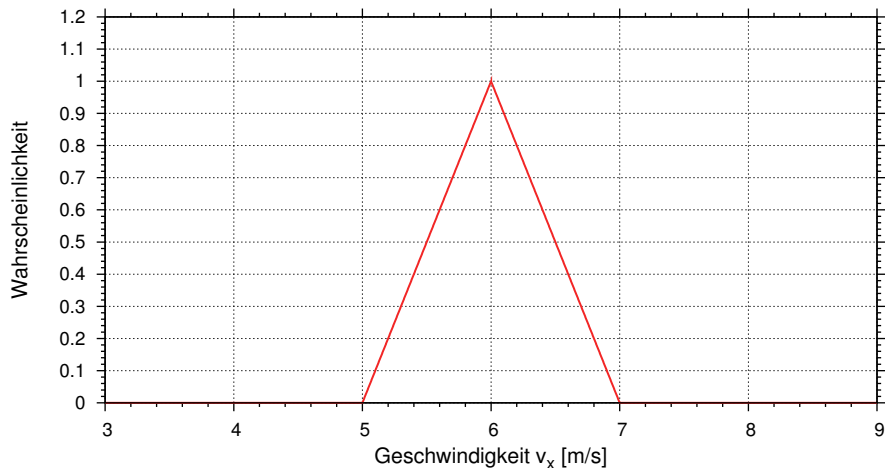


Abbildung 3.4: Erwartete x -Komponente der Geschwindigkeitsverteilung der Neutronen im Experiment

Die Berechnung des Betragsquadrats der Wellenfunktion und die anschließende Integration über alle t_0 ist aufgrund der komplexen Phasen ein wenig mühsam, mit Hilfe

der komplexen Darstellung von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 |\Psi(z, t)|^2 = \int |\psi^{II}|^2 dt_0 = & \sum_{m=1}^M \varphi_m^{II}(z)^2 \cdot \sum_{n=1}^N d_n^2 \cdot P_n(l_1, x_1, v_x)^2 \cdot \langle m|n \rangle^2 \\
 & + \sum_{m \neq m'} \varphi_m^{II}(z) \varphi_{m'}^{II}(z) \cdot \cos\left(\left(E_m - E_{m'}\right) \frac{x - x_1}{v_x}\right) \\
 & \cdot \sum_{n=1}^N d_n^2 \cdot P_n(l_1, x_1, v_x)^2 \cdot \langle m|n \rangle \langle m'|n \rangle. \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

Diskussion der Matrixübergangselemente Das Betragsquadrat des Matrixelements $\langle m|n \rangle$ kann gedeutet werden als die Wahrscheinlichkeit, dass ein Neutron, welches sich in Bereich I im Zustand n befindet, an der Stufe zu Bereich II in Zustand m übergeht. Leider müssen die Matrixelemente

$$\langle m|n \rangle = \int_h^{h+l_1} dz \quad \varphi_m^{II}(z)^* \varphi_n^I(z) \quad (3.31)$$

numerisch bestimmt werden, was den Rechenaufwand zur Festlegung der Parameter erhöht. In die Matrixelemente gehen die Stufenhöhe h sowie der Parameter l_1 als Integrationsgrenze und indirekt bei der Berechnung der Energieeigenwerte E_n ein. Abbildung 3.5 zeigt exemplarisch die Übergangswahrscheinlichkeit des Zustands 1 in 4 in Abhängigkeit der Stufenhöhe h . Die Schlitzbreite l_1 beträgt $20 \mu m$. War das Neutron vor der Stufe im Grundzustand, so ist die Wahrscheinlichkeit, es nach der Stufe in Zustand 4 zu finden, maximal 58%. Wie zu sehen ist, ist eine Präparation in einen „reinen“ Zustand durch die Einführung einer einfachen Stufe nicht möglich.

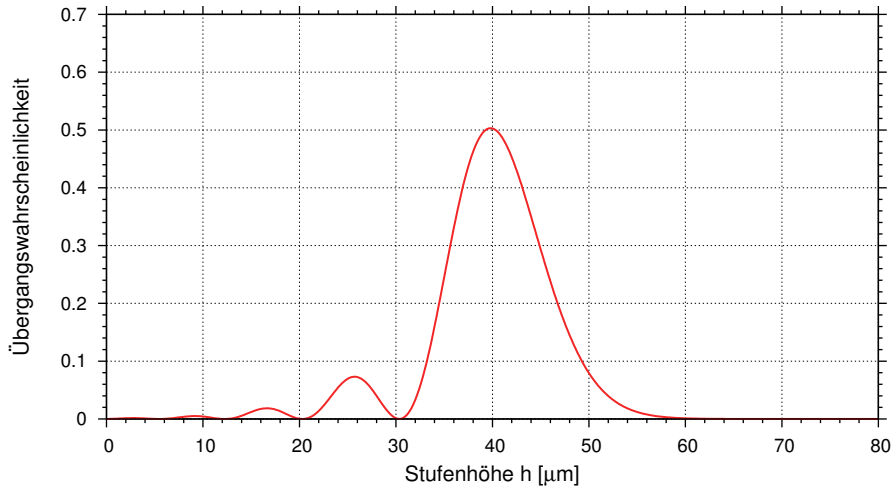


Abbildung 3.5: Übergangswahrscheinlichkeit des Grundzustands in den vierten Zustand in Abhängigkeit der Stufenhöhe h

Prinzipiell ist das System an dieser Stelle vollständig gelöst. Bevor es an die Optimierung der Parameter des Experiments geht, soll aber noch die klassische Erwartung diskutiert werden.

3.2 Die Klassische Erwartung

Die klassische Betrachtung ultrakalter Neutronen in einem Absorber-Glasplatte-System wurde in der Diplomarbeit von Frank Ruess sehr ausführlich beschrieben [9]. Betrachtet wurden Neutronen, die an der Position $x_0 = 0$ in einer Anfangshöhe z_0 mit einer x -Geschwindigkeit v_{0x} und einer z -Geschwindigkeit v_{0z} in das Absorber-Glasplatte-System eintreten. Die Glasplatte befinde sich bei $z = 0$, der Absorber bei z_{abs} .

Die Wahrscheinlichkeit, das Neutron nach einer Flugstrecke x_1 in einem infinitesimalen Höhenbereich dz zu finden, ist proportional zur maximal möglichen Flughöhe dz_{max} und der Zeit, in dem sich das Neutron in dz befindet:

$$dP(z) \propto dz_{max} \cdot dt(z). \quad (3.32)$$

Eine kurze Rechnung ergibt

$$\frac{dP(z)}{dz} = N \cdot \sqrt{z_{abs} - z} \quad (3.33)$$

mit der Normierungskonstante

$$N = \frac{3}{2} z_{abs}^{3/2}. \quad (3.34)$$

Die Einbeziehung einer Stufe in die Rechnung ist analytisch nicht ohne Weiteres möglich, weil Neutronen mit unterschiedlichen Anfangsbedingungen verschieden oft auf den Glasplatten hüpfen.

Klassische Monte-Carlo-Simulation des Experiments Eine Monte-Carlo-Simulation ist eine einfache Alternative, um die Stufe quantitativ in die Rechnung einzubeziehen. Die Simulation besteht im Wesentlichen aus einer Schleife, die die Trajektorie eines Neutrons mit gewissen Anfangsbedingungen nachverfolgt und, falls das Neutron den Setup durchlaufen kann, die Position am Detektor speichert. Diese Schleife wird dann sehr oft durchlaufen und die Ergebnishöhen werden histogrammiert.

Die Hauptschleife besteht aus folgenden Teilen:

- Als Erstes werden die Anfangsbedingungen definiert. Dazu werden die Anfangshöhe z_0 und die Anfangsgeschwindigkeit v_{0x} und v_{0z} als unabhängige Zufallszahlen festgelegt. Dabei werden alle z_0 zwischen 0 und z_{abs} gleichberechtigt zugelassen. Für v_z werden alle Geschwindigkeiten im Intervall $[-v_G, v_G]$ gleichberechtigt zugelassen. Die Geschwindigkeit v_G wird genügend groß gewählt, so dass auch Neutronen den Absorber berühren können. Für v_x wird eine Geschwindigkeitsverteilung zugrundegelegt, die der Verteilung im Experiment entspricht (siehe Gleichung (3.29)).

- Anschließend wird die Trajektorie des Neutrons berechnet. Sollte das Neutron an den Absorber anstoßen, so bricht die Schleife ab, das Neutron wird also nicht mehr gezählt. Es werden dann die Parameter z und v_z an der Stufenposition x_1 bestimmt.
- Es erfolgt als Nächstes die Verfolgung der Trajektorie im Bereich II. Schließlich wird die Höhe des Neutrons an der Detektorposition x_2 berechnet und histogrammiert.

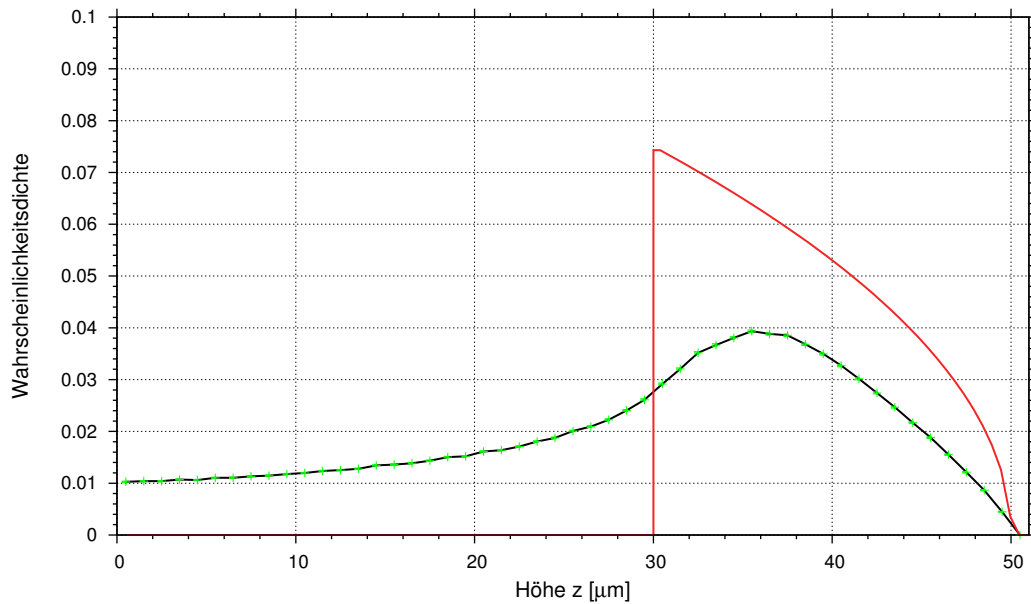


Abbildung 3.6: Klassische Simulation: Die rote Kurve zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung an der Stufe $x_1 = 0.10 \text{ m}$, die schwarze Kurve am Detektor bei $x_2 = 0.20 \text{ m}$

Eine typische Höhenverteilung zeigt die schwarze Kurve in Abbildung 3.6. Es wurden 10^6 Neutronen simuliert, der Plattenabstand l_1 betrug $20 \mu\text{m}$. Die Stufe der Höhe $30 \mu\text{m}$ befand sich an der Position $x_1 = 0.10 \text{ m}$, der Detektor bei $x_2 = 0.20 \text{ m}$. Die rote Kurve zeigt die Höhenverteilung an der Stufe bei x_1 . Es wurde eine Dreiecksverteilung der x-Geschwindigkeit von $v_x = (6 \pm 1) \text{ m/s}$ angenommen.

3.3 Quantenmechanische Phänomene - Oszillationen und Revival

Ein wesentlicher Unterschied zwischen der klassischen Erwartung und der quantenmechanischen besteht in der Zeitentwicklung des Systems.

Die klassische Bewegung der Neutronen ist periodisch, die Periodendauer entspricht der doppelten Fallzeit aus der maximalen Steighöhe:

$$T = 2\sqrt{\frac{2z_{max}}{g}}. \quad (3.35)$$

Die quantenmechanische Zeitentwicklung der Gesamtwellenfunktion aus Kapitel 3.1.3 ab Seite 31 ist deutlich komplizierter. Nehmen wir als einfachstes Beispiel an, dass das Neutron in Bereich I durch einen genügend langen Absorber und eine kleine Schlitzbreite in den ersten Eigenzustand präpariert wurde. Die Wellenfunktion nach der Stufe ergibt sich dann mit der Abkürzung $t_1 = x_1/v_x$ zu

$$\psi^{II}(z) = e^{-iE_1(t_1-t_0)} \cdot \sum_{m=1}^M P_1(l_1, x_1, v_x) \cdot \langle m|1\rangle \cdot \varphi_m^{II}(z) \cdot e^{-iE_m(t-t_1)}. \quad (3.36)$$

Dies führt auf die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\begin{aligned} |\Psi(z, t)|^2 &= \sum_{m=1}^M P_1(l_1, x_1, v_x)^2 \cdot \langle m|1\rangle^2 \cdot \varphi_m^{II}(z)^2 \\ &+ \sum_{m \neq m'} P_1(l_1, x_1, v_x)^2 \cdot \langle m|1\rangle \langle m'|1\rangle \cdot \varphi_m^{II}(z) \varphi_{m'}^{II}(z) \cdot \cos(\omega_{mm'} \cdot (t - t_1)). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Es wurde die Abkürzung $\omega_{mm'} = E_m - E_{m'}$ verwendet und über alle möglichen Anfangsphasen t_0 integriert.

Aus dieser Gleichung ergibt sich durch Multiplikation mit dem Ortsoperator z und anschließende Integration der Erwartungswert des Orts, der im Folgenden diskutiert werden soll:

$$\begin{aligned} \langle z \rangle &= \iint dz dt_0 z |\psi^{II}|^2 = \sum_{m=1}^M P_1(l_1, x_1, v_x)^2 \cdot \langle m|1\rangle^2 \cdot \langle m|z|m\rangle^2 \\ &+ \sum_{m \neq m'} P_1(l_1, x_1, v_x)^2 \cdot \langle m|1\rangle \langle m'|1\rangle \cdot \langle m'|z|m\rangle \cdot \cos(\omega_{mm'} \cdot (t - t_1)). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Die gesamte Zeitabhängigkeit steckt im Kosinusterm in der zweiten Summe. Der erste Term entspricht lediglich dem gewichteten Mittel der Ortserwartungswerte der Eigenzustände.

Die zweite Summe ist zum Beispiel aus der Wellenmechanik bekannt. Sie entspricht der Überlagerung von Schwingungen mit verschiedenen Frequenzen und Amplituden. Würde es nur zwei verschiedene Frequenzen geben, so ergäbe sich eine einfache Schwebung:

$$\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right). \quad (3.39)$$

In unserem Fall gibt es in der Summe jedoch sehr viele Summanden, so dass es keine einfache Form der Lösung gibt, an der man beispielsweise die Periodendauer o.ä. ablesen kann. Allerdings tragen bedingt durch den Faktor $\langle m'|z|m\rangle$ nicht alle Kombinationen von m und m' gleich stark bei. In Abbildung 3.7 ist dies verdeutlicht. Auf der linken

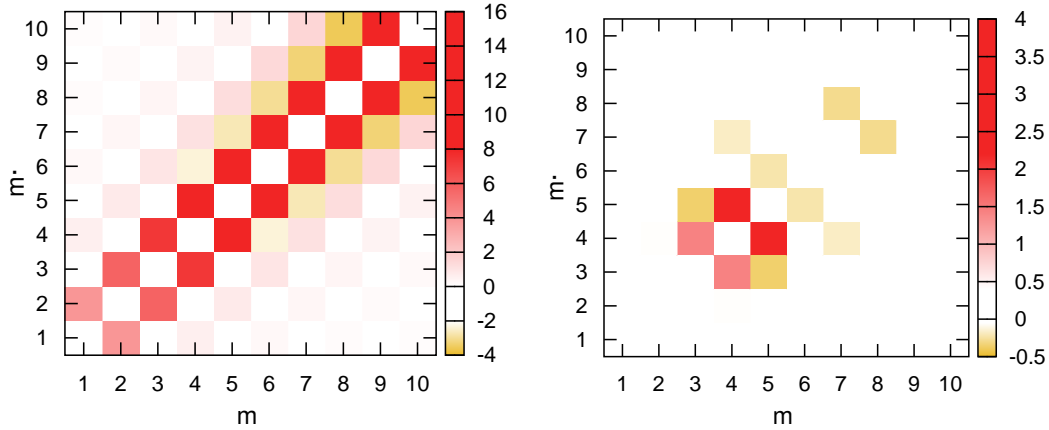


Abbildung 3.7: Auf der linken Seite ist die symmetrische Matrix der Faktoren $\langle m'|z|m\rangle$ für $m \neq m'$ aufgetragen. Die Diagonalelemente wurden Null gesetzt, um die Färbung des Plots nicht zu verfälschen. Der rechte Plot zeigt, welche Terme für die Schwingung in der Zeitentwicklung maßgeblich verantwortlich sind. Nähere Erläuterungen sind im Text zu finden.

Seite ist der Faktor $\langle m'|z|m\rangle$ in Abhängigkeit von m und m' geplottet. Je weiter das Element von der Diagonale entfernt ist, desto kleiner ist sein Einfluss. Es kann in guter Näherung angenommen werden, dass nur die Elemente mit $m' - m = \pm 1$ eine Rolle spielen.

Zudem wird der Einfluss des Kosinusters durch die beiden Faktoren $\langle m|1\rangle$ bzw. $\langle m'|1\rangle$ bestimmt. Diese beiden Terme sind abhängig von der Stufenhöhe. Für eine Stufe von $30 \mu\text{m}$ ergibt sich für das Produkt aller drei Faktoren $\langle m|1\rangle \cdot \langle m'|1\rangle \cdot \langle m|z|m'\rangle$ in Abhängigkeit von m und m' der in Abbildung 3.7 auf der rechten Seite gezeigte Graph. In erster Näherung ergibt sich demnach tatsächlich eine Überlagerung zweier Kosinusterme und damit eine schwebungsähnliche Struktur der Gleichung.

Abbildung 3.8 zeigt in schwarz für die Stufenhöhe von $30 \mu\text{m}$ den quantenmechanischen Erwartungswert des Orts nach der Stufe in Abhängigkeit der Detektorposition, die über die Beziehung $x = v_x t$ mit der Zeit zusammenhängt. Es ist deutlich eine Schwebung zu erkennen. Die Abnahme der Amplitude der Schwingung erklärt sich daraus, dass die gesamte Lösung noch mit dem dreieckigen Geschwindigkeitsprofil aus 3.4 gefaltet wurde. Dadurch mitteln sich die Phasen teilweise heraus.

Die quantenmechanische Berechnung steht in starkem Widerspruch zur klassischen Erwartung. Es ist klassisch nicht vorstellbar, dass ein Teilchen über eine Glasplatte hüpfet, nach einiger Zeit ohne weitere äußere Einwirkung das Hüpfen einstellt und auf gleicher Höhe entlanggleitet, um einige Zeit später wieder mit dem Hüpfen zu beginnen.

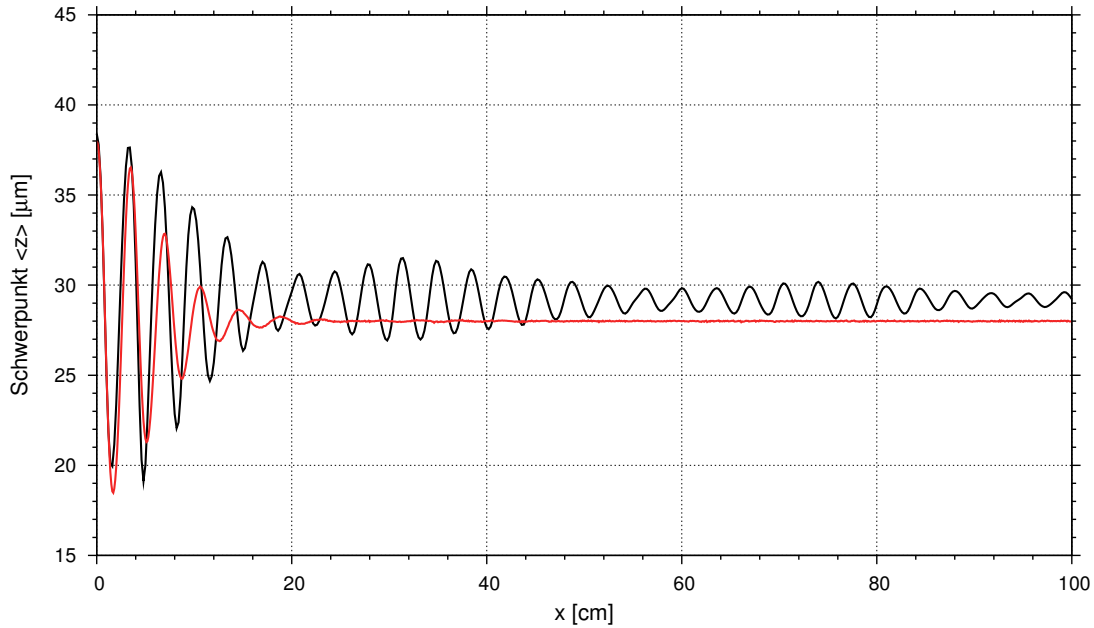


Abbildung 3.8: Quantenmechanischer Erwartungswert des Orts (schwarz) und klassischer Schwerpunkt der Neutronenverteilung (rot).

Die rote Kurve in Abbildung 3.8 zeigt die klassische Monte-Carlo-Simulation mit denselben Parametern. Aufgetragen ist der Schwerpunkt der Neutronenverteilung, die durch die Simulation sehr vieler zugelassener Trajektorien und anschließende Histogrammierung entsteht. Der Schwerpunkt der Höhenverteilung bewegt sich kurz nach der Stufe auf und ab, bevor er schon nach kurzer Distanz wieder stabil wird. Dies kann folgendermaßen erklärt werden:

In Bereich I wurden Neutronen mit verschiedenen transversalen Energien und Anfangsphasen in das System eingekoppelt. Dadurch sind alle Perioden T zwischen 0 und $2\sqrt{2z_{abs}/g}$ vertreten. Daher ist die Höhenverteilung der Neutronen stabil. Die Stufe führt zu einem Shift der Periodendauern, da alle Neutronen die gleiche Menge an kinetischer Energie gewinnen. Zum anderen führt die Stufe zu Randeffekten, da Neutronen mit hoher transversaler Energie erst in einer gewissen Entfernung auf die Glasplatte in Bereich II auftreffen können. Nach einiger Zeit mitteln sich die verschiedenen Periodendauern jedoch wieder heraus und die Neutronenverteilung selbst und damit ihr Schwerpunkt werden wieder stabil.

Auffällig an Abbildung 3.8 ist, dass im Limit langer Glasplatten in Bereich II der mittlere quantenmechanische Erwartungswert und der Schwerpunkt der klassischen Verteilung nicht zusammenfallen. Es ergibt sich eine Differenz von ungefähr $1.5 \mu\text{m}$.

Eine solche Abweichung ist aber nicht weiter verwunderlich, da die Quantenmechanik erst für die Superposition hoher Eigenzustände in die klassische Erwartung übergeht. In der gezeigten Konfiguration sind die Quantenzahlen mit $n = 1$ bis $n = 6$ jedoch gering.

3.4 Berechnung konkreter Experimente

3.4.1 Optimierung von l_1 und x_1

In Bereich I soll das ultrakalte Neutron in einen quantenmechanischen Zustand präpariert werden. Dafür stehen im Wesentlichen zwei Parameter zur Verfügung, wenn man von gegebenen Absorberparametern ausgeht. Der Abstand l_1 von Platte und Absorber und die Länge x_1 des Bereichs I bestimmen die Wellenfunktion des Neutrons und die Transmission durch das System.

Die Transmission von Bereich I ist gegeben durch die Summe der Transmissionen der einzelnen Zustände

$$T = \sum_{n=1}^N e^{-\alpha_{loss} \cdot \Gamma_n(l_1) \cdot x_1 / v_x} \quad (3.40)$$

und damit abhängig von l_1 und x_1 .

Idealerweise soll das Neutron in einen einfach zu beschreibenden Gesamtzustand präpariert werden, zum Beispiel in eine Linearkombination aus erstem und zweiten Zustand. Um dies zu erreichen, sind verschiedene Konfigurationen möglich, da x_1 und l_1 über die letzte Gleichung miteinander gekoppelt sind. Ein Maß für die Präparierung in den gewünschten Endzustand liefert

$$T_{rel} = \frac{T}{T(n=1,2)} = 1 + \frac{T(n>2)}{T(n=1,2)}. \quad (3.41)$$

$T_{rel} = 1$ ist gleichbedeutend damit, dass sich das System in einer Linearkombination der ersten beiden Zustände befindet und keine weiteren Zustände vorkommen. Eine Übersicht gibt Abbildung 3.9. Hier sind für feste T_{rel} alle möglichen Kombinationen

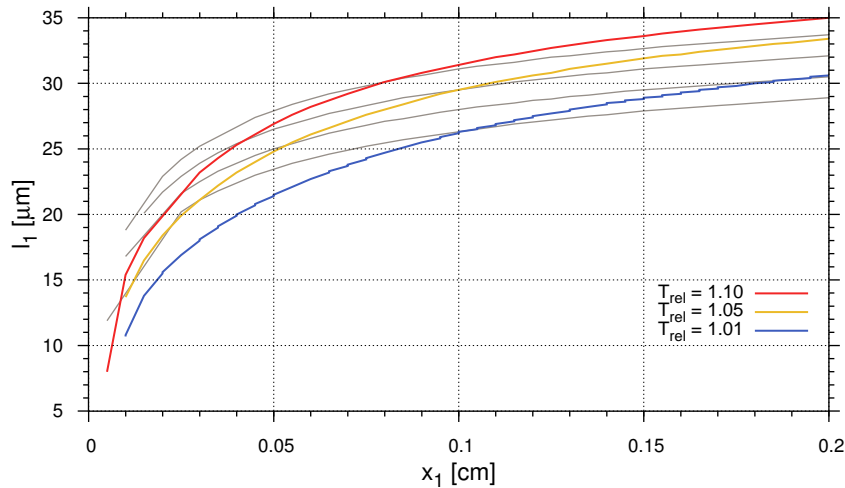


Abbildung 3.9: Konfigurationen von l_1 und x_1 für feste T_{rel}

von l_1 und x_1 aufgetragen, um dies zu erreichen. Allerdings sind nicht alle Punkte einer Kurve gleich gut für unser Experiment geeignet, da die Transmission variiert. Sie nimmt mit steigendem l_1 oder sinkendem x_1 zu. Um verschiedene Punkte einer Kurve

vergleichen zu können, sind die grau gezeichneten Isotransmissionslinien hilfreich. Zwei graue Linien unterscheiden sich in der Transmission um 20%.

Damit lassen sich geeignete Konfigurationen für l_1 und x_1 in Bereich I bestimmen. Geeignet erscheint die mittlere Kurve, hier sind fünf Prozent an Transmission zugelassen, die nicht von ersten oder zweiten Zuständen der Neutronen herrühren. Bei einer Plattenlänge von $x_1 = 10 \text{ cm}$ ergibt sich dann ein Plattenabstand von ungefähr $30 \mu\text{m}$. Für diese Konfiguration wird der erste Zustand nur um 0.8% unterdrückt, der zweite um ungefähr ein Drittel. Der dritte Zustand wird um 91% unterdrückt und ab dem vierten sind alle Zustände praktisch vernachlässigbar.

Berechnet man das System auf klassischem Weg, so ergibt sich, dass bei einer Plattenlänge von $x_1 = 0.10 \text{ m}$ die Neutronen mindestens dreimal hüpfen müssen, bevor sie die Stufe erreichen können.

3.4.2 Versuch I: Quantum Bouncing Ball mit kleiner Stufe ($7 \mu\text{m}$)

Zunächst soll der Quantum Bouncing Ball für kleine Stufenhöhen $l_2 - l_1$ berechnet werden. Mit den gegebenen Parametern aus Bereich I kann mit Hilfe der Vorgehensweise aus Abschnitt 3.3 die Zeitentwicklung des Systems bestimmt werden, ohne es insgesamt zu berechnen. Dazu müssen lediglich die Überlappintegrale $\langle m|z|m'\rangle$ und $\langle m|n\rangle$ bestimmt werden, wobei $|n\rangle$ einen Eigenzustand in Bereich I darstellt und $|m\rangle$ bzw. $|m'\rangle$ verschiedene Eigenzustände nach der Stufe sind. Die Wahl der Stufenhöhe fällt auf $7 \mu\text{m}$.

In Abbildung 3.10 ist die Zeitentwicklung des quantenmechanischen Erwartungswerts

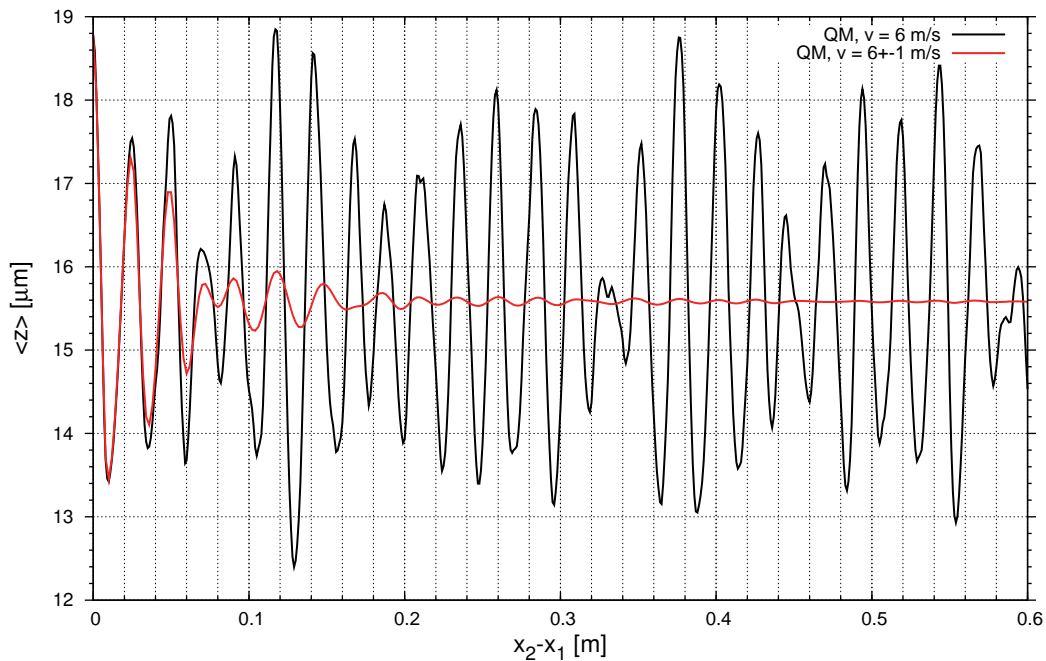


Abbildung 3.10: Erwartungswert des Orts

des Orts gezeigt. Die x-Achse entspricht der Länge der Glasplatte in Bereich II. Für die Berechnung der schwarzen Kurve wurde angenommen, dass die Neutronen alle

dieselbe x-Geschwindigkeit von 6 m/s aufweisen. Es ist deutlich die schwebungsartige Struktur zu erkennen.

Anders sieht es aus, wenn der Erwartungswert mit der aus Gleichung (3.29) bekannten dreieckigen Geschwindigkeitsverteilung gefaltet wird, die wir für unser Experiment erwarten. Dies ist in der roten Kurve dargestellt. Die Schwebung ist sehr stark gedämpft und praktisch nicht mehr zu sehen.

Abbildung 3.11 zeigt noch einmal den Erwartungswert des Orts, jetzt allerdings nur für

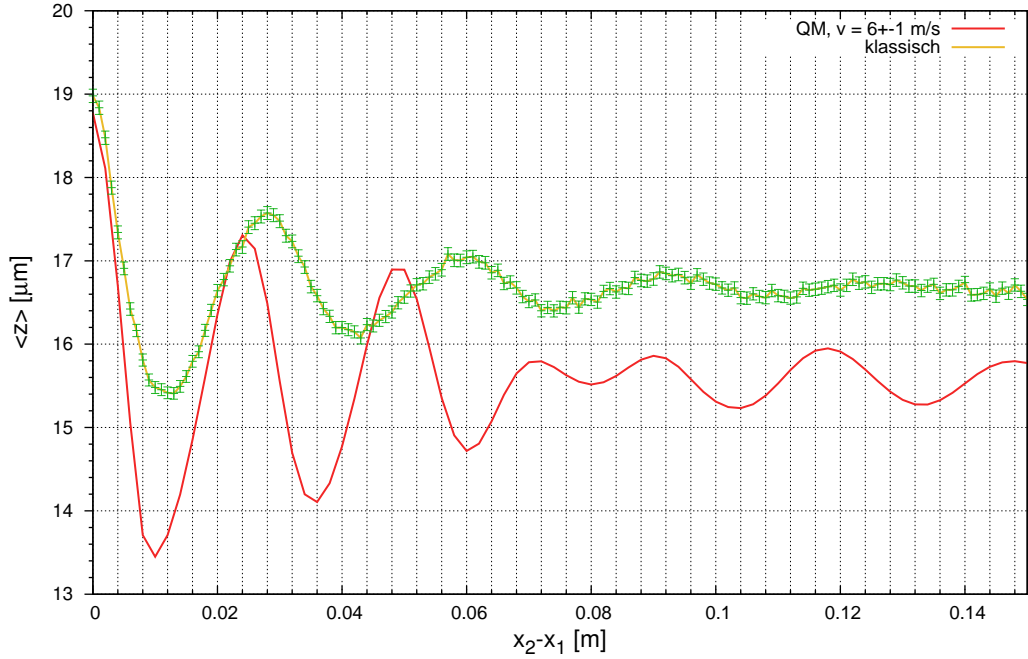


Abbildung 3.11: Erwartungswert des Orts

experimentell realisierbare Glasplattenlängen $x - x_1$. Die gelbe Kurve zeigt die klassische Erwartung. Sie wurde, wie in Abschnitt 2.2.1 beschrieben, mit Hilfe einer Monte-Carlo-Simulation gewonnen. Die grünen Punkte entsprechen den tatsächlich berechneten Rohdaten.

Die Berechnung der roten quantenmechanischen Kurve erfolgte wiederum unter der Annahme der bekannten Dreiecksverteilung der x-Geschwindigkeit der Neutronen.

Die klassische und die quantenmechanische Erwartung unterscheiden sich demnach deutlich in Amplitude und Phase.

Auffällig ist, dass die Erwartungswerte an der Sprungstelle schon um etwa $0.2\text{ }\mu\text{m}$ differieren. Klassisch ergibt sich

$$\bar{z} = \frac{\int dz z \cdot N \sqrt{30\text{ }\mu\text{m} - z}}{\int dz N \sqrt{30\text{ }\mu\text{m} - z}} = 19\text{ }\mu\text{m}, \quad (3.42)$$

während das quantenmechanische Ergebnis ziemlich genau $18.8\text{ }\mu\text{m}$ beträgt. Zur Veranschaulichung ist in Abbildung 3.12 die klassische Verteilung (schwarz) an der Stufenstelle $x_1 = 0.10\text{ m}$ im Vergleich zur quantenmechanischen Wahrscheinlichkeitsdichte

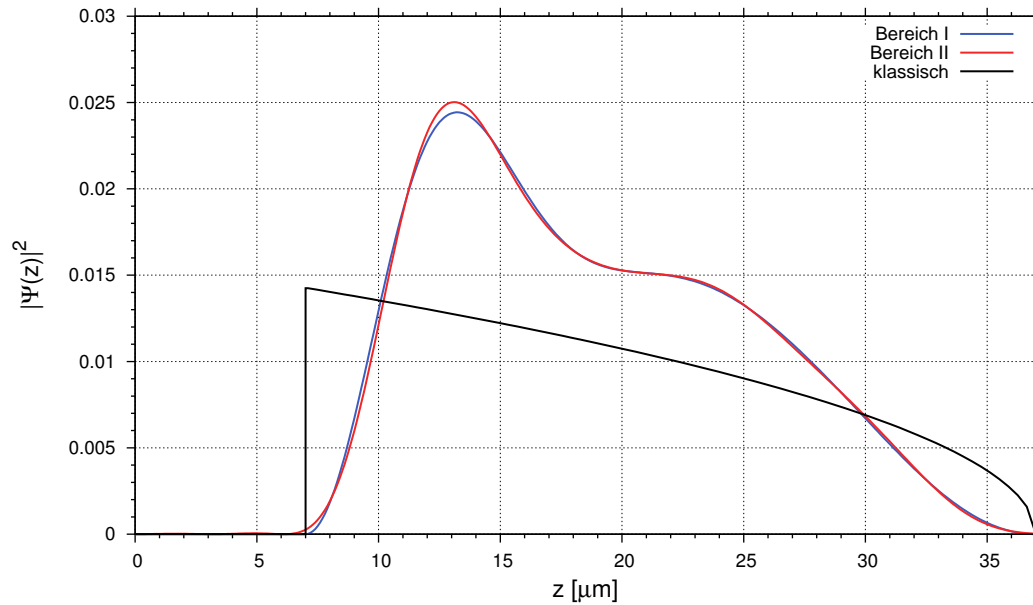


Abbildung 3.12: Klassische Höhenverteilung der Neutronen (schwarz) und quantenmechanische Wahrscheinlichkeitsdichten im Vergleich. In blau ist die Wahrscheinlichkeitsdichte von Bereich I ausgerechnet, in rot von Bereich II.

(rot, blau) gezeigt. Dabei entspricht die blaue Kurve der Wahrscheinlichkeitsdichte des Bereichs I, während die rote von Bereich II ausgerechnet wurde. Die Abweichung der beiden Kurven ist ein Maß dafür, wie gut die quantenmechanische Rechnung numerisch stimmt. Abweichungen ergeben sich dadurch, dass die unendlichen Summen in der Wellenfunktion nach einem bestimmten Wert abgebrochen werden. Im vorliegenden Fall wurde das System mit 30 Eigenzuständen in Bereich II berechnet.

Etwas handlicher als die visuelle Überprüfung der Güte der Rechnung ist der Vektor, der sich durch die Summe über die Quadrate der Matrix der Überlappintegrale errechnen lässt. Im Idealfall sollten sich alle Einträge zu eins addieren. Tabelle 3.1 gibt einen

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	γ
$m \leq 10$	0.996	0.992	0.983	0.897	0.681	$7.1 \cdot 10^{-3}$
$m \leq 20$	0.999	0.998	0.996	0.988	0.981	$1.9 \cdot 10^{-3}$
$m \leq 30$	0.999	0.999	0.998	0.995	0.989	$1.4 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 3.1: Güte der Berechnung γ in Abhängigkeit der Anzahl zugelassener Zustände in Bereich II

Überblick über die Güte der Rechnung in Abhängigkeit der Anzahl der zugelassenen Eigenzustände in Bereich II. Für höhere Übergänge braucht man mehr Eigenzustände, um mit genügender Genauigkeit rechnen zu können. Allerdings sind diese Zustände in unserem Experiment durch den Absorber unterdrückt. Ein besseres Maß für die Güte

der Rechnung ist deshalb die Größe

$$\tilde{\gamma} = \frac{\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \langle m|n \rangle^2 \cdot \overline{P_n(x_1, l_1, v_x)^2}}{\sum_{n=1}^N \overline{P_n(x_1, l_1, v_x)^2}}, \quad (3.43)$$

in der die Summe über die Matrixelemente der Überlappintegrale mit den Absorberfunktionen gewichtet sind. Der Strich über der Absorberfunktion soll andeuten, dass diese mit der Geschwindigkeitsverteilung $f(v)$ gewichtet werden muss, um korrekte Ergebnisse zu erhalten.

Für genaue Rechnungen ist die Differenz von 1 geeigneter:

$$\gamma = 1 - \tilde{\gamma}. \quad (3.44)$$

Tabelle 3.1 gibt in der letzten Spalte auch einen Überblick über die so eingeführte Güte der Berechnung.

Schließlich sind in Abbildung 3.13 und 3.14 in rot die quantenmechanischen Wahrscheinlichkeitsdichten für verschiedene Plattenlängen in Bereich II aufgetragen. Gegenübergestellt ist die rein klassische Höhenverteilung der Neutronen, die wieder als Monte-Carlo-Simulation berechnet wurde.

Auffällig ist, dass die quantenmechanischen Wahrscheinlichkeitsdichten bei der klassischen maximal erreichbaren Höhe von $37 \mu\text{m}$ noch nicht vollständig auf null abgefallen sind. Dies ist im Rahmen der klassischen Physik nicht möglich, in der quantenmechanischen Welt mit ihrer Wahrscheinlichkeitsinterpretation aber durchaus erlaubt.

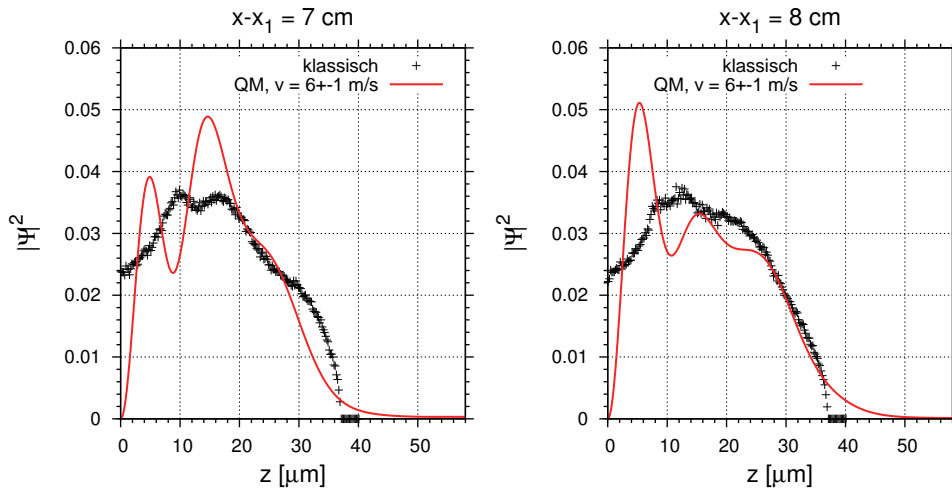


Abbildung 3.13: Betragsquadrat der Wellenfunktion für verschiedene Längen der Glasplatte in Bereich II

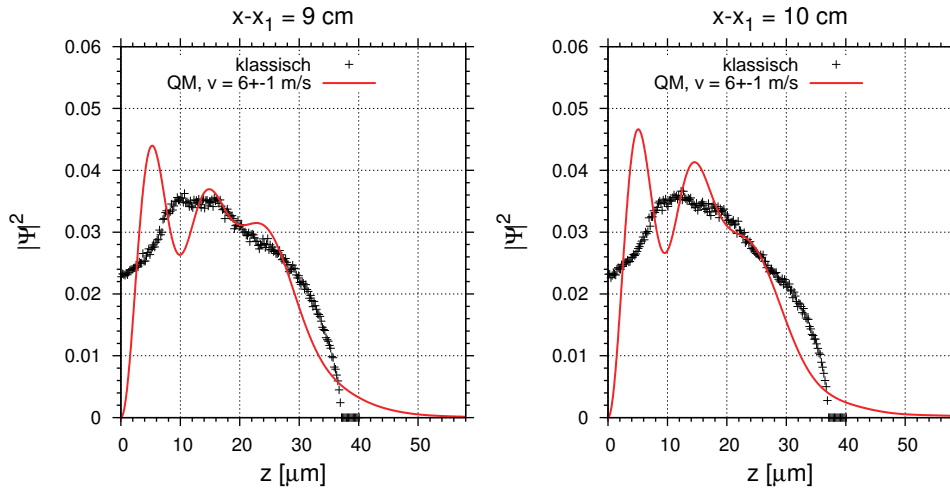


Abbildung 3.14: Betragsquadrat der Wellenfunktion für verschiedene Längen der Glasplatte in Bereich II

3.4.3 Versuch II: Quantum Bouncing Ball mit großer Stufe ($28 \mu m$)

Im Folgenden soll dasselbe Experiment wiederholt werden, allerdings mit größerer Stufenhöhe. Die Wahl fällt auf $l_2 - l_1 = 28 \mu m$, nachdem wie im vorigen Abschnitt die Matrixübergangselemente begutachtet wurden. Abbildung 3.15 zeigt die Faktoren

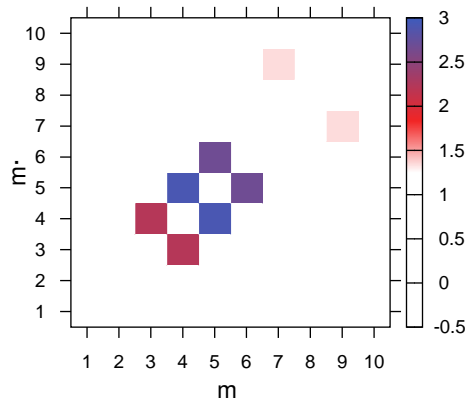


Abbildung 3.15: Bestimmung der für die Zeitentwicklung signifikanten Terme

$\sum_n P_n(l_1, x_1, v_x)^2 \cdot \langle m|n\rangle \langle m'|n\rangle \cdot \langle m|z|m'\rangle$ in Abhängigkeit von m und m' . Die Diagonalelemente wurden der besseren Übersichtlichkeit wegen auf null gesetzt. Demnach tragen für die Zeitentwicklung der Wellenfunktion nach der Stufe im Wesentlichen drei verschiedene Terme bei. Die entsprechenden Frequenzen der Oszillationen des z -Erwartungswerts betragen $\omega_{3,4} = 1156.9 \text{ Hz}$, $\omega_{4,5} = 1057.6 \text{ Hz}$ und $\omega_{5,6} = 985.5 \text{ Hz}$. Der sich aus den Berechnungen ergebende Erwartungswert des Orts ist in Abbildung 3.16 gezeigt. Für die Berechnung der schwarzen Kurve wurden Neutronen mit $v_x = 6 \text{ m/s}$ angenommen. Es ist deutlich die schwebungsähnliche Struktur zu erkennen, allerdings in

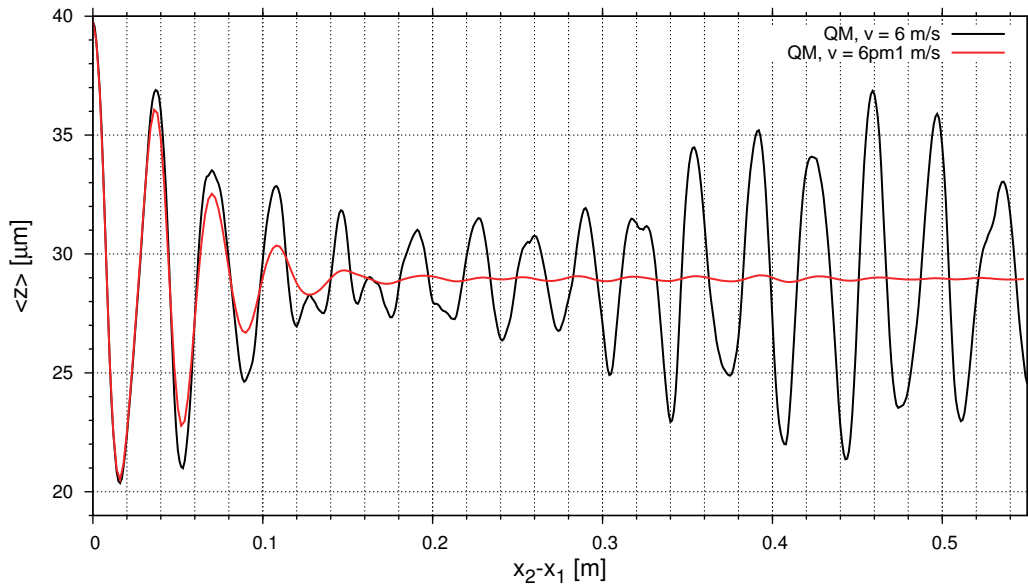


Abbildung 3.16: Erwartungswert des Orts nach der Stufe

diesem Fall etwas komplizierter durch das Auftreten dreier Frequenzen. Die rote Kurve zeigt dieselbe Kurve unter der Annahme, dass die Neutronen eine dreieckige Geschwindigkeitsverteilung in x -Richtung aufweisen (siehe Gleichung (3.29)). Es ist deutlich der Einfluss der Geschwindigkeitsverteilung zu sehen, der zu einer Dämpfung der Oszillationen des Erwartungswerts des Orts führt.

Schließlich sind in Abbildung 3.17 die Wellenfunktionen für verschiedene Längen der Glasplatte in Bereich II mit der klassischen Höhenverteilung verglichen. Die klassische Erwartung wurde mit Hilfe einer Monte-Carlo-Simulation berechnet (siehe Abschnitt 3.2). Die blauen Linien zeigen die Erwartung für monoenergetische Neutronen der Geschwindigkeit $v_x = 6 \text{ m/s}$. Die roten Kurven sind mit dem dreieckigen Geschwindigkeitsprofil (Gleichung (3.29)) gewichtet. Wie schon im Fall der kleinen Stufe sind die quantenmechanischen Wahrscheinlichkeitsdichten bei der klassisch maximal erlaubten Höhe von $58 \mu\text{m}$ noch nicht auf null abgefallen. Quantenmechanisch stellt dies jedoch aufgrund der Wahrscheinlichkeitsdeutung kein Problem dar.

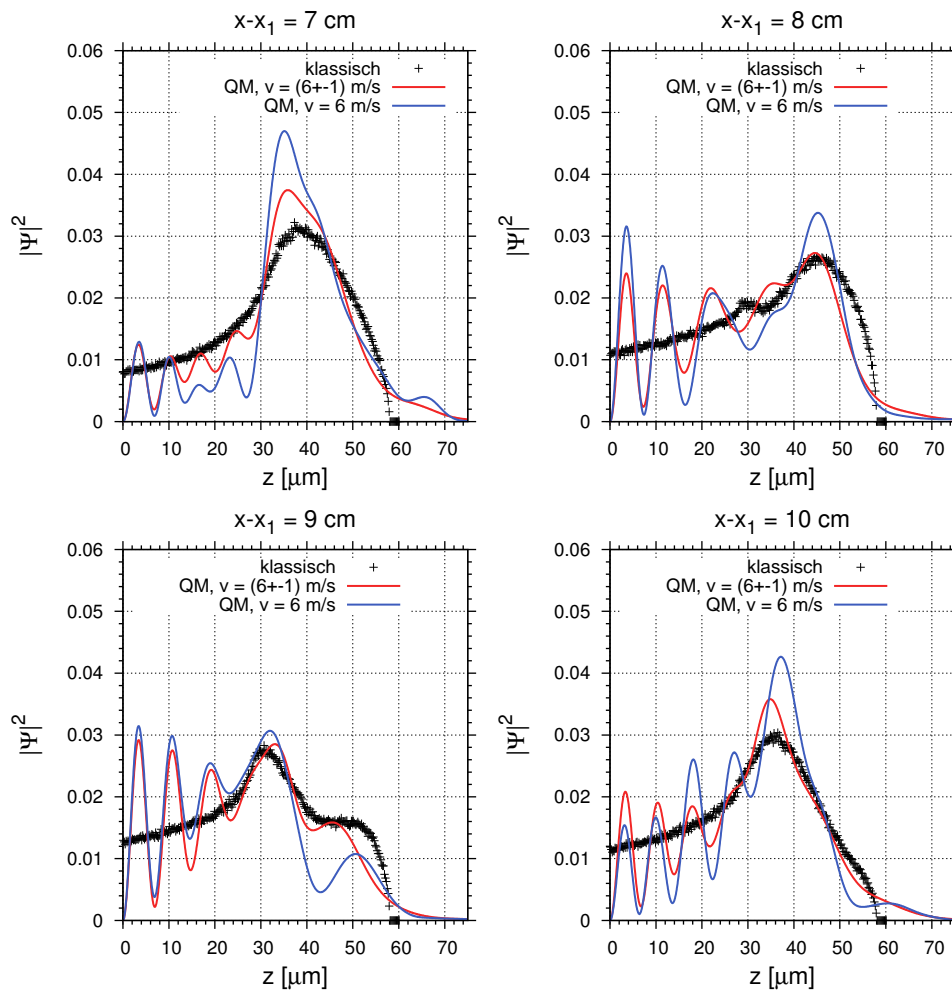


Abbildung 3.17: Vergleich der klassischen Höhenverteilung und der quantenmechanischen Wahrscheinlichkeitsdichte für verschiedene Längen der Glasplatte in Bereich II

Kapitel 4

Fünfte Kräfte und Extradimensionen der Raumzeit

4.1 Motivation

Alle bisher bekannten physikalischen Effekte lassen sich auf mindestens eine von vier fundamentalen Wechselwirkungen zurückführen. Drei dieser vier Wechselwirkungen - die elektromagnetische, die schwache und die starke - lassen sich mit Hilfe von Quantentheorien quantitativ erfolgreich beschreiben.

Alle Effekte der bereits von Sir Isaac Newton im 17. Jahrhundert entdeckten Gravitation lassen sich im Rahmen Albert Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie verstehen. Allerdings misslangen alle bisherigen Versuche, die Gravitation mit den herkömmlichen Methoden quantentheoretisch zu beschreiben.

Dies ist ein aus theoretischer Sicht sehr unbefriedigendes Ergebnis, weil heute allgemein davon ausgegangen wird, dass unsere Welt, in der wir leben, eine Quantenwelt darstellt. Bereits Max Planck konnte zeigen, dass es eine Skala für die Masse, die Länge und die Zeit gibt, ab der unsere jetzigen Theorien die Physik nicht mehr beschreiben können. Diese Grenzen ergeben sich, wenn die fundamentalen Konstanten Planck'sches Wirkungsquantum \hbar , Lichtgeschwindigkeit c und Gravitationskonstante G kombiniert werden. Diese Kombination ist eindeutig:

$$l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 1.62 \cdot 10^{-33} \text{ cm} \quad (4.1)$$

$$m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 1.22 \cdot 10^{19} \text{ GeV} \quad (4.2)$$

$$t_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 5.40 \cdot 10^{-44} \text{ s}. \quad (4.3)$$

Zu Ehren Max Plancks werden diese Größen Planck-Masse, Planck-Länge bzw. Planck-Zeit genannt, im Allgemeinen spricht man von der Planck-Skala.

Anschaulich entspricht m_P der Masse, die ein Teilchen besitzen muss, damit die Energie aus dem aus dieser Masse resultierenden Gravitationspotential der Ruheenergie desselben Teilchens entspricht. Die Planck-Masse entspricht der unvorstellbar großen Energie der Größenordnung 10^{19} GeV .

Die Planckskalen sind jedoch als eine Grenze zu verstehen, ab der eine neuartige Physik auftreten *muss*. Es spricht im Allgemeinen nichts dagegen, dass Effekte schon auf klei-

neren Energie- bzw. größeren Längen- und Zeitskalen auftreten.

Es gab und gibt viele Ansätze, eine Theorie zu entwickeln, die eine Quantentheorie darstellt, in einem Grenzwert aber die Allgemeine Relativitätstheorie enthält. Ein relativ junger, vielversprechender Ansatz sind Stringtheorien. Sie ersetzen die elementaren Punktteilchen durch in einer Dimension ausgedehnte Objekte mit verschwindender Dicke, sogenannte Strings. Jedes Elementarteilchen entspricht einer bestimmten Anregung dieser Strings.

Allerdings sind Stringtheorien nicht besonders anschaulich, da sie nicht in drei Raumdimensionen formuliert werden können, sondern mindestens sechs weitere *Extradimensionen* benötigen. Es gibt sogar Formulierungen, die noch mehr Dimensionen erfordern. Aus unserer alltäglichen Erfahrung wissen wir aber, dass die Welt aus drei Raumdimensionen - links-rechts, vorne-hinten, oben-unten - besteht und nicht aus zehn.

Trotzdem ist es prinzipiell nicht ausgeschlossen, dass unsere Welt tatsächlich aus mehr Dimensionen besteht, als es unserer Erfahrung entspricht. So kann man sich vorstellen, dass die Extradimensionen kompaktifiziert sind. Eine kompaktifizierte Dimension ist vorstellbar als ein Blatt Papier, welches zu einem Zylinder oder einem Torus aufgerollt ist. Ist der Radius des Zylinders, der Kompaktifizierungsradius, sehr klein gegenüber der Zylinderlänge, so erscheint das Gebilde aus großer Entfernung eindimensional. Ein sehr kleines Lebewesen, welches sich auf der Zylinderoberfläche bewegt, würde aber nach wie vor zwei Dimensionen sehen!

Es stellt sich die Frage, ob es möglich ist, die Anzahl der Raumdimensionen unserer Welt zu bestimmen, wenn man derartige kompaktifizierte Extradimensionen einbezieht. Damit könnten dann existierende Stringtheorien experimentell unterstützt oder aber auch widerlegt werden.

Tatsächlich ist dies zum Beispiel mit Gravitationsexperimenten der Fall. Dies soll im Folgenden anhand von Abbildung 4.1 gezeigt werden. Eine Massendichte ρ_m ist die Quelle eines Gravitationsfeldes \vec{E}_{grav} :

$$\operatorname{div} \vec{E}_{grav} = \rho_m. \quad (4.4)$$

Analog der Argumentation in der Elektrodynamik kann man die Massendichte durch eine gedachte Hyperfläche eingrenzen. Integriert man die Gleichung über den gesamten Raum, der von der Hyperfläche eingeschlossen wird, so erhält man auf der rechten Seite die Masse M . Die linke Seite der Gleichung lässt sich mittels des Gauß'schen Satzes in n -Dimensionen umformen:

$$\int_A d\vec{F} \cdot \vec{E}_{grav} = M. \quad (4.5)$$

Damit ist das Gravitationsfeld zu r^{1-n} und das Gravitationspotential zu

$$\phi_{grav} \propto \frac{1}{r^{n-2}} \quad (4.6)$$

proportional. n bezeichne die Anzahl der Dimensionen. In Entfernungen viel größer des Kompaktifizierungsradius $r \gg R$ ergibt sich dann das bekannte $1/r$ -Potential, welches zur $1/r^2$ -Kraft führt, wie sie schon von Newton beschrieben wurde. In Entfernungen

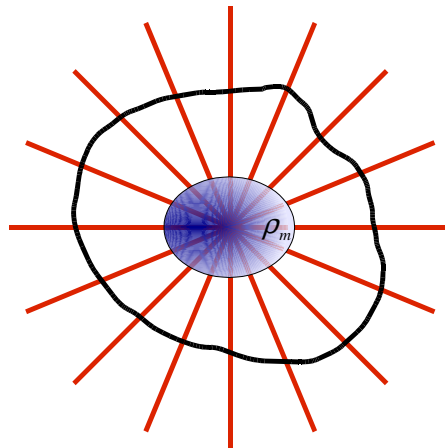


Abbildung 4.1: Eine Massendichte ρ_m erzeugt ein Gravitationsfeld. Die Anzahl der Raumdimensionen bestimmt das Gravitationspotential.

$r \ll R$ muss das Gravitationspotential jedoch modifiziert werden. Dies führt zu einer Veränderung des Kraftgesetzes und damit zu neuer Physik.

Zuerst vermutete man den Kompaktifizierungsradius in der Größenordnung der Planck-Länge, was Experimente aussichtslos erscheinen lässt. Seit Mitte der Neunziger Jahre wird jedoch die Einführung des Kompaktifizierungsradius als freier Parameter [2, 3] bevorzugt. Im Jahr 1998 sorgte eine Veröffentlichung von N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos und G. Dvali für Aufsehen, die auf dieser Annahme ein Stringszenario entwickelten, das Extradimensionen im sub-mm-Bereich ermöglicht [1].

Für die Parametrisierung der Nicht-Newtonschen Gravitation hat sich ein yukawa-artiger Potentialterm eingebürgert:

$$V_5(r) = \alpha \cdot e^{-r/\lambda}. \quad (4.7)$$

Hierbei bezeichnet α die Stärke des Potentials in Vielfachen der Stärke der Newton'schen Gravitation. Der Parameter λ entspricht der Reichweite des Potentials.

Die yukawa-artige Form des Potentials ist lediglich Konvention und historisch bedingt. Sie kommt daher, dass in den 80er Jahren nach einer weiteren fundamentalen Wechselwirkung mit einem massiven Austauscheteilchen gesucht wurde, was den yukawa-artigen Potentialverlauf erklärt. Die hypothetische fünfte Wechselwirkung ging als *Fünfte Kraft* in die Literatur ein. Für die stringtheoretisch motivierte Suche nach Nicht-Newtonscher Gravitation wählt man heute meist dasselbe Potential, um die Ergebnisse mit den früheren Experimenten vergleichen zu können. Außerdem stellt das Potential eine im Allgemeinen nicht zu schlechte Näherung im Vergleich zu einer $1/r^n$ -Abhängigkeit dar und ist mit seinen zwei freien Parametern mathematisch recht einfach zu handhaben und .

Abbildung 4.2 zeigt den momentan aktuellen experimentellen Ausschließungsplot für Fünfte Kräfte und damit für Abweichungen vom Newtonschen Gravitationsgesetz [12].

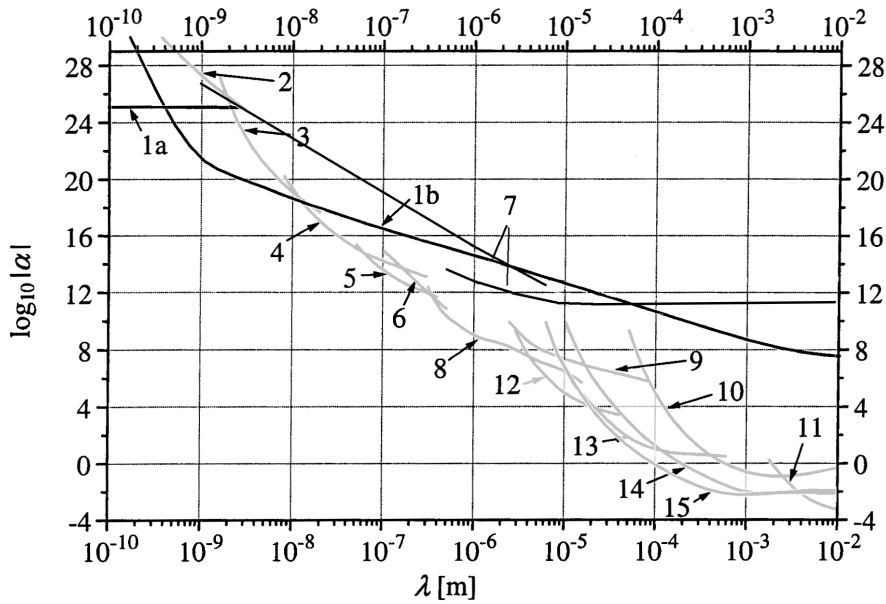


Abbildung 4.2: Ausschließungsplot für Fünfte Kräfte

Die den Kurven zugehörigen Experimente sind in [12] aufgeführt. Der Graph ist doppelt-logarithmisch, es ist die Stärke α gegen die Reichweite λ aufgetragen. Der Bereich überhalb einer eingezeichneten Kurve gilt mit 95% Konfidenz als von dem zugehörigen Experiment ausgeschlossen.

Die Kurven 10 bis 15 wurden aus mechanischen Pendelexperimenten abgeleitet. Sie wurden von den Experimentatoren selbst ausgewertet und gelten als verlässlich. Die Kurven 3 bis 6 sowie 8 und 9 stammen aus Casimirkraftmessungen, Kurve 2 aus einer Messung der van-der-Waals-Kraft. Die Kurven 1 und 7 leiten sich aus Messungen mit Neutronen ab. Für Abstände kleiner als 10^{-8} m stellt eine Messung mit Neutronen die bislang beste Grenze dar.

Kurve 7 ist die Kurve, die aus unseren bisherigen Versuchen stammt[13]. Hierfür wurde die Transmission durch das Absorber-Glasplatte-System in Bereich I integral bestimmt. Im Intervall der Reichweite dieser Kurve, also zwischen $5 \cdot 10^{-6}$ und $10^{-5} \mu\text{m}$, liegt Kurve 8 deutlich unter dem von Kurve 7 gesetzten Limit. Die experimentelle Grundlage von Kurve 8 und 9 ist ein und dieselbe Messung der Casimirkraft von S. K. Lamoreaux. Die Berechnung der Grenzen auf Fünfte Kräfte wurde von verschiedenen Autoren verschieden bestimmt [14, 15]. Die Ergebnisse gelten aus diesem Grund als nicht sehr verlässlich[12].

Es wird in den nächsten Abschnitten gezeigt, inwiefern unser Experiment prinzipiell auf Nicht-Newtonsche Gravitation sensitiv ist und wie die bestehenden Grenzen verbessert werden können.

4.2 Störungstheorie

Die Schrödingergleichung ist mit dem linearen Newtonschen Gravitationspotential und dem exponentiellen Potential der Fünften Kraft nicht mehr exakt lösbar. Das Potential der Fünften Kraft ist jedoch viel kleiner als das Newtonsche, weshalb sich ein zeitunabhängiger störungstheoretischer Ansatz als Näherung empfiehlt.

Im Folgenden betrachten wir eine Schar von nicht explizit zeitabhängigen Hamiltonoperatoren

$$H(\epsilon) = H_0 + \epsilon H', \quad \epsilon \in [0, 1]. \quad (4.8)$$

H_0 sei viel größer als H' . Die Schrödingergleichung sei für H_0 gelöst. Das Eigenwert-spektrum sei diskret und nicht entartet.

Die Schrödingergleichung lautet dann

$$H(\epsilon)|n(\epsilon)\rangle = E_n(\epsilon)|n(\epsilon)\rangle. \quad (4.9)$$

Idee der Störungstheorie ist es, eine Reihenentwicklung in ϵ durchzuführen, indem der Ansatz

$$E_n(\epsilon) = E_n^{(0)} + \epsilon E_n^{(1)} + \epsilon^2 E_n^{(2)} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i \cdot E_n^{(i)} \quad (4.10)$$

$$|n(\epsilon)\rangle = |n^{(0)}\rangle + \epsilon |n^{(1)}\rangle + \epsilon^2 |n^{(2)}\rangle + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i \cdot |n^{(i)}\rangle \quad (4.11)$$

in Gleichung (4.9) eingesetzt wird und die Terme nach der Ordnung von ϵ sortiert werden. Es kann o.B.d.A. angenommen werden, dass die Funktionen $|n^{(i)}\rangle$ orthogonal sind, da es andernfalls zueinander proportionale Anteile geben muss, die zusammengezogen werden können.

Lässt man in der Reihenentwicklung nur Terme in nullter Ordnung von ϵ zu, so ergibt sich einfach die ungestörte Schrödingergleichung, die nach Voraussetzung bereits gelöst ist. In erster Ordnung der Reihenentwicklung erhält man

$$\epsilon \cdot \left[\left(H_0 - E_n^{(0)} \right) |n^{(1)}\rangle + \left(H' - E_n^{(1)} \right) |n^{(0)}\rangle \right] = 0. \quad (4.12)$$

Die Multiplikation mit $\langle n^{(0)}|$ von links ergibt

$$E_n^{(1)} = \langle n^{(0)}|H'|n^{(0)}\rangle \quad (4.13)$$

und damit den Shift der Eigenenergien in erster Ordnung. Diese Entwicklung wird für $\epsilon \rightarrow 1$ gut sein, wenn die Energiedifferenzen des ungestörten Systems klein gegenüber den Matrixelementen von H' sind. Führt man dieselbe Multiplikation mit $\langle m^{(0)}|$ mit $m \neq n$ durch, dann erhält man die erste Ordnung der gestörten Wellenfunktion:

$$\langle m^{(0)}|n^{(1)}\rangle = - \frac{\langle m^{(0)}|H'|n^{(0)}\rangle}{E_m^{(0)} - E_n^{(0)}} \quad (4.14)$$

$$\Rightarrow |n^{(1)}\rangle = \sum_{m \neq n} |m^{(0)}\rangle \langle m^{(0)}|n^{(1)}\rangle = - \sum_{m \neq n} |m^{(0)}\rangle \cdot \frac{\langle m^{(0)}|H'|n^{(0)}\rangle}{E_m^{(0)} - E_n^{(0)}}. \quad (4.15)$$

Die entstehenden Zustände $|n(\epsilon)\rangle$ müssen noch normiert werden.

Die höheren Glieder der Reihenentwicklung lassen sich analog berechnen. Für den Energieshift in zweiter Ordnung ergibt sich

$$E_n^{(2)} = - \sum_{m \neq n} \frac{\langle n^{(0)} | H' | m^{(0)} \rangle \langle m^{(0)} | H' | n^{(0)} \rangle}{E_m^{(0)} - E_n^{(0)}}. \quad (4.16)$$

Bei diesem Ansatz handelt es sich um eine formale Reihe, die tatsächliche Konvergenz bleibt zu zeigen.

4.2.1 Das Störpotential H'

Das verallgemeinerte Gravitationspotential lautet in Kugelkoordinaten mit dem Ansatz einer Fünften Kraft in Yukawaform

$$\phi(r) = -\frac{G_4 M}{r} (1 + \alpha \cdot e^{-\frac{r}{\lambda}}). \quad (4.17)$$

G_4 bezeichnet die Gravitationskonstante, M die Erdmasse, α die Stärke der Wechselwirkung der Fünften Kraft und λ ihre Reichweite.

In unserem Experiment benutzen wir wie gehabt eine ebene Glasplatte als Potentialbarriere bei $z = 0$. Sie entspricht, verglichen mit der Größe eines Neutrons, in guter Näherung einer unendlich ausgedehnten Massenverteilung der Dichte ρ , die sich über $-\infty < x, y < \infty$ und $-\infty < z < 0$ erstreckt.

Ersetzt man in (4.17) die Erdmasse durch $M = \int dV \rho$ und transformiert in Zylinderkoordinaten $r \rightarrow (r'^2 + (z - z')^2)^{1/2}$, so ergibt sich für den yukawaähnlichen Anteil

$$\phi(z) = -\alpha G_4 \rho \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-\infty}^0 dz' \int_0^{\infty} dr' r' \frac{e^{-\frac{\sqrt{r'^2 + (z-z')^2}}{\lambda}}}{\sqrt{r'^2 + (z-z')^2}}. \quad (4.18)$$

Die Integration über den Winkelanteil gibt einen Faktor 2π . Das Integral über r' lässt sich mit Hilfe der Substitution $u(r') = [r'^2 + (z - z')^2]^{(1/2)}$ lösen. Es ergibt sich

$$\phi(z) = -2\pi\alpha\lambda G_4 \rho \int_{-\infty}^0 dz' e^{-\frac{|z-z'|}{\lambda}}. \quad (4.19)$$

Für $z > 0$ erhält man das uns interessierende Störpotential

$$V(z) = m\phi(z) = 2\pi\alpha\lambda^2 G_4 m \rho e^{-z/\lambda} \quad (4.20)$$

mit der Neutronenmasse m .

Es ist geschickt, die gesamte Schrödingergleichung wie in Abschnitt 2.2.2 zu skalieren, um mit dimensionslosen Größen zu rechnen. Das Argument der Exponentialfunktion muss dimensionslos sein, daher skaliert sich λ genau wie z :

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{z_0}. \quad (4.21)$$

α ist bereits dimensionslos und wird so belassen. Für ρ wird eine ähnliche Skalierung wie für λ verwendet:

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}. \quad (4.22)$$

Mit diesem Ansatz kann die Konstante ρ_0 frei gewählt werden. Dies geschieht so, dass die Schrödingergleichung komplett dimensionslos ist. Nach kurzer Rechnung ergibt sich

$$\rho_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{\hbar^2}{2m} z_0^2 \frac{1}{z_0^2 G_4 m} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{z_0} \frac{g}{G_4} \approx 3.9797 \frac{g}{\mu m^3}. \quad (4.23)$$

Das Störpotential hat dann die folgende Form:

$$V_a(z) = \alpha \tilde{\lambda}^2 \tilde{\rho} \cdot e^{-\tilde{z}/\tilde{\lambda}}. \quad (4.24)$$

Für den Fall, dass sich über der Glasplatte noch ein Absorber bei $z = z_{abs}$ befindet, muss das Potential dementsprechend modifiziert werden:

$$V_b(z) = \alpha \tilde{\lambda}^2 \left(\tilde{\rho}_1 \cdot e^{-\tilde{z}/\tilde{\lambda}} + \tilde{\rho}_2 \cdot e^{-(\tilde{z}-\tilde{z}_{abs})/\tilde{\lambda}} \right). \quad (4.25)$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird im Folgenden die Tilde über den Variablen weggelassen.

4.2.2 Berechnung und Diskussion der Energieeigenwerte

Die Berechnung der gestörten Energieeigenwerte in erster und zweiter Ordnung reduziert sich auf die Berechnung der ungestörten Eigenwerte und der Matrixelemente $\langle n|H'|m\rangle$. Die ungestörte Lösung ist bereits bekannt, die Matrixelemente müssen numerisch berechnet werden. Prinzipiell sind zwei mögliche Konfigurationen zu unterscheiden:

- Ohne obere Platte beträgt das Störpotential in dimensionsloser Darstellung $V_a(z)$. Energien und Eigenzustände des ungestörten Systems entsprechen denen in Abschnitt 2.2.2, als der Freie Fall ultrakalter Neutronen quantenmechanisch betrachtet wurde.
- Mit oberer und unterer Platte ergibt sich dagegen das Störpotential $V_b(z)$. Das zugehörige ungestörte System wurde ausführlich in Abschnitt 3.1.2 diskutiert.

Für die folgenden Berechnungen wird - insofern nicht anders angegeben - eine Reichweite der Fünften Kraft von

$$\lambda = 1 \equiv 5.87 \mu m \quad (4.26)$$

und eine Stärke von

$$\alpha = 10^{11} \quad (4.27)$$

angenommen. Interessant ist in beiden Fällen der Einfluss der Dichte der Platte(n). Mit diesem Parameter hat man direkten Einfluss auf die Energieshifts. Es ist zum Beispiel möglich, die Glasplatte(n) mit einer mehrere Mikrometer dicken Schicht aus Gold

($\rho = 19.3 \text{ g/cm}^3$), Uran ($\rho = 19.2 \text{ g/cm}^3$) oder Platin ($\rho = 21.5 \text{ g/cm}^3$) zu beschichten und dann eine Replikatechnik anzuwenden. Dadurch könnte man eine Oberfläche herstellen, die dieselbe Rauheit und Ebenheit wie eine normalerweise verwendete Glasplatte aufweist, aber eine deutlich höhere Dichte hat. Die Energieshifts und damit die Effekte durch Fünfte Kräfte wären demnach einen Faktor 7.7 für Gold oder Uran bzw. 8.5 für Platin größer.

Energieeigenwerte unter Berücksichtigung von $V_\alpha(z)$ Abbildung 4.3 zeigt die in erster Ordnung gestörten Energieeigenwerte des ersten (Plot [1] und [3]) bzw. zweiten (Plot [2] und [4]) Zustands in Abhängigkeit der Parameter α und λ . Die zweite Ordnung der Reihenentwicklung der Störung ist gegenüber der ersten vernachlässigbar klein. Für die oberen Plots besteht die Platte bei $z = 0$ aus BK7-Glas, für die unteren aus Platin. Die Färbung ist in allen vier Plots gleich gewählt. Eine 10%-Abweichung vom

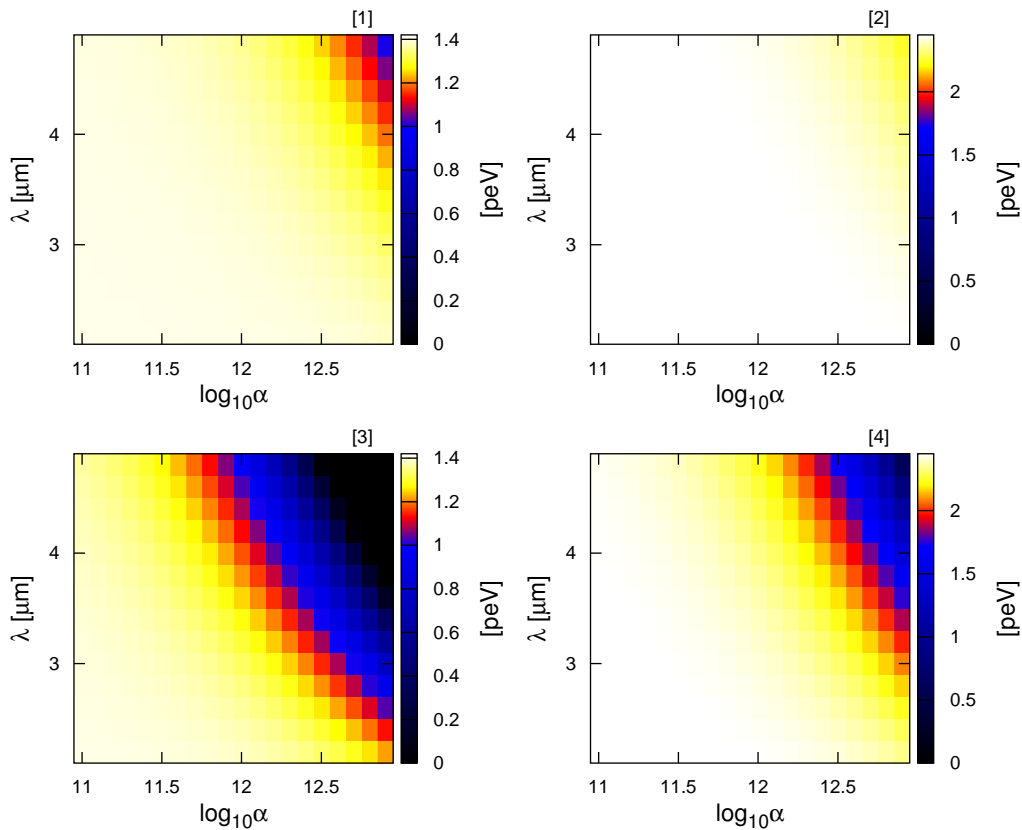


Abbildung 4.3: Energieeigenwerte in erster Ordnung Störungstheorie: 1. Zustand mit BK7-Glasplatte [1] bzw. platinbeschichteter Platte [3]; 2. Zustand mit BK7-Glasplatte [2] bzw. platinbeschichteter Platte [4]

ungestörten Energieeigenwert erscheint in gelb, 20% in rot, 30% in blau und alles darüber in schwarz. In diesem Fall gelten die Annahmen der Störungstheorie nicht mehr ohne Weiteres. Es ist deutlich zu sehen, wie sich verschiedene Dichten der Materialien auf die gestörten Energieeigenwerte auswirken.

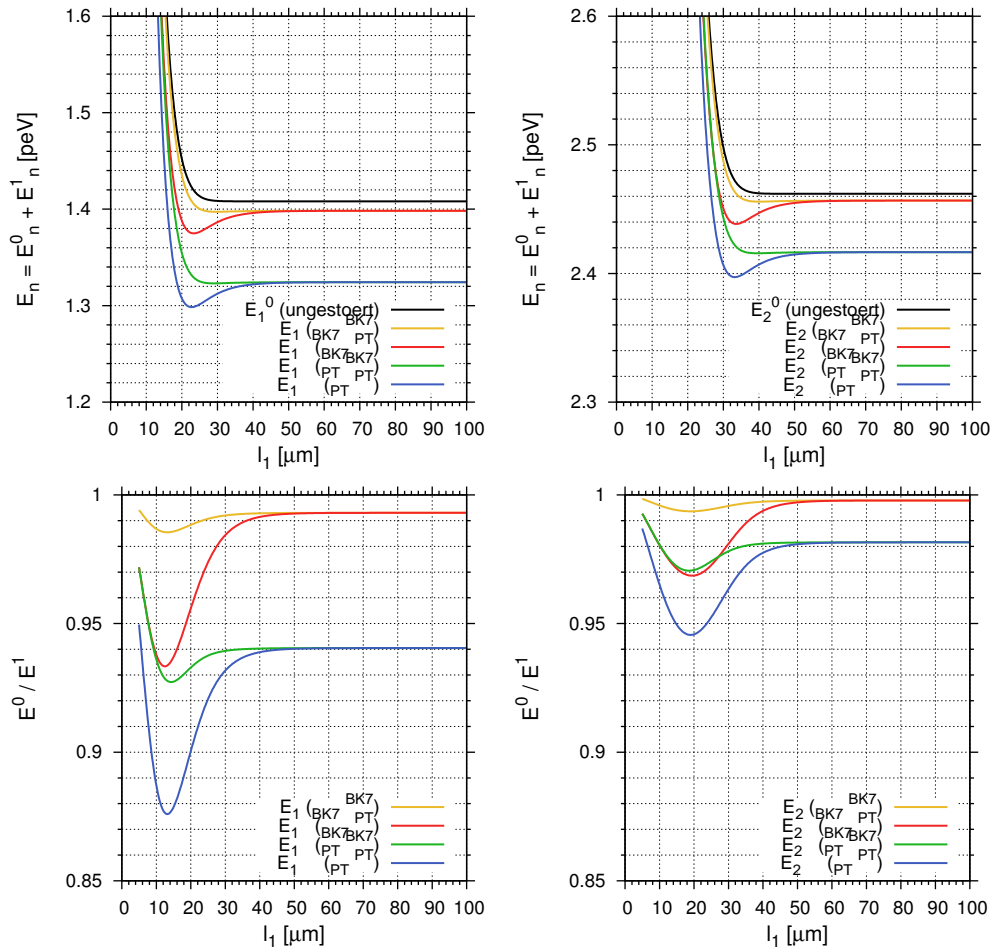


Abbildung 4.4: Vergleich der gestörten und ungestörten Energieeigenwerte des ersten (links) bzw. zweiten (rechts) Zustands. Unten links bzw. unten rechts ist der Quotient aus gestörtem und ungestörtem Eigenwert gezeichnet. Die Rechnungen erfolgten mit $\alpha = 10^{11}$ und $\lambda = 1 \equiv 5.87 \mu\text{m}$.

Energieeigenwerte unter Berücksichtigung von $V_b(z)$ Abbildung 4.4 zeigt oben links die Energie des ersten Zustands für ein System aus zwei Platten im Abstand l_1 in Abhängigkeit dieses Abstands. Die oberste (schwarze) Kurve zeigt die Grundzustandsenergie des ungestörten Systems, E_1^0 . Die anderen vier Kurven entsprechen dem System in erster Ordnung Störungstheorie mit verschiedenen Konfigurationen der Platten. Die zweite Ordnung der Reihenentwicklung der Störung ist vernachlässigbar klein.

Für die gelbe Kurve wurden zwei BK7-Glasplatten simuliert, die grüne Kurve entspricht zwei Platinplatten. Beide zeigen qualitativ dasselbe Ergebnis wie die ungestörte Lösung, allerdings sind die Energiewerte verschoben.

Die rote Kurve entspricht der Grundzustandsenergie in einem System, in dem die untere Platte aus Glas, die obere aus Platin besteht. Die blaue Kurve zeigt den umgekehrten Fall. Beide Kurven zeigen ein qualitativ anderes Verhalten - zu den Energieshifts kommt noch eine Verbiegung der Kurve hinzu.

Die rechte Seite von Abbildung 4.4 zeigt dieselben Berechnungen für den zweiten Energiezustand. Qualitativ ist dasselbe Ergebnis ersichtlich.

Die Wahl des Plattenabstands l_1 legt fest, wie stark die Fünfte Kraft den Energieeigenwert beeinflusst. Um einen optimalen Abstand zu bestimmen, ist der untere Teil von Abbildung 4.4 hilfreich. Auf der linken Seite ist der Quotient aus gestörtem und ungestörtem System für den Grundzustand gezeigt, auf der rechten Seite für den Zustand $n = 2$. Der prozentuale Unterschied wird im Allgemeinen mit steigender Zustandszahl geringer. Außerdem verschiebt sich das Minimum der Kurve weiter nach rechts.

Die Abweichung vom ungestörten System ist am größten, wenn die untere Platte aus einem schweren Material besteht. In unserem Experiment kommen bedingt durch die Präparation der Zustände in Bereich I Linearkombinationen der ersten beiden Zustände vor. Deshalb sollte der Abstand der Glasplatten optimalerweise im Bereich zwischen 10 und 30 μm liegen. Zu geringe Plattenabstände bedeuten jedoch auch, dass die Transmission exponentiell abnimmt. Um mit ausreichender Statistik messen zu können, darf der Plattenabstand daher nicht zu klein gewählt werden.

4.2.3 Bestimmung der gestörten Eigenzustände

Mit Hilfe der im vorangegangenen Abschnitt berechneten gestörten Energieeigenwerte können nun die gestörten Eigenfunktionen gemäß Gleichung (4.15) auf Seite 51 berechnet werden. Es muss wieder unterschieden werden, ob eine zweite, obere Platte eingesetzt wird oder nicht.

Eigenzustände unter Berücksichtigung von $V_\alpha(z)$ Für den Fall, dass es nur bei $z = 0$ eine Platte aus BK7-Glas gibt, ergeben sich für verschiedene α die Eigenzustände in Abbildung 4.5. Im Vergleich dazu zeigt Abbildung 4.6 dieselben Zustände bei Verwendung einer platinbeschichteten Platte. Es sind deutlich stärkere Verbiegungen der Zustände

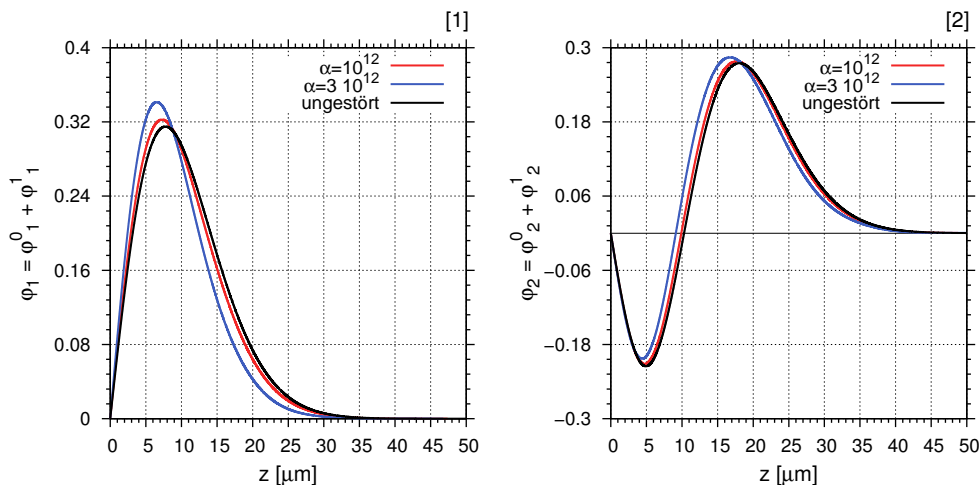


Abbildung 4.5: Die Graphen zeigen links den Grundzustand und rechts den zweiten Zustand für verschiedene Stärken α , die Platte besteht aus BK7-Glas. Der jeweilige ungestörte Zustand ist in schwarz aufgetragen.

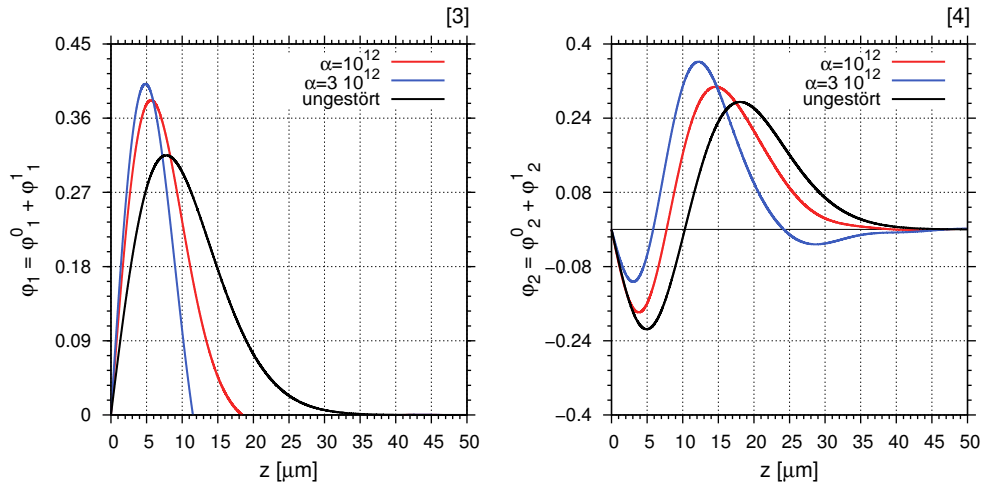


Abbildung 4.6: Die Graphen zeigen links den Grundzustand und rechts den zweiten Zustand für verschiedene Stärken α , die Platte ist platinbeschichtet. Der jeweilige ungestörte Zustand ist in schwarz aufgetragen.

bei gleicher Stärke der Fünften Kraft zu erkennen. So ist zum Beispiel der Nulldurchgang des zweiten Zustands viel stärker nach links verschoben. Auch das Verhältnis der Extrema der Zustände verändert sich stärker. Alle Berechnungen erfolgten für eine Reichweite $\lambda = 1 \equiv 5.87 \mu\text{m}$.

Eigenzustände unter Berücksichtigung von $V_b(z)$ Abbildung 4.7 zeigt im oberen Teil den ersten bzw. zweiten Eigenzustand in Abhängigkeit der Stärke der Fünften Kraft im Vergleich zur ungestörten Lösung (schwarz). Beide Platten bestehen aus Glas. Es ergibt sich eine kleine Verschiebung der Maxima bzw. des Nulldurchgangs der Zustände. Wie zu erwarten erhält man einen deutlich größeren Effekt für die Plattenkonfigurationen mit Beschichtung. Dies ist in den unteren beiden Plots in derselben Abbildung dargestellt. Alle Berechnungen der unteren Graphen entstanden für $\alpha = 10^{12}$ und $\lambda = z_0 = 5.87 \mu\text{m}$. Die Glasplatten wurden wie in der Legende der Graphen angegeben teilweise durch Platten ersetzt, die mit dem schweren Material Platin in ausreichender Dicke beschichtet wurden.

Die Zustände mit unbeschichteten Glasplatten, in gelb gezeichnet, unterscheiden sich nur minimal von der ungestörten Lösung in schwarz. Die stärkste Verbiegung tritt für die grünen Kurven auf. Hier ist die untere Platte mit Platin beschichtet, während die obere unbeschichtet blieb. Dies führt zu einer lokal 8.5-fach stärkeren Anziehung im unteren Bereich und im Resultat zu Zuständen, die um einige Mikrometer zu kleinen z -Werten verschoben sind.

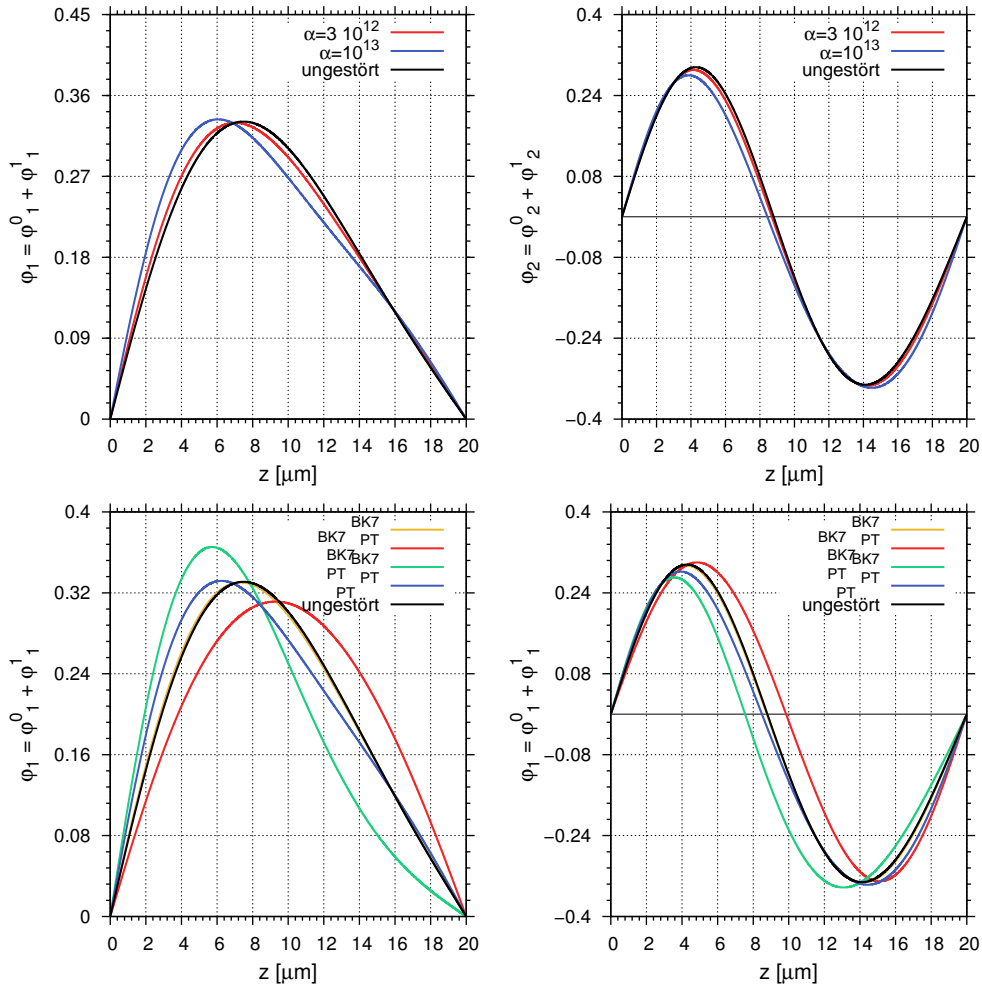


Abbildung 4.7: Die Graphen zeigen oben links den Grundzustand und oben rechts den zweiten Zustand für verschiedene Stärken α . Unten sind dieselben Zustände für verschiedene Kombinationen des Materials der Platten gezeigt. BK7 bezeichnet das von uns verwendete Glas, Pt steht für Platin. Der jeweilige ungestörte Zustand ist in schwarz aufgetragen.

4.3 Simulation konkreter Experimente

Im Folgenden sollen Vorschläge für Experimente gemacht werden, mit denen Tests auf Fünfte Kräfte durchführbar sind. Alle Experimente beruhen auf dem Effekt, dass Fünfte Kräfte wie im vorangegangenen Abschnitt gezeigt die Eigenzustände ultrakalter Neutronen und damit die Wellenfunktion verändern. Es müssen nun Messstrategien entwickelt und dann die Parameter des Setups optimiert werden, um die Sensitivität auf Fünfte Kräfte zu maximieren.

Ein wichtiger Gesichtspunkt ist neben der Sensitivität auch die Statistik. So werden die Verbiegungen der Wellenfunktion durch Fünfte Kräfte am größten, wenn die Spaltbreite zwischen zwei Platten sehr klein wird. Dann nimmt aber auch die Transmission exponentiell ab und die Statistik wird zu schlecht, um in endlicher Messzeit sinnvolle Schlüsse aus dem Experiment ziehen zu können.

Prinzipiell gibt es zwei Möglichkeiten der Messung:

- **Integralmessung**

Als Detektor wird ein einfaches Zählrohr verwendet. Es wird versucht, eine Konfiguration zu finden, so dass die Transmission der Neutronen von der Fünften Kraft empfindlich abhängt.

- **Ortsaufgelöste Messung**

Die Wahrscheinlichkeitsdichte wird mit Hilfe eines ortsauffösenden Detektors bestimmt und mit der ungestörten Erwartung verglichen. Anhaltspunkte liefern beispielsweise die relative Lage von Minima oder Maxima der Wahrscheinlichkeitsdichte.

Es ist außerdem wichtig, dass alle in den Berechnungen getroffenen Annahmen und Vereinfachungen als mögliche Fehlerquellen betrachtet werden.

4.3.1 Versuch I: Transmissionsmessung

Die Transmission ultrakalter Neutronen durch ein System bestehend aus einer Platte bei $z = 0$ und einem Absorber in der Höhe z_{abs} ist sensitiv auf Fünfte Kräfte. Den schematischen Versuchsaufbau eines Experiments, das diesen Effekt messen könnte, zeigt Figur 4.8. Der Aufbau besteht nur aus einer Platte, einem Absorber und einem Integralzähler. Platte und Detektor haben den Abstand l_1 und die Länge x_1 , die Neutronen weisen eine Geschwindigkeitsverteilung in x-Richtung auf, die unabhängig vom Experiment bestimmt werden muss. Für die Berechnungen wird die bekannte Dreiecksverteilung (3.29) verwendet.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der n-te Eigenzustand das Platte-Absorber-System durchlaufen kann, beträgt nach Gleichung (3.20)

$$|P_n(l_1, x_1, v)|^2 = e^{-\alpha_{loss} \cdot \Gamma_n(l_1) \cdot x_1/v}. \quad (4.28)$$

Die Gesamttransmission beträgt daher

$$T_{qm} = T_0 + \sum_n |P_n(l_1, x_1, v)|^2. \quad (4.29)$$

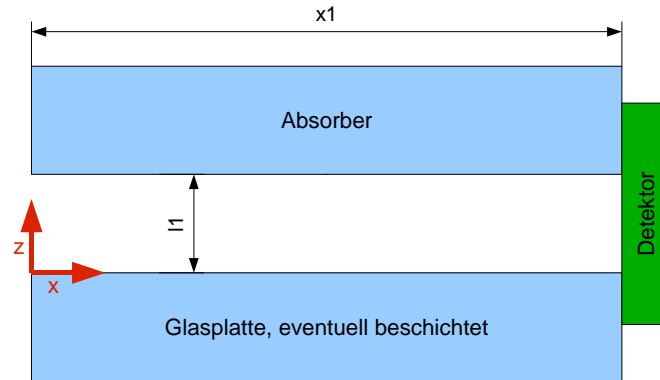


Abbildung 4.8:

T_0 entspricht dem Untergrund des Detektors. Diese Kurve steht im Widerspruch zur klassischen Erwartung der Transmission T_{klass} , die nach Gleichung (3.34) proportional zu $l_1^{3/2}$ ist. Eine Kollaboration zwischen der Universität Heidelberg und dem Institut Laue-Langevin in Grenoble/ Frankreich konnte in verschiedenen Experimenten [16, 17] zeigen, dass die klassische Erwartung nicht zutrifft und die quantenmechanische Berechnung die Daten beschreiben kann. Es konnten auch bereits Grenzen auf Fünfte Kräfte gesetzt werden[13]:

$$\alpha = 5 \cdot 10^{12} \quad \text{bei} \quad \lambda = 5 \mu\text{m}. \quad (4.30)$$

Die Sensitivität auf Fünfte Kräfte ergibt sich dadurch, dass sich

$$\Gamma_n(l_1) = \int_{z_{abs}-2\sigma}^{z_{abs}} dz \quad \varphi_n^* \cdot \varphi_n \quad (4.31)$$

bei Einbeziehung der Fünften Kräfte ändert.

Das Ergebnis der Berechnungen zeigt 4.9. Die blaue Kurve zeigt die klassische Erwartung, die schwarze Kurve die quantenmechanische. Die orange Kurve entspricht dem quantenmechanischen Ergebnis unter Einbeziehung von Fünften Kräften einer Reichweite von $\lambda = 1 \equiv 5.87 \mu\text{m}$ und einer Stärke von $\alpha = 10^{12}$. Die Abweichung von der schwarzen Kurve ist zu sehen, aber sehr klein. Dieselbe Rechnung mit einem α von 10^{13} , in rot gezeichnet, zeigt sie deutlicher. Verbessert werden kann die Messung, wenn statt der unteren Glasplatte eine mit einem schweren Material beschichtete Platte verwendet wird. Die Schichtdicke sollte am besten ein Vielfaches der angenommenen Reichweite der Fünften Kraft sein, damit das Neutron nicht eine effektive Dichte spürt. Solche Schichten sind allerdings nicht leicht herzustellen, da die Oberfläche trotz allem eine genügend kleine Rauheit und Ebenheit aufweisen muss. In Frage kommt für Schichtdicken über zwei μm eine Replikatechnik. Hierbei wird die Glasplatte genügend dick beschichtet. Im Anschluss wird ein haftendes Material auf die Beschichtung aufgebracht und beides vorsichtig von der Glasplatte abgelöst. Es entsteht eine Oberfläche, die dieselben Eigenschaften wie die Glasplatte aufweist.

Ob eine solche Platte im Rahmen des momentan technisch möglichen und bezahlbaren

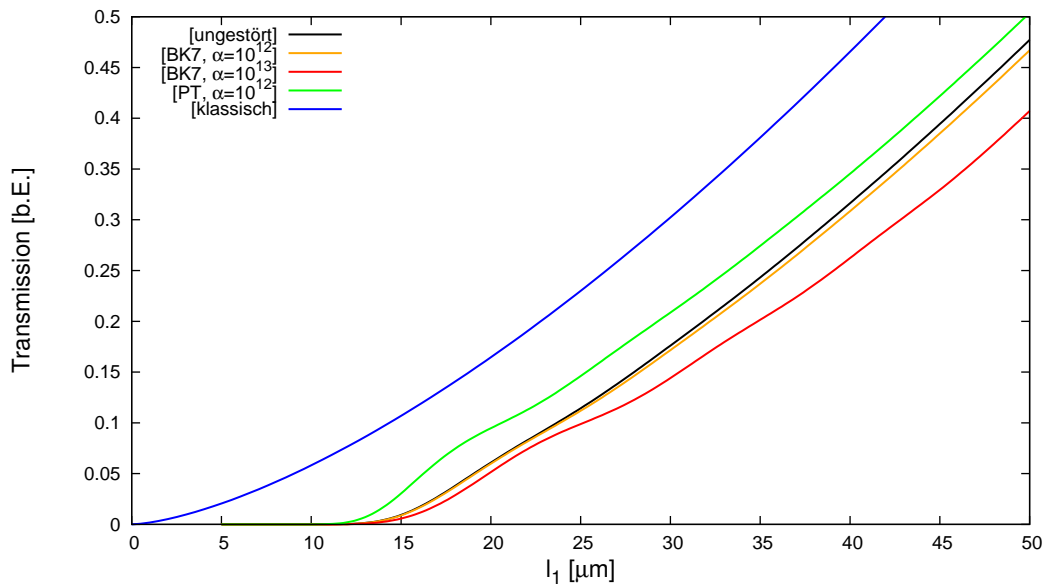


Abbildung 4.9: Ergebnisse der Berechnung der Transmission in Abhängigkeit von l_1

tatsächlich hergestellt werden kann, ist bisher noch unklar. In naher Zukunft sollen jedoch erste Tests erfolgen.

Die Kurve in grün zeigt das Ergebnis für eine platinbeschichtete untere Glasplatte bei der Berechnung mit denselben Parametern.

Es ist auffällig, dass die Transmissionskurven mit den BK7-Glasplatten unter der quantenmechanischen Erwartung liegen, die Kurve mit der beschichteten Platte jedoch darüber, obwohl in beiden Fällen mit positiven α gerechnet wurde. Anschaulich ist dies jedoch sofort einsichtig:

Die Fünften Kräfte bewirken eine lokal größere Anziehung nahe der Oberflächen der Platten. Im ersten Fall ist diese Anziehung symmetrisch, da beide Platten aus demselben Material bestehen. Da die Wahrscheinlichkeit, dass ein Neutron aus dem Experiment gestreut ist, proportional zur Aufenthaltswahrscheinlichkeit in der Nähe des „Absorbers“ ist, liegt die so berechnete Transmissionskurve unterhalb der Erwartung.

Im anderen Fall ist die zusätzliche Anziehung durch Fünfte Kräfte asymmetrisch, die Zustände werden viel stärker nach unten gezogen als nach oben. Daher sinkt die Aufenthaltswahrscheinlichkeit in der Nähe des Absorbers, in der Folge liegt die Transmissionskurve höher.

Man könnte nun beide Messungen durchführen und auf Unterschiede in den Transmissionskurven achten. Diese Differenzmessung wäre deutlich sensitiver auf Fünfte Kräfte. Allerdings ist die Absorption von Glas und einem schweren Material wie Uran nicht identisch, weshalb die Kurven nicht direkt vergleichbar sind. Abhilfe würde eine weitere dünne Beschichtung mit einem Material, das dieselbe Absorption wie BK7-Glas aufweist, schaffen. Dies wäre zum Beispiel für Aluminium der Fall. Die Aluminiumschicht müsste nur dick genug sein, ein Tunneln der Neutronen in die dahinterliegende Schicht zu vermeiden. Für die Berechnung würde sich eine effektive Dichte ergeben.

4.3.2 Versuch II: Ausnutzung verschiedener Plattenbeschichtungen

Bei der Berechnung der gestörten Eigenzustände in Abschnitt 4.2.3 wurden die Vorteile deutlich sichtbar, die sich durch die Beschichtung der Glasplatte(n) ergeben. Ein Neutron wird von einem Spiegel, der mit einem schweren Material wie Gold, Platin oder Uran beschichtet ist, lokal viel stärker angezogen als von einem gewöhnlich eingesetzten Glasspiegel. Dies kann für eine Relativmessung ausgenutzt werden, indem die sich für verschiedene Plattenbeschichtungen ergebenden Wahrscheinlichkeitsdichten miteinander verglichen werden.

Versuchsaufbau Den schematischen Versuchsaufbau zeigen die beiden Skizzen in Abbildung 4.10. Der Versuch wird zweimal durchgeführt, einziger Unterschied im Aufbau ist die Position der beschichteten Platte. Im ersten Fall (linkes Bild) befindet sie sich oben, im zweiten (rechtes Bild) unten. Die Neutronen werden von links in das System

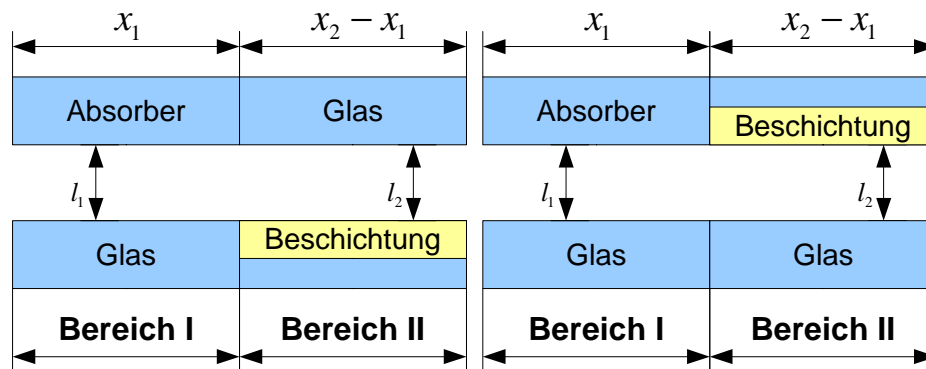


Abbildung 4.10: Schematischer Versuchsaufbau

bestehend aus Glasplatte und Absorber eingekoppelt. Dort wird ein quantenmechanischer Zustand präpariert. Dann erfolgt der Übergang in das System bestehend aus einer beschichteten und einer unbeschichteten Platte. An deren Ende werden die Neutronen durch einen ortsabhängigen Detektor registriert. Es gibt nur drei Parameter, die optimiert werden können:

- Die Länge des Glasplatte-Absorber-Systems x_1 ist für die Zustandspräparation verantwortlich.
- Der Abstand l_1 bestimmt den relativen Einfluss der Fünften Kraft und die Präparation der Anfangswellenfunktion.
- Die Position x_2 bestimmt, an welcher Position der Detektor steht. Es sollte eine Position gewählt werden, für die sich die Erwartungen für die zwei Versuchsaufbauten deutlich unterscheiden.

Optimierung von l_1 und x_1 Das Neutron soll im Platte-Absorber-System so präpariert werden, dass sich die Wellenfunktion in guter Näherung als Linearkombination der ersten beiden Zustände darstellt.

Die zu optimierenden Parameter hängen über die Absorberfunktion miteinander zusammen:

$$|P_n|^2 = \int_{v_{min}}^{v_{max}} dv \quad f(v) e^{-\alpha_{loss} \cdot \Gamma_n(l_1, \alpha) \cdot x_1/v}. \quad (4.32)$$

In dieser Gleichung wurde berücksichtigt, dass die Neutronen eine Geschwindigkeitsverteilung in x-Richtung aufweisen. Für $f(v)$ kann näherungsweise eine Dreiecksverteilung angenommen werden, das Maximum befindet sich bei 6 m/s, die Breite beträgt ± 1 m/s. $\Gamma_n(l_1)$ muss außerdem ersetzt werden durch $\Gamma_n(l_1, \alpha)$, für das die gestörten Eigenfunktionen berücksichtigt sind.

Die Parameter sollen so bestimmt werden, dass der Effekt durch die Fünften Kräfte maximiert wird. Ein gutes Maß dafür sind die gestörten Energieeigenwerte im Vergleich zu den ungestörten, wie in Abbildung 4.4 dargestellt. Die größte relative Änderung der Eigenenergie des ersten Zustands wird laut dieser Berechnungen für $l_1 = 14 \mu m$ erwartet, für den zweiten Zustand liegt das Minimum bei $l_1 = 19 \mu m$. Diese idealen Spaltbreiten sind sehr klein, die Transmission daher sehr niedrig. Das könnte durch eine Verkürzung von x_1 ausgeglichen werden, was allerdings Gefahren birgt: x_1 sollte so groß gewählt werden, dass die Neutronen auch im klassischen Bild einige Male hüpfen müssen, damit sich klassisch eine stationäre Höhenverteilung der Neutronen ergibt. Eine Hüpfperiode beträgt ungefähr 3 cm, weswegen eine Glasplatte einer Länge von 10 cm geeignet erscheint. Dann würde allerdings bei 14 μm der erste Zustand zu 96% unterdrückt, der zweite sogar um sieben Größenordnungen.

Mit $x_1 = 10$ cm und der beschriebenen Geschwindigkeitsverteilung erscheint ein Plattenabstand von 25 μm als ein guter Kompromiss. Der Grundzustand wird dann um 7% unterdrückt, der zweite Zustand um 80%. Alle weiteren Zustände sind vernachlässigbar klein.

Übergang zu Bereich II Am Übergang zu Bereich II geschehen zwei Dinge: Zum einen wird der Absorber durch eine glatte Platte ersetzt, zum anderen wird eine der Glasplatten durch eine Platte mit einer Beschichtung ausgetauscht. Als Material für die Beschichtung kommt wie immer bisher ein Material mit hoher Dichte und niedriger Absorption in Frage. Die Berechnungen erfolgen mit Platinbeschichtungen. Eventuell muss die Platinschicht noch mit einer Aluminiumschicht bedampft werden, da Platin einen zu hohen Absorptionsquerschnitt hat.

Das Experiment wird zweimal durchgeführt. Der Erwartungswert des Orts, in Abbildung 4.11 gegen die x-Achse aufgetragen, verdeutlicht den allein durch Fünfte Kräfte auftretenden Effekt. Die Berechnung erfolgte mit $\lambda = z_0 = 5.87 \mu m$ und $\alpha = 10^{11}$. Im Bereich $0 < x_1 < 0.10$ m wird der quantenmechanische Zustand präpariert. Der Erwartungswert des Orts nimmt ab, weil höhere Energiezustände stärker unterdrückt werden als niedere Zustände. An der Stelle $x_1 = 0.10$ m erfolgt der Übergang in das System mit der beschichteten Platte. Die neue Wellenfunktion ergibt sich als Linearkombination der Eigenzustände des Platte-Platte-Systems. Die Vorfaktoren lassen sich aus den Überlappintegralen mit den Eigenzuständen aus dem Platte-Absorber-System berechnen.

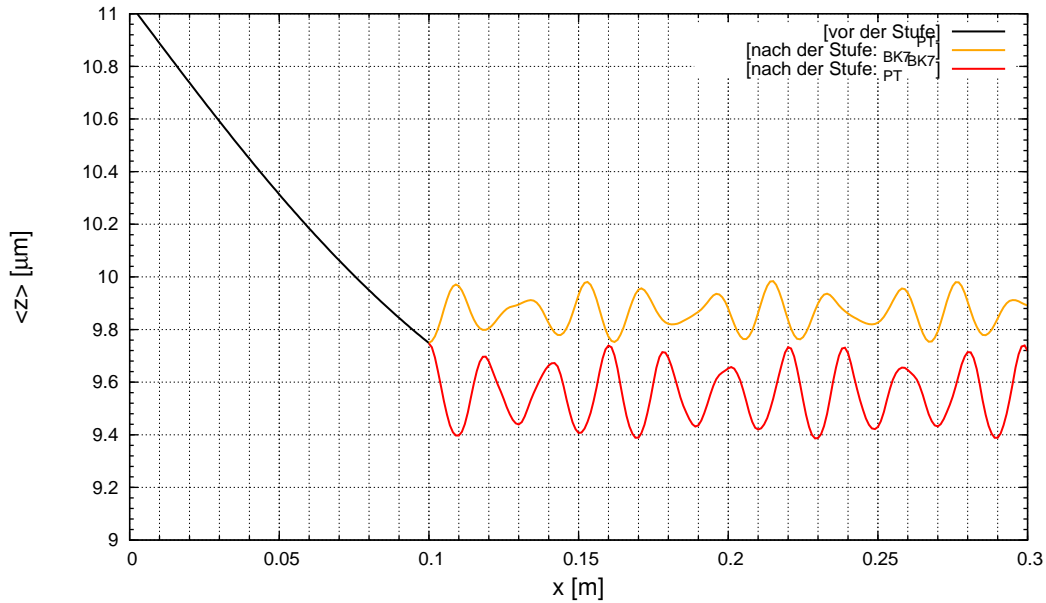


Abbildung 4.11: Erwartungswert des Orts aufgetragen gegen die x-Achse

Die Formel für den Erwartungswert des Orts entspricht einer Verallgemeinerung von Formel (3.38):

$$\begin{aligned} \langle z \rangle = & \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^2 P_n(l_1, x_1, v_x)^2 \cdot \langle m|n \rangle^2 \cdot \langle m|z|m \rangle^2 \\ & + \sum_{m \neq m'} \sum_{n=1}^2 P_n(l_1, x_1, v_x)^2 \cdot \langle m|n \rangle \langle m'|n \rangle \cdot \langle m'|z|m \rangle \cdot \cos(\omega_{mm'} \cdot (t - t_1)). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Es werden die Zustände $n = 1$ und $n = 2$ zugelassen, alle anderen Zustände werden durch den Absorber genügend stark unterdrückt. Außerdem müssen $P_1(l_1, x_1, v_x)$, $|m\rangle$ und $\omega_{mm'}$ durch die Größen, die mit Hilfe der Störungstheorie berechnet wurden, ersetzt werden.

Es wird deutlich, dass der Kurvenverlauf in Abbildung 4.11 ein reiner Effekt der Fünften Kräfte ist: Ohne sie wären die Überlappintegrale $\langle m|n \rangle$ orthogonal, da keine Stufe zwischen dem Bereich der Präparation und dem Bereich danach eingefügt wurde. Mit Fünften Kräften sind die Überlappintegrale dagegen nicht orthogonal, die Summe der Kosinusterme sorgen für den schwebungsähnlichen Verlauf des z-Erwartungswerts.

Dem Kurvenverlauf in Abbildung 4.11 kann man entnehmen, dass nicht alle Detektorpositionen gleich gut geeignet sind, um Unterschiede im Schwerpunkt der Wellenfunktion durch Fünfte Kräfte zu messen. Eine systematische Suche nach einem Optimum für die Detektorposition ist mit Abbildung 4.12 möglich. Der obere Graph zeigt die prozentuale Abweichung des Schwerpunkts der Wellenfunktion ($\langle z_{BK7}^{PT}(x) \rangle - \langle z_{PT}^{BK7}(x) \rangle$)/ $z(x_1 = 0.10 \text{ m})$ in Abhängigkeit der Detektorposition von der Übergangsstelle $x = 0.10 \text{ m}$ bis $x = 1.00 \text{ m}$. Im unteren Graph ist ein Ausschnitt des oberen für realistische Plat-

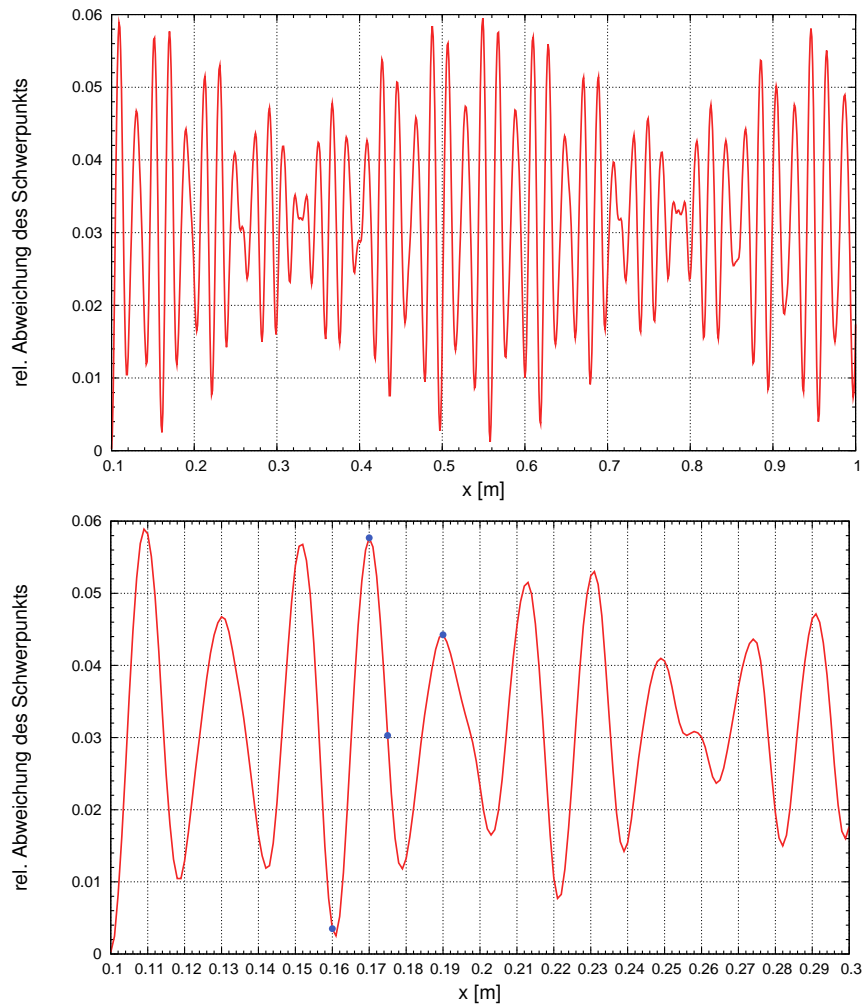


Abbildung 4.12: Prozentuale Abweichung des Schwerpunkts der Wellenfunktion in Abhängigkeit der Detektorposition. Der untere Graph zeigt einen Ausschnitt des oberen.

tenlängen aufgetragen. Die maximale relative Abweichung beträgt ungefähr 6% bei $\lambda = z_0 = 5.87 \mu\text{m}$ und $\alpha = 10^{11}$. Außerdem sind vier Punkte der Kurve mit einem blauen Punkt markiert. Für die zugehörigen Detektorpositionen zeigt Abbildung 4.13 die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichten.

Das Experiment soll in naher Zukunft am Institut Laue-Langevin in Grenoble durchgeführt werden.

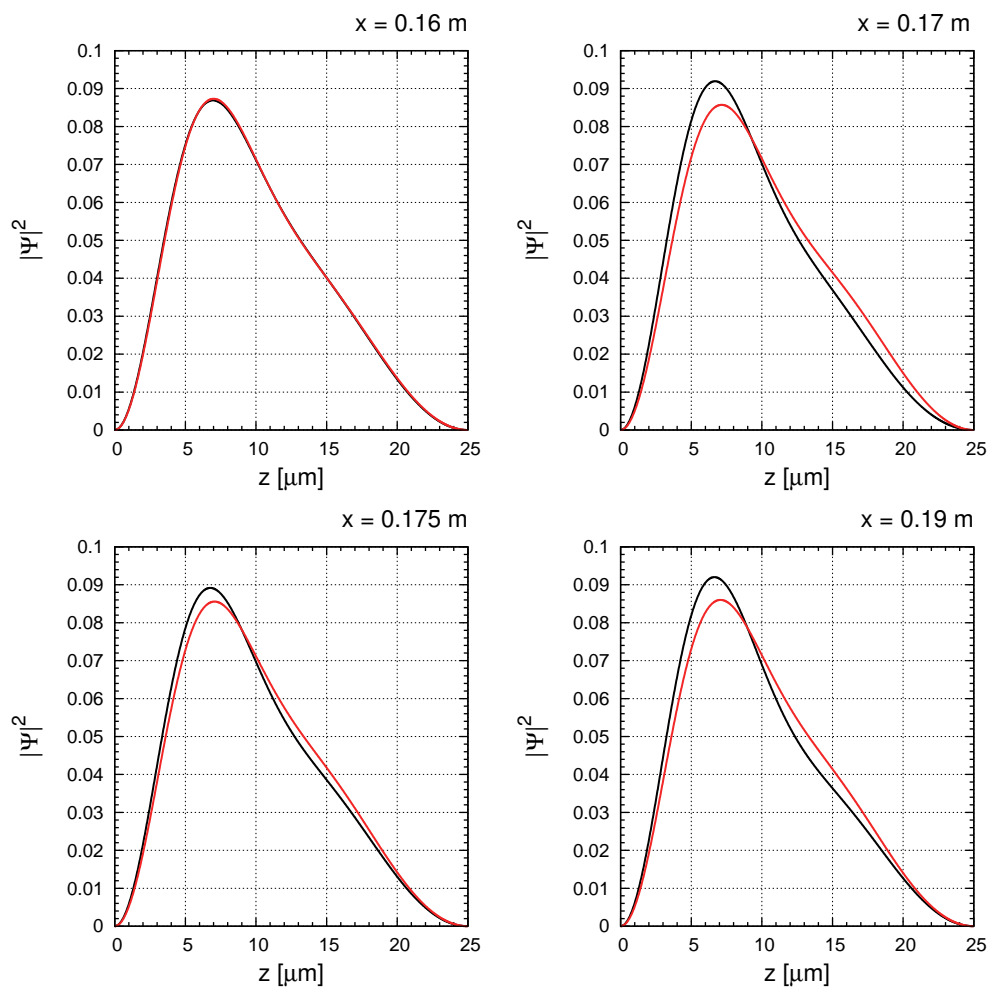


Abbildung 4.13: Wahrscheinlichkeitsdichten für verschiedene Detektorpositionen. Für die schwarzen Kurven befindet sich die beschichtete Platte unten, für die roten oben.

4.3.3 Versuch III: Quantum Bouncing Ball mit Fünften Kräften

Im Folgenden sollen die Erkenntnisse zum Quantum Bouncing Ball aus Kapitel 3 und die bisherigen Berechnungen von Systemen mit Fünften Kräften kombiniert werden, um dadurch sensitiver auf Fünfte Kräfte zu werden.

Versuchsaufbau und Versuchsprinzip Ein ultrakaltes Neutron wird wie in allen vorher beschriebenen Experimenten in einem Platte-Absorber-System, bezeichnet mit Bereich I, in einen quantenmechanischen Zustand präpariert. Es erfolgt dann der Übergang in Bereich II, in dem der Absorber durch eine glatte Platte ersetzt wird und die untere Platte gegenüber der in Bereich I leicht abgesenkt ist. Eine der beiden Platten wird mit einem schwerem Material wie zum Beispiel Uran oder Platin und eventuell einer dünnen Schutzschicht gegen Absorption, zum Beispiel aus Aluminium, beschichtet. Der Versuch wird zweimal durchgeführt, die beschichtete Platte tauscht im zweiten Teil den Platz mit der unbeschichteten in Bereich II.

Eine schematische Skizze dieses Versuchsaufbaus zeigt die folgende Abbildung:

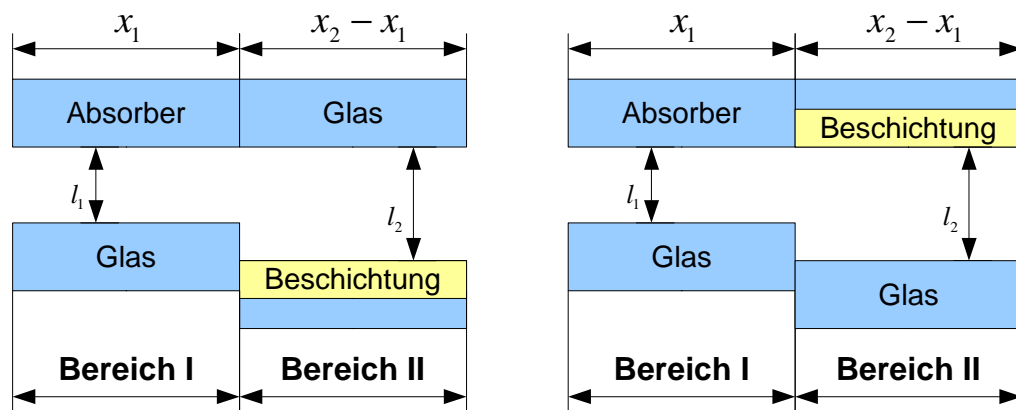


Abbildung 4.14: Schematischer Versuchsaufbau

Ohne Fünfte Kräfte würden sich dieselben Wellenfunktionen ergeben wie in den Berechnungen in Abschnitt 3.4. Man würde also nach der Stufe erwarten, dass der Erwartungswert des Orts aufgetragen gegen die x -Achse schwebungsartig oszilliert. Die Schwebungsfrequenzen sind in diesem Fall jedoch zusätzlich abhängig von den Fünften Kräften und daher für die beiden Teile des Experiments verschieden. Dies könnte zu Verstärkungs- oder Auslöschungseffekten führen.

Optimierung der Parameter Die Parameter, die in Bereich I variiert werden können, wurden bereits im letzten vorgestellten Experiment in Abschnitt 4.3.2 optimiert. Es werden im Folgenden dieselben Werte verwendet. Damit beträgt der Spalt $l_1 = 25 \mu\text{m}$ und die Spiegellänge $x_1 = 0.10 \text{ m}$.

Zusätzlich gibt es jetzt noch den Parameter l_2 , der festgelegt werden muss (siehe Abb. 4.14). Ausgangspunkt für die Suche nach einem optimalen Wert ist die Gleichung für

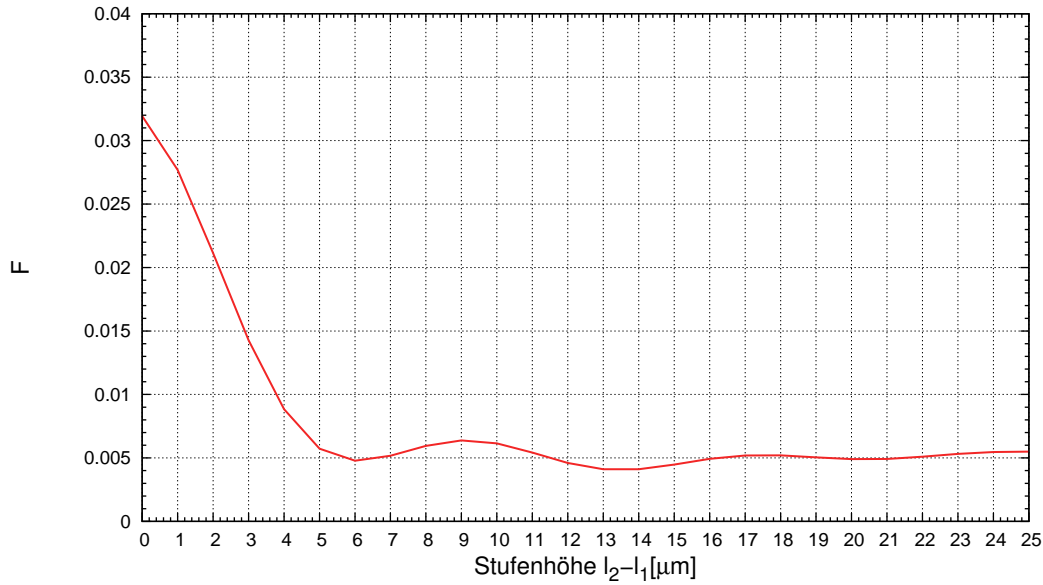


Abbildung 4.15: Der Plot zeigt den Quotienten $F = 2 \frac{\langle \bar{z}_1 \rangle - \langle \bar{z}_2 \rangle}{\langle \bar{z}_1 \rangle + \langle \bar{z}_2 \rangle}$ aufgetragen gegen die Stufenhöhe $l_2 - l_1$.

den Erwartungswert des Orts, bereits bekannt aus dem letzten Abschnitt:

$$\begin{aligned}
 \langle z \rangle &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^2 P_n(l_1, x_1, v_x)^2 \cdot \langle m|n \rangle^2 \cdot \langle m|z|m \rangle \\
 &+ \sum_{m \neq m'} \sum_{n=1}^2 P_n(l_1, x_1, v_x)^2 \cdot \langle m|n \rangle \langle m'|n \rangle \cdot \langle m'|z|m \rangle \cdot \cos(\omega_{mm'} \cdot (t - t_1)) \\
 &= \langle \bar{z} \rangle + \langle z'(t) \rangle.
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Ist die Differenz der Erwartungswerte des Orts für die beiden Teile des Experiments verschieden, so unterscheiden sich auch die Wellenfunktionen. Ziel der Überlegungen ist es, den Effekt durch die geschickte Wahl von l_2 zu maximieren.

Der Ausdruck in (4.34) kann aufgeteilt werden in einen zeitlich konstanten Mittelwert $\langle \bar{z} \rangle$ und einen zeitabhängigen Term $\langle z'(t) \rangle$. Die Differenz der z -Erwartungswerte beider Experimenteile soll nun maximiert werden:

$$\langle z_1 \rangle - \langle z_2 \rangle = \langle \bar{z}_1 \rangle - \langle \bar{z}_2 \rangle + \langle z'_1(t) \rangle - \langle z'_2(t) \rangle. \tag{4.35}$$

Die erste Möglichkeit der Optimierung besteht darin, die Differenz der zeitunabhängigen Terme zu maximieren. Abbildung 4.15 zeigt eine Kurve, in der der Quotient $F = 2 \frac{\langle \bar{z}_1 \rangle - \langle \bar{z}_2 \rangle}{\langle \bar{z}_1 \rangle + \langle \bar{z}_2 \rangle}$ gegen die Stufenhöhe $l_2 - l_1$ aufgetragen ist. Das Verhältnis ist am größten für kleine Stufenhöhen $l_2 - l_1$. Dies kommt daher, dass Effekte für Fünfte Kräfte relativ gesehen für kleine Spaltbreiten zwischen den Platten am größten sind und dass zusätzlich die obere Platte in Bereich II die Wellenfunktion am stärksten beeinflussen kann, wenn die Spaltbreite l_2 klein ist.

Trotzdem könnte die Einführung einer Stufe zwischen Bereich I und II Vorteile bringen, weil sich die Wellenfunktionen der beiden Versuchsteile verschieden ausbreiten. Im idealen Fall würde man die Wellenfunktion genau dann bestimmen, wenn sich der Erwartungswert des Orts der einen Wellenfunktion im Maximum und der anderen im Minimum befindet.

Die idealen Plattenlängen lassen sich durch die Lösung der folgenden Gleichungen finden:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\langle z_1 \rangle - \langle z_2 \rangle) = 0 \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\langle z_1 \rangle - \langle z_2 \rangle) < 0. \quad (4.37)$$

Die exakte Lösung der ersten Gleichung gestaltet sich als schwierig. Es ist bisher nicht gelungen, aus diesen Gleichungen die *optimale* Stufenhöhe zu bestimmen. Stattdessen

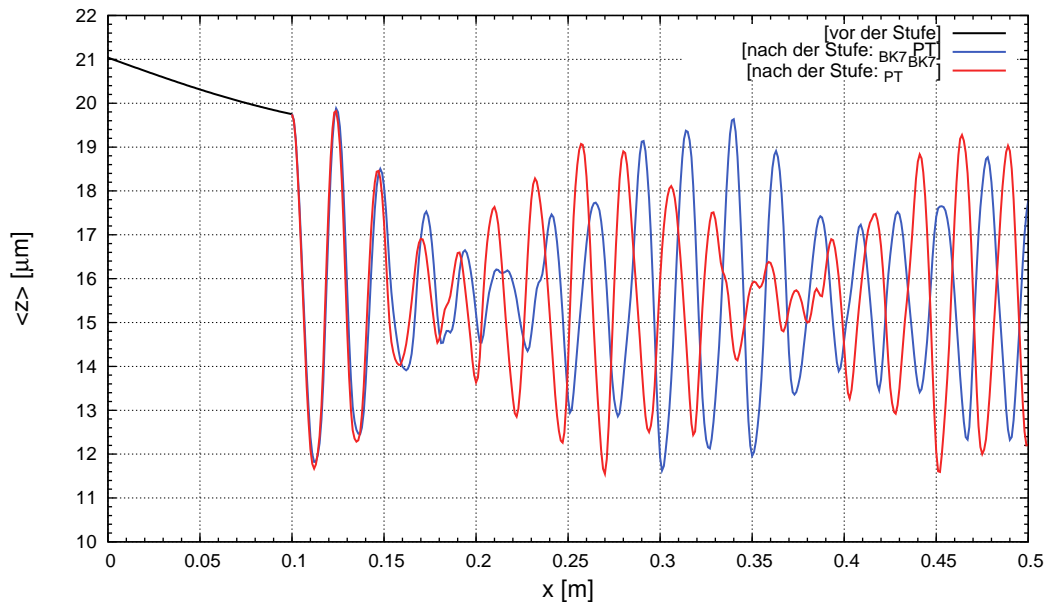


Abbildung 4.16: Zeitentwicklung des Erwartungswerts des Orts

wurden die Berechnungen des Systems für verschiedene Stufen miteinander verglichen. Als Ergebnis dessen wird im Folgenden $l_2 = 35 \mu\text{m}$ angenommen, was einer $10 \mu\text{m}$ -Stufe entspricht.

Abbildung 4.16 zeigt die Zeitentwicklung des Erwartungswerts des Orts. Anstelle der Zeit ist die Länge der Platten aufgetragen. Die Berechnung erfolgte aus Gründen des Rechenaufwands nicht unter Einbeziehung der dreieckigen Geschwindigkeitsverteilung. Stattdessen wurde eine x -Geschwindigkeit der Neutronen von 6 m/s angenommen. In Bereich I, also zwischen $x = 0 \text{ cm}$ und $x = 10 \text{ cm}$ erfolgt die Präparation des Zustands. Die verschiedene Zeitentwicklung der Systeme nach der Stufenstelle bei $x = 10 \text{ cm}$ ist deutlich zu sehen, es tritt sogar der Fall auf, dass sich der Erwartungswert des Orts des einen Versuchsteils im Maximum befindet, während der andere sein Minimum erreicht

hat. Allerdings ist dies erst für Platten, die länger als 10 cm sind, der Fall. Es bleibt herauszufinden, ob solch lange Platten mit einer Rauheit von unter 2 nm und einer Ebenheit von unter 0.1 μm hergestellt werden können.

4.4 Abschätzung der Sensitivität der vorgeschlagenen Experimente

Im Folgenden soll die Sensitivität der Experimente aus Abschnitt 4.3.2 und 4.3.3 auf Nicht-Newtonsche Gravitation bestimmt werden. In beiden Experimenten werden zwei Messungen ausgeführt, deren theoretische Erwartung sich unter Berücksichtigung von Fünften Kräften unterscheidet, während ohne Fünfte Kräfte keine Abweichungen zu erwarten sind. In den folgenden Überlegungen wird für eine gegebene Reichweite λ der Fünften Kraft nach der minimalen Stärke α gesucht, so dass sich die theoretische Erwartung zwischen den beiden Versuchsteilen statistisch signifikant unterscheidet.

In unserem Fall soll die Wahrscheinlichkeitsdichte der ultrakalten Neutronen bestimmt werden, aus diesen wird dann der Schwerpunkt berechnet, was dem Erwartungswert des Orts entspricht. Es ergeben sich als theoretische Werte $\langle z_1 \rangle$ bzw. $\langle z_2 \rangle$. Diese sind von für eine feste Reichweite der Fünften Kraft nur von der Stärke α und der Zeit t bzw. der Spiegellänge x in Bereich II und der x-Geschwindigkeit abhängig. Für die folgenden Rechnungen wird eine feste x-Geschwindigkeit der Neutronen von 6 m/s vorausgesetzt. Die Berechnung der Sensitivität erfolgt unter Zuhilfenahme einer χ^2 -Analyse:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\langle z \rangle - \langle z_i \rangle}{\Delta \langle z_i \rangle} \right)^2. \quad (4.38)$$

Hierbei steht $\langle z_i \rangle$ für die beiden theoretisch erwarteten Schwerpunkte und $\langle z \rangle$ für deren Mittelwert. Einsetzen der Definition des Mittelwerts ergibt

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\langle z_1 \rangle - \langle z_2 \rangle}{2\Delta \langle z_i \rangle} \right)^2. \quad (4.39)$$

Die Bestimmung der Wellenfunktion erfolgt über die in Abschnitt 6.1 beschriebene Methode. Die Höhe eines CR-39-Plättchens wird in n äquidistante Teile untergliedert, die Schrittweite liegt im Bereich eines Mikrometers. Es wird dann die Anzahl der nachgewiesenen Neutronen N_j in jedem Abschnitt j bestimmt. Dies ergibt die Wahrscheinlichkeitsdichte. Der Schwerpunkt ist damit gegeben durch

$$\langle z_i \rangle = \frac{\sum_{j=1}^n j \cdot N_j}{\sum_{j=1}^n N_j}, \quad (4.40)$$

der statistische Fehler des Schwerpunkts durch

$$\Delta \langle z_i \rangle = \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial z_i}{\partial N_k} \cdot \Delta N_k \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (4.41)$$

Der Fehler des Schwerpunkts lässt sich umformen zu

$$\Delta\langle z_i \rangle = \sqrt{\sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{k}{N_i} - \frac{\sum_j j \cdot N_j}{N_i^2} \right) \sqrt{N_k} \right]^2} \quad (4.42)$$

$$= \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{N_i^2} \left(k - \frac{\sum_j j \cdot N_j}{N_i} \right)^2 \cdot N_k} \quad (4.43)$$

$$= \sqrt{\int dz \frac{1}{N_i^2} (z - \langle z_i \rangle)^2 \psi_i^{II}(z)}, \quad (4.44)$$

wobei N_i die Gesamtzahl der im i -ten Versuchsteil nachgewiesenen Neutronen darstellt. Das Einsetzen dieser Überlegungen in Formel (4.39) ergibt

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^2 \frac{(\langle z_1 \rangle - \langle z_2 \rangle)^2}{4 \left(\sqrt{\frac{1}{N_i^2} \langle (z - \langle z_i \rangle)^2 \rangle} \right)^2} \quad (4.45)$$

$$= \frac{N^2}{16} \sum_{i=1}^2 \frac{(\langle z_1 \rangle - \langle z_2 \rangle)^2}{\langle (z - \langle z_i \rangle)^2 \rangle}. \quad (4.46)$$

Hierbei wurde vereinfachend angenommen, dass für beide Experimentteile dieselbe Anzahl von Neutronen gemessen wird. Für eine Konfidenz von 90% beträgt $\chi^2 = 2.70$, für 95% ergeben sich $\chi^2 = 3.84$. Nach den Erfahrungen der letzten Messungen ist mit einer Rate von ungefähr $0.05s^{-1}$ zu rechnen. Bei einer Messzeit von 25 Tagen entspricht dies ungefähr 10^5 Neutronen. Damit kann mit Hilfe von Gleichung (4.46) die Sensitivität der Experimente auf Fünfte Kräfte abgeschätzt werden.

Sensitivität von Versuch II Für das in Abschnitt 4.3.2 beschriebene Experiment ergeben sich nach Abbildung 4.12 Maxima der Differenz der Schwerpunkte beispielsweise für Plattenlängen von 7 cm oder 13 cm . Eine Zusammenstellung der Parameter des Experiments ist in der folgenden Tabelle gegeben:

$x_2 - x_1 = 7\text{ cm}$		$x_2 - x_1 = 13\text{ cm}$	
λ	$5.87\ \mu\text{m}$	λ	$5.87\ \mu\text{m}$
α (90% CL)	$6.7 \cdot 10^7$	α (90% CL)	$6.7 \cdot 10^7$
α (95% CL)	$8.0 \cdot 10^7$	α (95% CL)	$8.0 \cdot 10^7$

Sensitivität von Versuch III Für das in Abschnitt 4.3.3 beschriebene Experiment sind Plattenlängen in Bereich II von 0.10 cm und 0.20 cm von Vorteil, da dann die Abweichung der Erwartungswerte maximal wird. Der Vollständigkeit halber werden in der folgenden Tabelle zusätzlich auch die Werte für die Plattenlänge von 0.39 cm angegeben, da dann die Abweichung auch global maximal ist.

$x_2 - x_1 = 10\text{ cm}$		$x_2 - x_1 = 20\text{ cm}$		$x_2 - x_1 = 39\text{ cm}$	
λ	$5.87\ \mu\text{m}$	λ	$5.87\ \mu\text{m}$	λ	$5.87\ \mu\text{m}$
α (90% CL)	$3.0 \cdot 10^7$	α (90% CL)	$1.8 \cdot 10^7$	α (90% CL)	$7.0 \cdot 10^6$
α (95% CL)	$3.5 \cdot 10^7$	α (95% CL)	$2.0 \cdot 10^7$	α (95% CL)	$8.0 \cdot 10^6$

Die auf diesem Wege gewonnenen Grenzen sind lediglich statistischer Natur. Es wurde keine Aussage darüber getroffen, wie gut die Systematik der Messungen ist.

Für die Transmissionsmessung, die in Abschnitt 4.3.1 vorgestellt wurde, existieren bereits analytisch bestimmte Grenzen auf Fünfte Kräfte für α und λ [13]. Für $\lambda = 5.87 \mu\text{m}$ ergibt sich demnach eine untere Grenze für die Stärke der Fünften Kraft von $\alpha \approx 10^{12}$. Diese Grenzen beziehen sich ebenfalls nur auf die Statistik. Somit können die statistischen Grenzen um vier bis fünf Größenordnungen verbessert werden, wenn die Zeitentwicklung des Quantum Bouncing Balls betrachtet wird.

Eine Abschätzung der Systematik des Versuchs ist im Allgemeinen schwierig. Allerdings sollte sie deutlich besser sein als in den bisherigen Versuchen. Dies kommt daher, dass in bisherigen Transmissionsmessungen die Sensitivität der Fünften Kräfte direkt durch die Eigenschaften des Absorbers bestimmt war. Dieser stellt jedoch auch zugleich die größte systematische Fehlerquelle des Experiments dar, weil die Rauheit der Absorberglasplatte in der Größenordnung der hypotetischen Fünften Kraft liegt. Dies wird durch die Ersetzung des Absorbers durch eine glatte Glasplatte um drei Größenordnungen verbessert.

Außerdem entspricht die Messung mit verschiedenen beschichteten Platten einer Differenzmessung mit demselben Aufbau, wodurch sich systematische Fehler gegeneinander aufheben.

Kapitel 5

Überblick über geplante Veränderungen am bestehenden Versuchsaufbau

Im Rahmen einer Kollaboration zwischen dem Physikalischen Institut der Universität Heidelberg und dem Institut Laue-Langevin in Grenoble, Frankreich wurden in den letzten Jahren verschiedene Gravitationsexperimente mit ultrakalten Neutronen durchgeführt.

Alle Experimente fanden an der bisher weltweit stärksten Quelle für ultrakalte Neutronen, dem UCN-Strahl des Forschungsreaktors des Instituts Laue-Langevin (ILL) in Grenoble, statt.

- Die erste Messung von 1999 zielte darauf ab, die Quantennatur des Falls ultrakalter Neutronen zu zeigen. Dazu wurde die Transmissionskurve der Neutronen in einem Platte-Absorber-System vermessen. Die Ergebnisse wurden in [16, 17] veröffentlicht.
- Die Messungen in den Jahren 2002 und 2005 dienten dazu, die Wahrscheinlichkeitsdichte eines quantenmechanischen Zustands von ultrakalten Neutronen zu bestimmen. Veröffentlicht wurden die Ergebnisse in [17]. Es konnten auch bereits erste Grenzen auf die Parameter α und λ von hypothetischen Fünften Kräften gesetzt werden[13].

Ein grundlegendes Problem bei allen Messungen war die geringe Statistik. Eine typische Zählrate entsprach ungefähr $0.01s^{-1}$ bzw. etwas weniger als 1 Neutron pro Minute. Dementsprechend lang waren die Messzeiten, was große Ansprüche an den Versuchsaufbau stellt, da dieser über die gesamte Messzeit keinen Änderungen unterliegen durfte.

Trotz langer Messzeiten war man bei allen Experimenten bisher in der Statistik stark limitiert. Dies könnte sich in naher Zukunft ändern, wenn neue UCN-Quellen am Paul-Scherrer-Institut in der Schweiz und am FRMII in München in Betrieb gehen. Diese versprechen einen im Vergleich zum ILL um drei bis vier Größenordnungen erhöhten UCN-Fluss, der durch neue Konzepte der Gewinnung ultrakalter Neutronen durch Phonenstreuung ermöglicht wird.

Für eine Reihe weiterer geplanter Experimente soll der bisherige Versuchsaufbau der bisherigen Messungen runderneuert und wieder in Betrieb genommen werden.

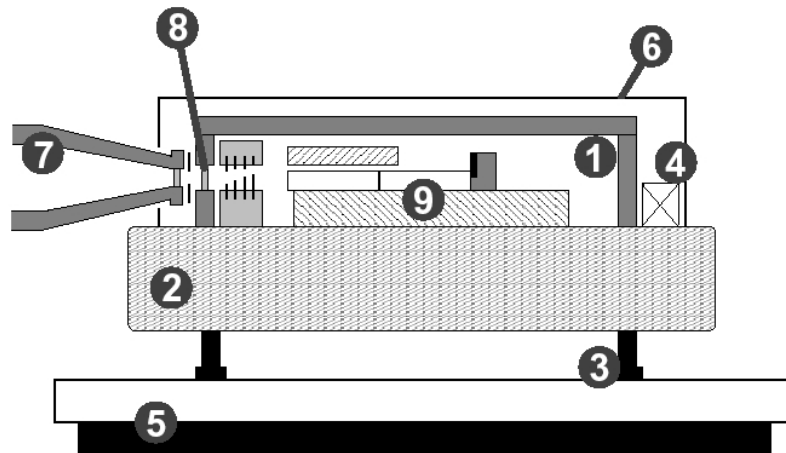


Abbildung 5.1: Schematischer Versuchsaufbau des Experiments von 2005[18].

5.1 Diskussion des bisherigen Setups

Abbildung 5.1 zeigt den Versuchsaufbau, der für die Messung von 2005 verwendet wurde. Das Bild entstammt der Diplomarbeit von Claude Krantz[18]. Im Wesentlichen bestand das Experiment aus neun Teilen:

- Ein optischer Tisch, im Bild mit Nummer 5 bezeichnet, sorgte für eine passive Dämpfung von Vibrationen.
- Das eigentliche Experiment stand auf einer Granitplatte (Nr. 2) der Dimension $(630 \times 400 \times 80) \text{ mm}^3$. Diese gab dem gesamten Setup die nötige Trägheit gegenüber Veränderungen. Die Granitplatte konnte mittels dreier Piezoaktuoren (Nr. 3) in der Neigung verstellt werden. Mehrere Winkelmesser (Nr. 4) maßen kontinuierlich Veränderungen der Neigung der Granitplatte, diese Messdaten wurden an ein LabView-gesteuertes PID-Reglersystem übermittelt, welches die Granitplatte über die Piezoaktuoren nachregelte. Das gesamte Experiment konnte so über lange Messzeiten eben gehalten werden. Außerdem besaß die Granitplatte eine Ebenheit von $1 \mu\text{m}$.
- Das gesamte Experiment fand im Vorvakuum statt; Nummer 1 bezeichnet das Vakuumgehäuse, welches aus Aluminium bestand. Die Abmessungen waren $(269 \times 449 \times 69) \text{ mm}^3$ (Innenmaße), die Wandstärke betrug 30 mm .
- Die Abschirmung gegen Magnetfelder wie dem Erdmagnetfeld übernahmen 1 mm starke μ -Metall-Bleche (Nr. 6).
- Die ultrakalten Neutronen wurden von links in das Experiment geleitet. Ein düsenähnliches Bauteil (Nr. 7) verzüngte das runde Strahlrohr mit einem Durchmesser von 90 mm auf eine rechteckige Form der Maße $12 \times 2 \text{ cm}^2$.

- Nummer 8 bezeichnet das Eintrittsfenster für die Neutronen in das Vakuumgehäuse. Es bestand aus einer dünnen Aluminiumfolie.
- Das eigentliche Herzstück des Experiments, bestehend aus Glasplatten und einem Detektor, ist mit der Nummer 9 bezeichnet.

Die Teile des Experiments, mit denen die Neutronen in Berührung kamen, sind in Abbildung 5.2 noch einmal im Detail dargestellt. Auch dieses Bild entstammt der Diplomarbeit von Claude Krantz. Anhand dieser Zeichnung ist es möglich, den Weg eines ultrakalten Neutrons nachzuverfolgen:

- Das Neutron kam von links aus dem Strahlrohr und passierte die Düse (Nr. 1). An deren Ende befand sich ein Austrittsfenster aus Aluminium. Damit das Neutron dieses passieren konnte, musste seine Transversalgeschwindigkeit gegenüber dem Austrittsfenster größer sein als 3.2 m/s . Es war wichtig, dass die Düse und das Experiment nicht mechanisch miteinander gekoppelt waren. Dies hätte aufgrund der relativ starken Vibrationen der Strahlrohre die Messungen erheblich beeinträchtigt.
- Eine höhenverstellbare Eintrittsblende (Nr. 2) sorgte dafür, dass Neutronen, die das Experiment nicht treffen konnten, absorbiert wurden und nicht zum Untergrund beitragen. Dies ist vor dem Hintergrund der kleinen Zählraten sehr wichtig. Das Eintrittsfenster in das Vakuumgehäuse bestand ebenfalls aus einer dünnen Aluminiumfolie.
- Als Nächstes musste das ultrakalte Neutronen ein starres Blendensystem passieren. Das System bestand aus fünf Lagen von abwechselnd B_4C , Teflon und Kupfer. Die Blendenöffnungen wurden zum eigentlichen Experiment hin immer kleiner. B_4C hat aufgrund des Boranteils einen sehr hohen Absorptionsquerschnitt für Neutronen. Neutronen, die die falsche Richtung besaßen, wurden so aus dem Experiment entfernt, ohne Untergrund zu erzeugen.
- Das Blendensystem war so eingestellt, dass Neutronen, die es durchdringen konnten, nun zum eigentlichen Experiment vordringen konnten. Dieses bestand mindestens aus einer unteren und einer oberen Glasplatte im Abstand l_1 , die beide sehr gute Ebenheitseigenschaften besaßen. Die Rauheit der unteren Glasplatte betrug

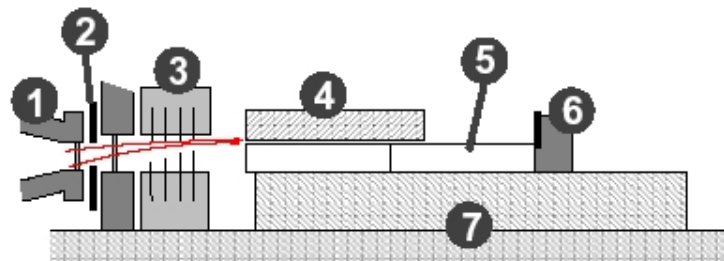


Abbildung 5.2: Detailzeichnung des Aufbaus des Experiments von 2005[18].

weniger als 2.2 nm , ultrakalte Neutronen reflektierten auf ihr nahezu ideal. Dagegen war die obere Glasplatte (Nr. 4), der sogenannte „Absorber“, auf eine Rauheit von $0.75 \text{ }\mu\text{m}$ aufgeraut. Neutronen, die den Absorber berührten, wurden in eine zufällige Richtung gestreut und landeten nur mit sehr kleiner Wahrscheinlichkeit trotzdem auf dem Detektor. Dies trug zum Untergrund bei.

- Je nach Messung befand sich hinter der ersten unteren Glasplatte eine zweite, die um eine bestimmte Höhe $l_2 - l_1$ vertikal versetzt war.
- Schließlich befand sich hinter dem Glasplattensystem ein Detektor (Nr. 6), der die Neutronen nachwies. Es handelte sich hierbei entweder um ein Gaszählrohr für Integralmessungen oder um ein borbeschichtetes CR-39-Plättchen, welches einen Spurdetektor mit guter Ortsauflösung darstellt.
- Das gesamte Glasplatten-Detektor-System befand sich auf einer weiteren ebenen Glasplatte (Nr. 7), um das Experiment in die richtige Höhe zu nivellieren.
- Das Blendensystem (Nr. 3) war außerdem so eingestellt, dass Neutronen, die es durchdringen konnten, eine leicht nach oben gerichtete Trajektorie aufweisen mussten, wie es auch in Abbildung 5.2 eingezeichnet ist. Durch diese Nebenbedingung wurde verhindert, dass zu schnelle Neutronen direkt auf den Detektor (Nr. 6) gelangen konnten.

5.2 Geplante Veränderungen im Überblick

Eine Begutachtung des Versuchsaufbaus am ILL zeigte, dass einige der Bauteile altersbedingt erneuert werden müssen. Dazu zählen zum Beispiel die Granitplatte sowie die Glasplatten und Absorber, die stark verkratzt waren. Die μ -Metall-Abschirmung wies starke mechanische Verbiegungen auf und hat dadurch wahrscheinlich ihre Wirkung verloren.

Da eine ganze Reihe von Experimenten mit diesem Setup geplant sind, entstand die Idee, den Versuch mit den Erfahrungen aus mehreren Diplomarbeiten und Veröffentlichungen neu aufzubauen und grundlegende Dinge zu verbessern. Dazu gehören:

- Das erste geplante Experiment wird wieder am Experimentierplatz PF2 am ILL in Grenoble stattfinden. Dort steht der gesamte Versuchsaufbau auf einem Metallgerüst, der UCN-Plattform, die sehr vibrationsanfällig ist. Die bisher eingesetzte passive Dämpfung durch einen druckluftbetriebenen Optischen Tisch ist definitiv ein Schwachpunkt für ein Experiment, welches mechanische Genauigkeiten von $1 \text{ }\mu\text{m}$ anstrebt. Deshalb soll das passive System durch ein kombiniertes aktives und passives ersetzt werden. Erste Tests zeigten eine Unterdrückung der Vibrationen um zwei Größenordnungen.
- Als ortsauffösender Detektor wurde bislang ein CR39-Plättchen mit Borbeschichtung als Spurdetektor verwendet. Auf dieses wird in Abschnitt 6.1 näher eingegangen. Das Plättchen musste nach Ende der Messung mit Natronlauge behan-

delt und dann unter einem Mikroskop abgerastert und abfotografiert werden. Die Fotos wurden im Anschluss manuell ausgewertet. Es konnte so eine sehr hohe Ortsauflösung von $< 2 \mu\text{m}$ erreicht werden. Versuche, diesen Vorgang mit einem Bildverarbeitungsfilter zu automatisieren, scheiterten bisher an der Verlässlichkeit. Ortsauflösende Online-Detektoren für Neutronen können keine so gute Auflösung haben, weil das Neutron immer erst noch über eine Kernreaktion in ein geladenes Teilchen konvertiert werden muss. Ein mechanischer Ansatz zur Lösung des Problems stellt der Taper dar, der in Abschnitt 6.1.2 näher vorgestellt wird. In Kombination mit einem Online-Detektor für Neutronen wie zum Beispiel dem CASCADE-Detektor, der von Martin Klein am Physikalischen Institut der Universität Heidelberg entwickelt wird, könnte so ein erster Online-Detektor für ultrakalte Neutronen mit sehr guter Ortsauflösung entstehen.

Im Rahmen der Diplomarbeit wurden zwei verschiedene Prototypen eines solchen Systems konstruiert, gebaut und am ILL in zwei Testmessungen getestet.

- Ein solches Taper-CASCADE-Detektorsystem benötigt relativ viel Platz. Da die Granitplatte erneuert werden muss, wird eine größere Platte eingesetzt werden. Dies hat ebenfalls Auswirkungen auf die Piezoaktuoren, die die Neigung der Granitplatte einstellen können.
Ebenfalls erforderlich sind damit neue Halterungen für die Piezoaktuoren, die idealerweise eine Höhenverstellung beinhalten sollten, sowie einen Lastausgleich, damit die Piezoaktuoren jederzeit zwischen den Messungen von der Last des Experiments befreit werden können.
- Es ist zu prüfen, ob die Zuführung der ultrakalten Neutronen zum Experiment verbessert werden kann. Es soll einfach möglich sein, den x-Geschwindigkeitsbereich zulässiger Neutronen einzustellen.
- Bisher wurde der Abstand l_1 zwischen Absorber und Glasplatte eingestellt, indem der Absorber mittels Piezoaktuoren in der Höhe verfahren werden konnte. So konnte allerdings die Stufenhöhe zwischen zwei unteren Glasplatten nicht variiert werden. Es war dazu nötig, das Vakuumgefäß zu öffnen.
Für Experimente zum Quantum Bouncing Ball ist dies unerwünscht. Deswegen wird im nächsten Experiment der Absorber auf einer festen Höhe gehalten und dort mit Hilfe von Mikrometerschrauben eben ausgerichtet. Zwei z-Verschiebetische können dann die unteren Glasplatten unabhängig voneinander in der Höhe variieren. Damit lassen sich l_1 und l_2 komfortabel von außen einstellen und variieren.
- Mit den vorigen Änderungen muss nun auch das Vakuumgehäuse vergrößert werden, um zusätzlichen Platz für z-Verschiebetische und eventuell das Taper-Absorber-System zu gewinnen.
- Zu ersetzen ist auch die μ -Metall-Abschirmung.

Damit müssen an allen Komponenten des Experiments Veränderungen vorgenommen werden. Einige der Änderungen werden im nächsten Kapitel detailliert beschrieben.

Kapitel 6

Optimierung der Realisierung einzelner Komponenten

6.1 Test eines ortsauflösenden Online-Detektors für UCNs

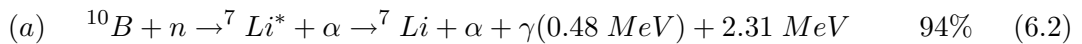
Um die Wellenfunktion ultrakalter Neutronen mit hinreichender Genauigkeit bestimmen zu können, ist ein Detektor mit einer Ortsauflösung in der Größenordnung eines Mikrometers nötig. Aufgrund der geringen Statistik sollte außerdem die Nachweiswahrscheinlichkeit des Detektors möglichst hoch sein und der Untergrund gering.

Ein generelles Problem bei der Konstruktion eines Detektors, der diese Anforderungen erfüllt, ist die Tatsache, dass ultrakalte Neutronen nur schlecht nachgewiesen werden können. Zum einen ist die bisher stets ausgenutzte Eigenschaft, dass ultrakalte Neutronen an den meisten Materialien unter allen Einfallswinkeln total reflektieren, hinderlich. Zum anderen sind Neutronen elektrisch neutral und können daher nicht direkt detektiert werden. Vielmehr ist die Konversion in ein nachweisbares, geladenes Teilchen nötig. Zwei mögliche Neutronenkonverter werden im Folgenden kurz betrachtet.

^{10}B als Neutronenkonverter Das Isotop ^{10}B hat einen verglichen mit anderen Isotopen riesigen Absorptionsquerschnitt σ für thermische Neutronen ($E_{kin} = 25 \text{ meV}$) von 3837 b , weshalb es als Neutronenkonverter eingesetzt werden kann. Der Absorptionsquerschnitt ist proportional zum Kehrwert der Geschwindigkeit. Somit ergibt sich für ein ultrakaltes Neutron mit der in unserem Experiment erwarteten mittleren Geschwindigkeit 6 m/s ein Absorptionsquerschnitt von

$$\sigma_{UCN}(^{10}\text{B}) = 3837 \text{ b} \cdot \frac{2200 \text{ m/s}}{6 \text{ m/s}} \approx 1.41 \text{ Mb}. \quad (6.1)$$

Der Nachweis der Neutronen funktioniert mit Hilfe der folgenden Kernreaktion:



Das Neutron reagiert mit einem Borkern zu einem Lithiumkern und einem α -Teilchen. In 94% der Fälle wird außerdem ein γ -Quant emittiert. Im ersten Reaktionszweig ergeben sich für die Energie- und Impulsbedingungen

$$\begin{pmatrix} E_n \\ \vec{p}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_\alpha \\ \vec{p}_\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{Li} \\ \vec{p}_{Li} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_\gamma \\ \vec{p}_\gamma \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

im zweiten Zweig

$$\begin{pmatrix} E_n \\ \vec{p}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_\alpha \\ \vec{p}_\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{Li} \\ \vec{p}_{Li} \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Der Impuls des UCNs ist vernachlässigbar klein, ebenso der Impuls des Photons im ersten Reaktionszweig. Das α -Teilchen und der Lithiumkern werden demnach in entgegengesetzte Richtungen emittiert, die Emission erfolgt isotrop in alle Raumrichtungen. Das System ist kinematisch vollständig bestimmt, die entstehenden α -Teilchen bzw. Lithiumkerne sind monoenergetisch. Die Energien der Reaktionsprodukte sowie deren Reichweite in Bor gibt die folgende Tabelle:

	E_α	$R_{max,\alpha}$	E_α	$R_{max,\alpha}$
Reaktionszweig (a)	1.47 MeV	3.16 μm	0.84 MeV	1.53 μm
Reaktionszweig (b)	1.78 MeV	3.92 μm	1.01 MeV	1.73 μm

Tabelle 6.1: Kinetische Energien der Reaktionsprodukte und deren Reichweiten in Bor. Die Daten entstammen der Doktorarbeit von Martin Klein[19].

Um die Nachweiseffizienz für ultrakalte Neutronen zu maximieren, kann die Schichtdicke d der Borschicht auf einer dünnen, für UCNs transparenten Trägerfolie aus Aluminium optimiert werden. Ist die Schichtdicke zu groß, dann können die Reaktionsprodukte die Borschicht nicht verlassen, um danach nachgewiesen zu werden. Ist sie zu klein, können die UCNs eventuell die Borschicht passieren, ohne die Nachweisreaktion auszulösen.

Die Herleitung einer Formel für die Nachweiseffizienz einer Borschicht findet sich in [19]. Es ergibt sich

$$\epsilon = \frac{1}{2\sigma n_a \cdot R_{max}} \left(1 + \sigma n_a \cdot (R_{max} - d) - (1 + \sigma n_a \cdot R_{max}) e^{-\sigma n_a \cdot d} \right). \quad (6.6)$$

Hierbei bezeichnet σ den Absorptionsquerschnitt von ^{10}B , der für ultrakalte Neutronen $\sigma = 3837 b \cdot 2200/v$ beträgt. n_a gibt die Anzahl der Borteilchen pro Volumen an und beträgt $n_a = N_A \rho / A$ mit der Avogadrokonstante N_A , der Massendichte ρ und der Molaren Masse A . R_{max} bezeichnet die in Tabelle 6.1 gegebenen Reichweiten in Bor.

Berücksichtigt man die beiden verschiedenen Zweige der Nachweisreaktion mit ihren unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten, so ergibt sich als Nachweiseffizienz einer Borschicht

$$\eta = 0.94 \cdot (\epsilon(\alpha, \text{Zweig a}) + \epsilon(Li, \text{Zweig a})) + 0.06 \cdot (\epsilon(\alpha, \text{Zweig b}) + \epsilon(Li, \text{Zweig b})). \quad (6.7)$$

Abbildung 6.1 zeigt in Abhängigkeit der Geschwindigkeit des ultrakalten Neutrons das Maximum der Nachweiswahrscheinlichkeit und die zugehörige optimale Schichtdicke. Es können also hohe Nachweiswahrscheinlichkeiten bei geringen Schichtdicken erzeugt werden. Das ist wichtig, weil die Schichtdicke prinzipiell die Ortsauflösung des Detektors limitiert.

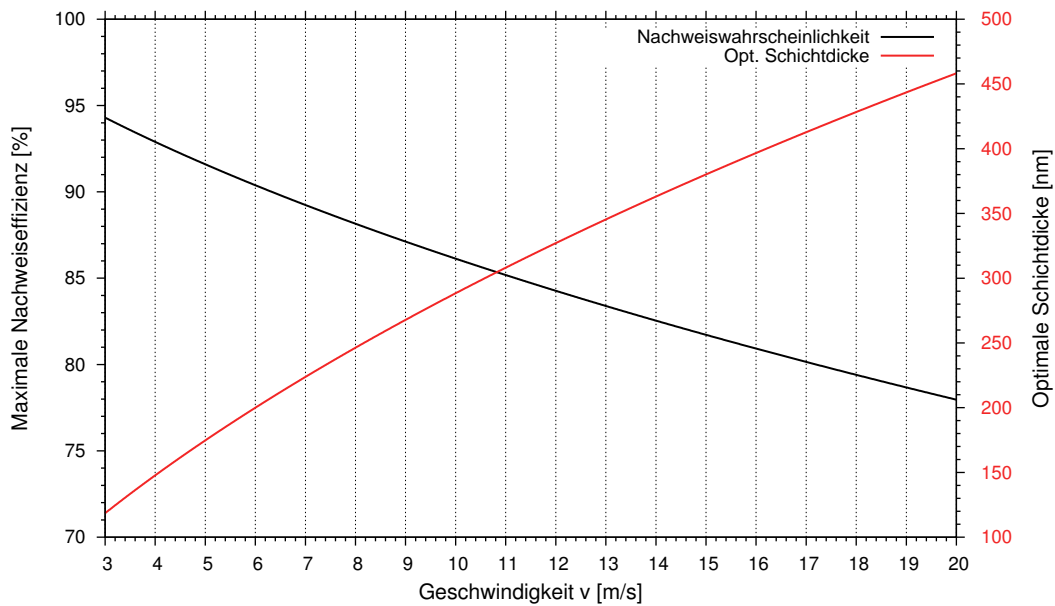
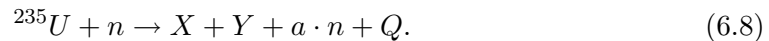


Abbildung 6.1: Optimale Schichtdicke und maximale Nachweiswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit der Geschwindigkeit des UCNs

^{235}U als Neutronenkonverter Auch Uran hat einen hohen Absorptionsquerschnitt für Neutronen, für thermische beträgt er $680.9b$.

Die Konversion des nachzuweisenden Neutrons in nachweisbare geladene Teilchen erfolgt über die Kernreaktion



Dies ist dieselbe Reaktion wie in einem uranbetriebenen Kernreaktor. Die Atommassen der Spaltprodukte X und Y sind statistisch verteilt um die Mittelwerte 95 und 135. a bezeichnet die Anzahl freierwerdender Neutronen und beträgt im Mittel 2.4. Die freierwerdende Energie Q liegt im Bereich über 100 MeV , die meiste Energie entfällt auf die schweren Spaltprodukte, die deshalb näherungsweise in entgegengesetzte Richtungen emittiert werden.

6.1.1 Bisherige Methode: CR39 + Mikroskop

Die in den bisherigen Experimenten erfolgreich eingesetzte Methode, die ultrakalten Neutronen ortsauflöst nachzuweisen, bediente sich eines beschichteten CR-39-Plättchens als Spurdetektor. CR-39 ist ein Kunststoff, der in der Industrie beispielsweise für die Herstellung von Brillengläsern eingesetzt wird. In der Forschung fand er zum Beispiel Anwendung als Spurdetektor in der Kernphysik.

Die Herstellung dieses Detektors, seine Optimierung und Charakterisierung finden sich in der Diplomarbeit von S. L. Nahrwold[20].

Wirkungsweise Das CR-39-Plättchen wird entweder mit einer dünnen Schicht aus Bor oder Uran beschichtet¹. Ultrakalte Neutronen lösen in der dünnen Schicht die im vorigen Abschnitt beschriebenen Kernreaktionen aus, bei denen die Spaltprodukte in entgegengesetzte Richtungen emittiert werden. Dies bedeutet, dass bei hinreichend kleiner Schichtdicke d eines der geladenen Spaltprodukte in die Plastikschiicht eindringen muss. Es hinterlässt dort Veränderungen in der Gitterstruktur des CR39-Plättchens.

Nach dem Experiment kann dann die Borschicht des Detektors mit Hilfe von Natronlauge abgeätzt werden. Die Lauge greift insbesondere die Bereiche des Plastiks mit Gitterfehlern an, was dazu führt, dass sich die Spur der Spaltprodukte mit Hilfe eines guten Mikroskops sichtbar machen lässt. Abbildung 6.2 zeigt zwei typische Bilder von CR39-Plättchen unter dem Mikroskop. Auf der linken Seite war das Plättchen mit Uran beschichtet, auf der rechten mit Bor. Für Uran sind die Spaltprodukte energiereicher, deshalb sind die Spuren länger. Bei dem uranbeschichteten Plättchen fällt auf, dass die

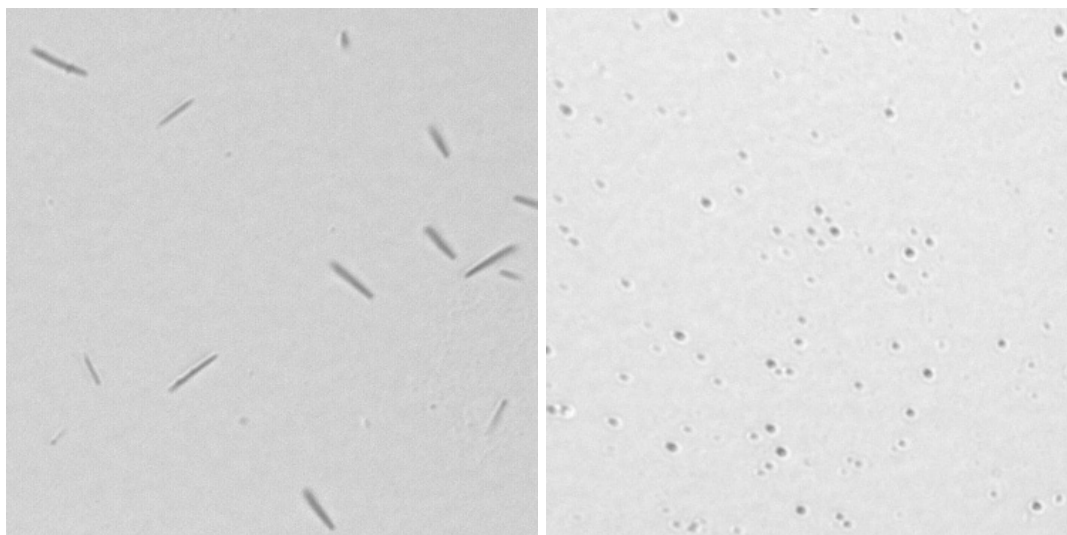


Abbildung 6.2: Mikroskopaufnahmen mit Neutronen belichteter CR39-Plättchen. Das linke Bild entspricht einem Plättchen, welches mit Uran beschichtet war, das rechte mit Bor.

Spuren eher wie Kometenschweife aussehen. Das kommt daher, dass das Mikroskop nur eine Ebene fokussiert. Die Spur, die eigentlich „in die Tiefe“ geht, ist demzufolge nur an einem Punkt scharf. Man muss sicherstellen, dass dies die Oberfläche des Plättchens ist, um systematische Fehler zu vermeiden.

Die Auslese der Bilder erfolgte bis jetzt per Hand.

Diskussion Die Detektion der ultrakalten Neutronen auf diesem Weg hat Vor- und Nachteile. Vorteilhaft ist die mit Borbeschichtungen erreichte hohe Nachweiswahrschein-

¹ Die Beschichtung mit Bor ist technisch anspruchsvoll, da Bor keramische Eigenschaften besitzt. Der Beschichtungsprozess wurde in der ANP - Arbeitsgruppe des Physikalischen Instituts der Universität Heidelberg von M. Klein et. al. erforscht und optimiert, so dass wir die Beschichtung selbst vornehmen können. Uranbeschichtungsanlagen gibt es beispielsweise am Khlopin Radium Institute in St. Petersburg und in naher Zukunft an der Technischen Universität München.

lichkeit von 66% und eine Ortsauflösung von $1.2 \mu\text{m}$ [20].

Von großem Nachteil ist, dass die Messergebnisse während des Experiments nicht zur Verfügung stehen, da das Plättchen erst nach dem Experiment ausgelesen werden kann. Außerdem müssen die Messdaten korrigiert werden, weil sich die Plättchen beim Ätzen mit Natronlauge bei Umgebungstemperaturen von über 40°C verbiegen. Zudem ist der gesamte Ätzprozeß recht heikel, da zu langes Ätzen die Oberfläche des Plastikplättchens zu stark angreift und damit systematische Fehler erzeugt.

6.1.2 Taper + CASCADE

Herkömmliche ortsauflösende Online-Detektoren für Neutronen wie zum Beispiel der CASCADE-Detektor haben für unsere Experimente eine zu schlechte Auflösung. Im Folgenden wird eine Idee vorgestellt, wie trotzdem ein herkömmlicher ortsauflösender Neutronendetektor für unsere Zwecke verwendet werden kann.

Die grundlegende Idee ist, vor den herkömmlichen Detektor eine Art Strahlfächer, den Taper, zu bringen. Die Idee entstand vor einigen Jahren in der Arbeitsgruppe von Dirk Dubbers am Physikalischen Institut der Universität Heidelberg, ein erster Test schlug jedoch damals fehl, weil die ultrakalten Neutronen den Prototypen nicht passieren konnten.

Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurde die Idee des Tapers wieder aufgegriffen, es wurden nach einer Analyse des letzten Tests zwei neue Prototypen konstruiert, gebaut und im Rahmen zweier Teststrahlzeiten am TEST-Strahl des Strahlplatzes PF2 am Institut Laue-Langevin getestet.

Aufbau und Wirkungsweise Der Taper besteht aus dünnen Folien, die am einen Ende zusammengepresst sind und dann fächerförmig zum anderen Ende hin auseinanderlaufen. Eine schematische Abbildung zeigt 6.3. Die Neutronen werden im Bild von links auf

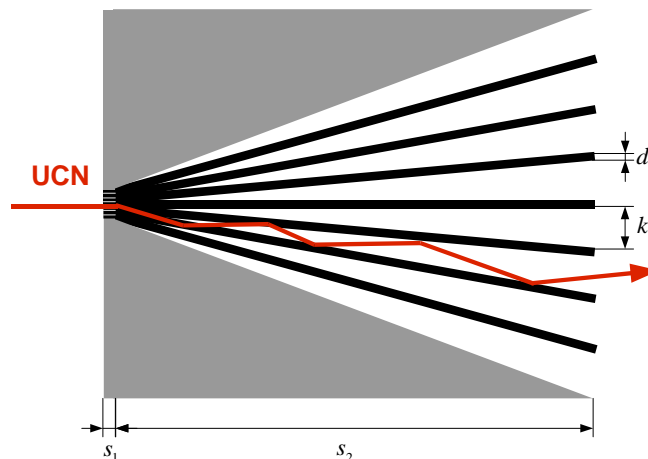


Abbildung 6.3: Schematische Zeichnung des Tapers

den Taper geleitet. Ist ihre x -Geschwindigkeit größer als die Grenzgeschwindigkeit v_{Grenz} des Folienmaterials, so werden sie nicht am Tapereingang reflektiert, sondern tunneln in

die Folien. An dem Punkt, an dem die Folien auseinanderlaufen, treten die ultrakalten Neutronen aus dem Folienmaterial aus, weil dort der Grenzwinkel überschritten wird. Die Öffnungswinkel zwischen zwei Folien β_n sind so berechnet, dass die ultrakalten Neutronen nun in dem Kanal zwischen zwei Folien „gefangen“ sind und bedingt durch ihre Vorwärtsgeschwindigkeit den Detektor erreichen, der sich am hinteren Ende des Tapers anschließt.

Parameter des Tapers und Realisierung im Prototyp Bei der Konstruktion eines Tapers können die folgenden Parameter optimiert werden:

- Das *Folienmaterial* bestimmt die Grenzgeschwindigkeit v_{Grenz} , überhalb der die Neutronen in das Taper-System eindringen können. Für ein Material mit kleiner Grenzgeschwindigkeit verliert man weniger Neutronen durch Reflexion an der Taperöffnung. Allerdings werden dann im Fächerteil die Grenzwinkel von schnelleren Neutronen eventuell überschritten. Für die Prototypen wurden Aluminiumfolien ($v_{Grenz} = 3.2\text{ m/s}$) verwendet.
- Die *Foliendicke* d bestimmt die Ortsauflösung. Je kleiner die Foliendicke, desto besser die Ortsauflösung, desto mechanisch instabiler aber auch der Taper. Aluminiumfolien gibt es minimal in der Stärke $0.7\ \mu\text{m}$. Das stellt enorme Anforderungen an die Herstellung des Tapers. Für den Prototyp, der nur dazu diente, das Versuchsprinzip experimentell zu bestätigen, wurde eine Foliendicke von $48\ \mu\text{m}$ gewählt. Folien in dieser Dicke lassen sich relativ leicht spannen und sind sehr robust.
- Die *Anzahl der Folien* r legt die Anzahl der Kanäle und damit zusammen mit der Foliendicke d den maximal möglichen Messbereich fest. Außerdem werden mit der Festlegung von r die Ausmaße des Tapers festgelegt, da das System so zu konfigurieren ist, dass im Folienfächer keine Grenzwinkel überschritten werden. Es ist darauf zu achten, ob eine gerade oder ungerade Anzahl an Folien verwendet werden soll. Ist r gerade, so werden die beiden mittleren Folien auf denselben Kanal abgebildet. Um keine systematischen Fehler zuzulassen, muss dieser Kanal dann doppelt so groß gewählt werden. Ist r ungerade, so treten die Neutronen, die in die mittlere Folie eingedrungen sind, nicht mehr in das Fächersystem ein. Die Messdaten sind darauf zu korrigieren. Idealerweise wählt man daher eine ungerade Anzahl r mit einer mittleren Folie, die deutlich dünner ist als die übrigen Folien. Der erste Prototyp besaß fünf gleiche Folien, der zweite Prototyp sieben, wobei die Gehäusewand ebenfalls als Folie diente.
- Die *Spannlänge* s_1 muss lang genug sein, um die Folien sicher mechanisch zu spannen. Auf der anderen Seite sollte sie klein sein, um Absorptionsverluste zu minimieren. Für beide Prototypen wurden die Folien auf 0.5 mm gespannt.
- Die *Größe eines Kanals* k ist abhängig von der Ortsauflösung des Detektors hinter dem Taper. Wird ein CASCADE-Detektor eingesetzt, sollte $k = 3\text{ mm}$ betragen. Für die Prototypen wurde $k = 5\text{ mm}$ gewählt.
- Die *Länge des Fächers* s_2 wird bestimmt durch das erwartete Geschwindigkeitsspektrum der Neutronen, die Anzahl der Folien d und die Größe eines Kanals k . Für beide Prototypen wurde $s_2 = 49.5\text{ mm}$ gewählt.

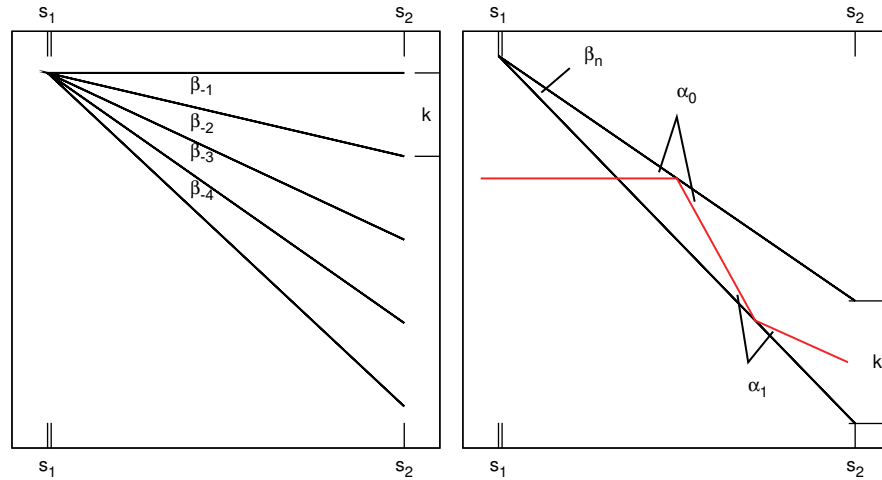


Abbildung 6.4: Berechnung der Reflexionswinkel am Taper

Konstruktion des Tapers Es ist wichtig, dass innerhalb des Fächers keine Grenzwinkel überschritten werden, damit die Neutronen in einem Kanal „gefangen“ sind und bedingt durch ihre Vorwärtsgeschwindigkeit den Detektor erreichen können. Der Grenzwinkel ergibt sich aus der in Abschnitt 2.1.1 beschriebenen Grenzggeschwindigkeit v_{Grenz} . Trifft ein Neutron unter einem Winkel α auf eine Folie (α bezeichne den Winkel zwischen Neutron und Folie), so muss die Vertikalkomponente der Geschwindigkeit kleiner sein als die Grenzggeschwindigkeit, damit Totalreflexion auftritt. Dieser Ansatz führt auf den Grenzwinkel α_{Grenz} :

$$\sin \alpha_{Grenz} = \frac{v_{Grenz}}{v}. \quad (6.9)$$

Damit der Taper funktionieren kann, muss sichergestellt sein, dass die Einfallswinkel des Neutrons bei jedem Auftreffen auf die Folie kleiner sind als der Grenzwinkel. Für die Prototypen wurden Aluminiumfolien verwendet. Der Grenzwinkel von Aluminium beträgt

$$\alpha_{Grenz} = \arcsin \left(\frac{3.2 \text{ m/s}}{v} \right). \quad (6.10)$$

Im linken Bild von Abbildung 6.4 ist schematisch die untere Hälfte des Fächerteils des Tapers für eine ungerade Foliengahl r gezeigt. Die Öffnungswinkel der Kanäle werden mit β_n bezeichnet. Der Index n gibt die Kanalnummer an. Im unteren Teil des Tapers sind die Kanäle negativ nummeriert, im oberen positiv.

Auf der rechten Seite derselben Abbildung ist die Vergrößerung eines Kanals und eine Trajektorie eines Neutrons dargestellt. Der Einfallswinkel des Neutrons für die erste Reflexion heiße α_0 , für alle folgenden α_i . Die Einfallswinkel der i -ten Reflexion lassen sich bei gegebenem Ersteinfallswinkel α_0 und Kanalöffnungswinkel β_n rekursiv berechnen.

Das Ergebnis lautet:

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \beta_n = \alpha_0 - 1\beta_n \quad (6.11)$$

$$\alpha_2 = 2\alpha_1 - \alpha_0 = \alpha_0 - 2\beta_n \quad (6.12)$$

$$\alpha_3 = 2\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_0 - 3\beta_n \quad (6.13)$$

$$\dots \quad (6.14)$$

$$\alpha_i = 2\alpha_{i-1} - \alpha_{i-2} = \alpha_0 - i\beta_n. \quad (6.15)$$

Sollte α_0 den Grenzwinkel nicht unterschreiten, so ist das Neutron tatsächlich im Kanal n gefangen.

Der Winkel β_n ist abhängig von der Länge des Fächers s_2 und der Kanalgröße k :

$$\beta_1 = \tan\left(\frac{k}{s_2}\right) \quad (6.16)$$

$$\beta_2 = \tan\left(\frac{2k}{s_2}\right) - \tan\left(\frac{k}{s_2}\right) \quad (6.17)$$

$$\beta_3 = \tan\left(\frac{3k}{s_2}\right) - \tan\left(\frac{2k}{s_2}\right) \quad (6.18)$$

$$\dots \quad (6.19)$$

$$\beta_n = \tan\left(\frac{nk}{s_2}\right) - \tan\left(\frac{(n-1)k}{s_2}\right). \quad (6.20)$$

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die Parameter, die für den zweiten Prototypen verwendet wurden:

Folienmaterial	v_{Grenz}	d	k	r	s_1	s_2
Aluminium	3.2 m/s	48 μ m	5 mm	9	0.5 mm	49.5 mm

Bei exakt horizontalem Auftreffen der Neutronen ist der Ersteinfallswinkel α_0 im Kanal n gleich $\alpha_0 = \beta_{n-1}$. Mit dieser Beziehung kann für jeden Kanal eine maximale Geschwindigkeit eines Neutrons berechnet werden, unter der kein Grenzwinkel unterschritten werden kann.

Kanalnummer	± 1	± 2	± 3	± 4
v_{max}	∞	31.9 m/s	16.2 m/s	11.0 m/s

Die maximal zulässige Geschwindigkeit im untersten bzw. obersten Kanal $n = \pm 4$ könnte kritisch sein, da im TEST-Strahl Neutronen mit bis zu $v = 15$ m/s vorkommen. Das Geschwindigkeitsspektrums ist in 6.10 gezeigt.

Bau des Tapers Um die Funktionsweise des Tapers experimentell zu überprüfen, wurden von der Mechanischen Werkstatt des Physikalischen Instituts zwei Prototypen des Tapers gebaut. Eine Zusammenfassung der Parameter gibt die folgende Tabelle:

Folienmaterial	Folienstärke	s_1	s_2	k
Aluminium	48 μ m	0.5 mm	49.5 mm	5 mm

Der erste Prototyp besaß ein Messinggehäuse und fünf Folien. Der zweite war mit einem Aluminiumgehäuse ausgestattet und verfügte über sieben Folien. Zusätzlich wirkte auch die Innenseite des Gehäuses wie eine Folie, so dass insgesamt acht Kanäle zur Verfügung standen.

Der zweite Prototyp wurde als direkte Verbesserung des ersten gebaut. Für den ersten konnten im Rahmen einer knapp bemessenen Experimentierzeit nur qualitative Schlüsse gezogen werden, die Transmission war aber prinzipiell vorhanden.

Als Verbesserung im Vergleich zum ersten Taper ist die Möglichkeit zu nennen, die Folien jederzeit nachzuspannen. Dies konnte realisiert werden, weil die Spacer, die an den Seiten des Tapers jeweils zwei Folien auf Abstand hielten, beweglich konstruiert wurden. Die Spacer konnten mit Hilfe von vier Schrauben nachgezogen werden.

Im Anhang sind einige technische Zeichnungen des zweiten Prototyps des Tapers gezeigt (siehe Anhang A).

Testmessungen Im Rahmen zweier Experimentierzeiten am TEST-Strahl des Strahlplatzes PF2 am Institut Laue-Langevin wurde versucht, die Funktionsweise des Tapers experimentell zu verifizieren. Im Folgenden wird auf die zweite Strahlzeit näher eingegangen. Um den Taper zu testen, wurden folgende Experimente geplant und durchgeführt:

- *Transmissionstest*: Es soll gezeigt werden, dass ultrakalte Neutronen den Taper passieren können. Die Effizienz des Tapers soll bestimmt werden.
- *Kanaltest*: Es soll gezeigt werden, dass ein Neutron, welches in eine bestimmte Folie des Tapers eindringt, auch im zugehörigen Kanal nachgewiesen wird.

Leider stand für die Messungen kein ortsauflösender Detektor zu Verfügung, weshalb sie mit Hilfe eines Integraldetektors und einer weiteren Blende erfolgte. Das hat den Nachteil, dass mehr Messungen benötigt werden und damit bei vorgegebener Strahlzeit die Statistik leidet. Eine weitere Schwierigkeit ergab sich dadurch, dass eine Eintrittsblende mit einer Öffnung kleiner oder gleich der Foliendicke $d = 48 \mu\text{m}$ nicht zur Verfügung stand. Es wurde stattdessen eine Blende verwendet, die eine Öffnung von 1 mm aufwies. Dies ist möglich, wenn man die Messungen als Funktion der Blendenposition durchführt und dann die Differenz jeweils zweier Messungen betrachtet.

Die Versuche fanden nicht im Vakuum, sondern in Luft statt. Den schematischen Versuchsaufbau zeigt Abbildung 6.5:

Transmissionsmessung Für die Transmissionsmessung des Tapers wurde Blende 2 nicht verwendet. Der Versuchsaufbau wurde so nah wie möglich vor das Strahlrohr gebracht, mit Hilfe von Verschiebetischen auf die Strahlmitte justiert und mit B_4C – Platten gut abgeschirmt.

Nach einer Messung des Untergrunds wurde die Transmission des Tapers in Abhängigkeit der Position von Blende 1 bestimmt. Diese bestand aus $D = 2 \text{ mm}$ starkem Edelstahl, die Blendenöffnung betrug 1 mm .

Die Taperöffnung bestand aus 7 Aluminiumfolien der Dicke $d = 48 \mu\text{m}$. Das Gehäuse bestand ebenfalls aus Aluminium, um die Taperöffnung herum befand sich eine dünne Schicht aus Gadoliniumfarbe. Gadolinium hat einen sehr hohen Absorptionsquerschnitt für Neutronen. Um eine Transmission der Neutronen durch das Aluminiumgehäuse des

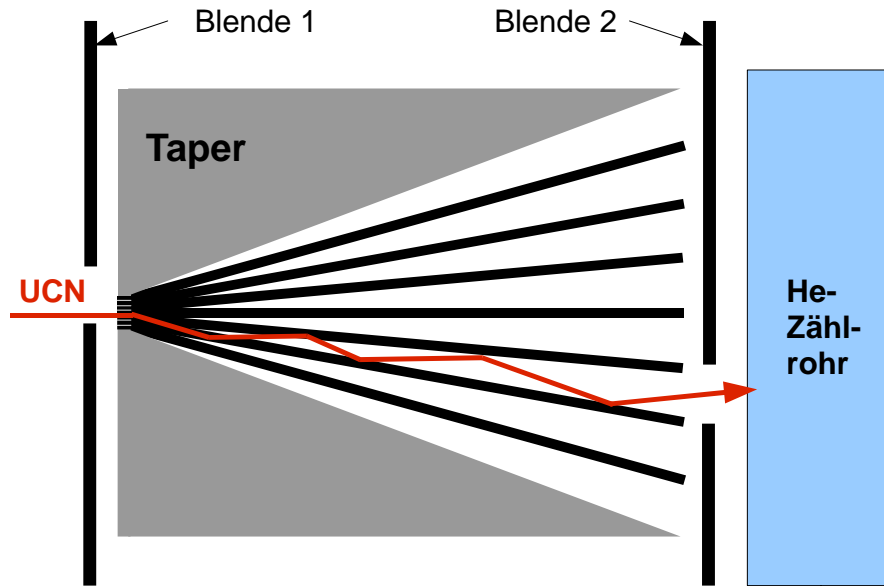


Abbildung 6.5: Schematischer Versuchsaufbau

Tapers zu verhindern, wurde Gadoliniumoxid mit einem Zweikomponentenkleber vermischt und auf das Gehäuse um die Taperöffnung aufgetragen. Damit entspricht das Transmissionsprofil der Taperöffnung

$$T_{Taperoeffnung} = \begin{cases} 0 & v < v_{grenz} \\ 1 & v \geq v_{Grenz}. \end{cases} \quad (6.21)$$

Die Transmission durch den Taper entspricht einer Faltung der Transmissionsprofile von Blende und Taperöffnung. Die Faltung zweier Rechtecke ergibt ein Trapez. Das Ergebnis der Messung ist in Abbildung 6.6 dargestellt. Die Messdaten sind in schwarz dargestellt, die rote Kurve entspricht einem Fit an die Daten. Aus diesem ergeben sich die folgenden Werte:

Untergrund	Maximaltransmission	Flankenanstieg
$(0.5 \pm 0.1)s^{-1}$	$(8.7 \pm 0.1)s^{-1}$	$(10.1 \pm 0.4)s^{-1}/mm$

Aus der Maximaltransmission lässt sich die Effizienz des Tapers abschätzen. Dazu wurde eine Messung gemacht, in der der Taper aus dem Versuchsaufbau entfernt wurde und sich damit nur die Blende 1 im Strahl befand. Es ergab sich eine Blendentransmission von $T_{Blende1} = (220 \pm 1)s^{-1}$. Das Verhältnis der Transmissionen gibt einen Hinweis auf die Effizienz des Tapers:

$$\epsilon_{Taper} = \frac{T_{Taper}}{T_{Blende}} \cdot \frac{d_{Blende} \cdot l_{Blende}}{d_{Taper} \cdot l_{Taper}} = \frac{8.7 s^{-1}}{220 s^{-1}} \cdot \frac{1 mm \cdot 70 mm}{0.336 mm \cdot 65 mm} \approx 13\%. \quad (6.22)$$

Es wurde auf die verschiedenen Dimensionen Länge l und Breite d der Blende bzw. des Tapers korrigiert.

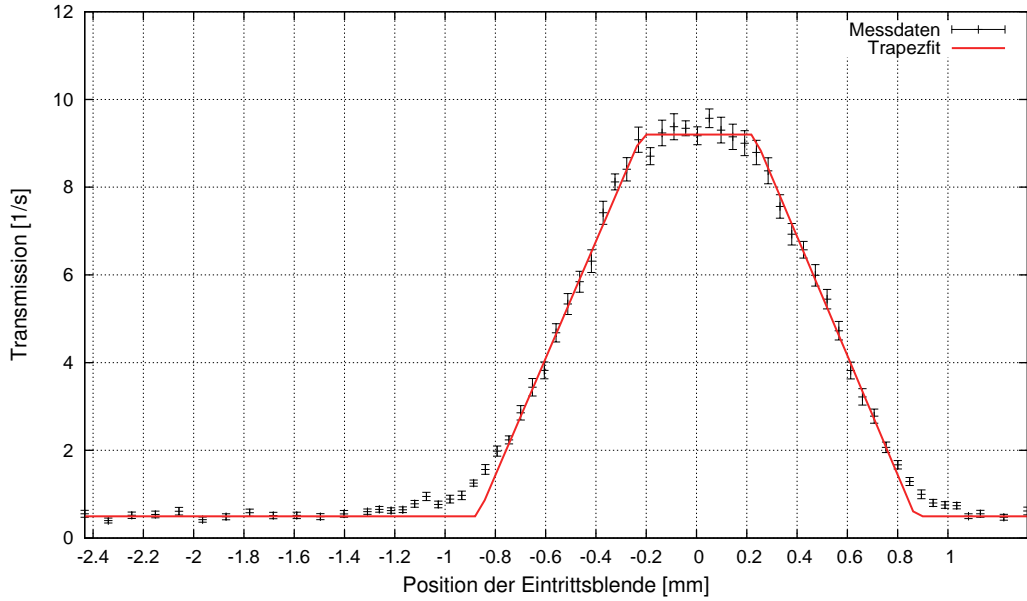


Abbildung 6.6: Ergebnis der Transmissionsmessung.

Verluste im Taper werden dadurch erwartet, dass die Neutronen eine Aluminiumschicht der Dicke s_1 durchdringen müssen. Quantitativ ist zu erwarten, dass nur der Anteil

$$\int dv e^{-\sigma_{Al}(v) \cdot n_a \cdot s_1} \cdot f(v) \approx 77\% \quad (6.23)$$

die auf der Länge s_1 gespannten Aluminiumfolien durchdringen kann. $\sigma_{Al}(v)$ entspricht dem geschwindigkeitsabhängigen Absorptionsquerschnitt von Aluminium, der in Formel (6.1) gegeben ist. $f(v)$ bezeichnet die Geschwindigkeitsverteilung, die in 6.10 gezeigt ist. Weitere Verluste entstehen bei jeder Reflexion im Fächerteil des Tapers. Die Anzahl an Reflexionen ist schwer abzuschätzen. Bei exakt waagrechtem Einfall auf den Taper ist die Anzahl der Reflexionen gering, da sich die Trajektorie des Neutrons schnell zur Folienerichtung parallelisiert. Es ist dann mit zwei bis fünf Reflexionen zu rechnen. Für den nicht waagerechten Einfall der Neutronen ist die Zahl an Reflexionen eventuell deutlich höher.

Weitere Verluste sind dadurch zu erwarten, dass die Folien nicht ideal gespannt waren. Zwar wurde am Gehäuse des Prototyps eine Spannvorrichtung eingebaut, mit der die Folien jederzeit nachgespannt werden konnten. Allerdings konnten nur alle Folien gleichzeitig gespannt werden, wodurch leichte Wellen in den Folien unvermeidlich waren. Dies führt dazu, dass sich die Trajektorien langsamer parallelisieren, im schlimmsten Fall können sogar Grenzwinkel überschritten werden.

Ortsaufgelöste Messung Im zweiten Versuchsteil wurde die Blende 2 in den Versuchsaufbau eingebaut. Es wurde die Transmission durch das System in Abhängigkeit der Blendenkonfiguration gemessen. Blende 2 hatte eine Öffnung von 5 mm , was genau einer Kanalbreite entsprach. Sie konnte mit Hilfe zweier Schrauben und einer eingravierten Skala sub-millimetergenau auf einen Kanal eingestellt werden. Blende 1 wurde

in Schritten von $50 \mu\text{m}$ vor der Taperöffnung verfahren.

Die Messung auf diese Art führt zu einer quadratischen Komplexität. Bei Zählraten im Bereich von erwarteten $1 - 2 \text{ s}^{-1}$ und beschränkter Strahlzeit führt dies zwangsläufig zu mangelnder Statistik. Eine Wiederholung dieser Messung sollte mit einem ortsauflösenden Detektor und damit linearer Komplexität erfolgen.

Für die Messung wurde Blende 2 fest auf einen Kanal eingestellt und Blende 1 in kleinen Schritten verfahren. Es wurde bei einer Einstellung von Blende 1 begonnen, bei der Maximaltransmission zu erwarten war. Dieselbe Messung wurde für alle Kanäle wiederholt. Je nach Transmission konnten bei der vorgegebenen Strahlzeit nur zwischen 50 und 200 Neutronen pro Messpunkt aufgenommen werden.

Theoretisch ist für eine solche Messung zu erwarten, dass sich zu Beginn einer Messreihe die maximal mögliche Transmission durch diesen Kanal ergibt. Verdeckt die Blende 1 die Folie, die zu diesem Kanal leitet, so sollte die Transmission linear auf den Untergrund übergehen. Da Blende 1 von unten nach oben verfahren wurde, war es die untere Kante der Blende, die zum Abfall der Transmission führte. Deshalb sollte der beschriebene Effekt für höher gelegene Kanäle auch erst bei höheren Blendeneinstellungen auftreten. Qualitativ zeigten alle Kanäle dieses Verhalten. Quantitativ sind die Messdaten aufgrund der geringen Zahl an Datenpunkten und der geringen Statistik sehr schwer auszuwerten. Erschwerend kommt hinzu, dass Blende 1 größer war als die Taperöffnung, wodurch der direkte Beweis, dass ein Neutron, welches in eine bestimmte Folie eindringt, auch im zugehörigen Kanal landet, nur durch die Betrachtung der Differenz zweier Messungen möglich ist. Leider musste der Reaktor zwischen den Messungen mehrfach herunter- und wieder heraufgefahren werden, wodurch die Messreihen nicht direkt vergleichbar sind, weil auch die Reaktorleistung variiert wurde.

Die Messergebnisse sind in Abbildung 6.7 gezeigt. Der unterste Kanal (Nr. -4) sowie der oberste (Nr. 4) zeigten eine konstante Transmission von 0.8 bzw. 0.4 s^{-1} . Dies kommt daher, dass zu diesen Kanälen keine Folien am Tapereingang gehören. Kanal Nr. -3 konnte bedingt durch den Reaktorausfall nicht vollständig gemessen werden.

Zwar zeigen die anderen Kanäle den qualitativen Verlauf, allerdings sollte der Abfall der Transmission auf Untergrund im Bereich einer Foliendicke, also ungefähr $50 \mu\text{m}$, liegen. Tatsächlich liegt der Abfall im Bereich zwischen 300 und $600 \mu\text{m}$. Es ist bisher nicht geklärt, woher diese Abweichung kommt. Es gibt jedoch verschiedene Erklärungsansätze:

- Eine Schrägstellung zwischen Blende und Taper kann den Effekt in dieser enormen Größe nicht erklären.
- Es wäre denkbar, dass nur die schnelleren Neutronen den Taper durchdringen können, diese könnten eventuell die Grenzwinkel überschreiten.
- Der langsame Abfall der Transmission würde auch auftreten, wenn Blende 1 nicht korrekt funktionieren würde. Wären zum Beispiel die schnellen Neutronen des Strahls in der Lage, das Edelstahl der Blende zu durchdringen, dann würde dies die Messergebnisse stark verfälschen, da schnelle Neutronen auch vom Taper bevorzugt durchgelassen werden.

Endgültige Klarheit kann hier nur ein neuer Test liefern, der dann mit einem ortsauflösenden Detektor und einer besseren Blende erfolgen sollte.

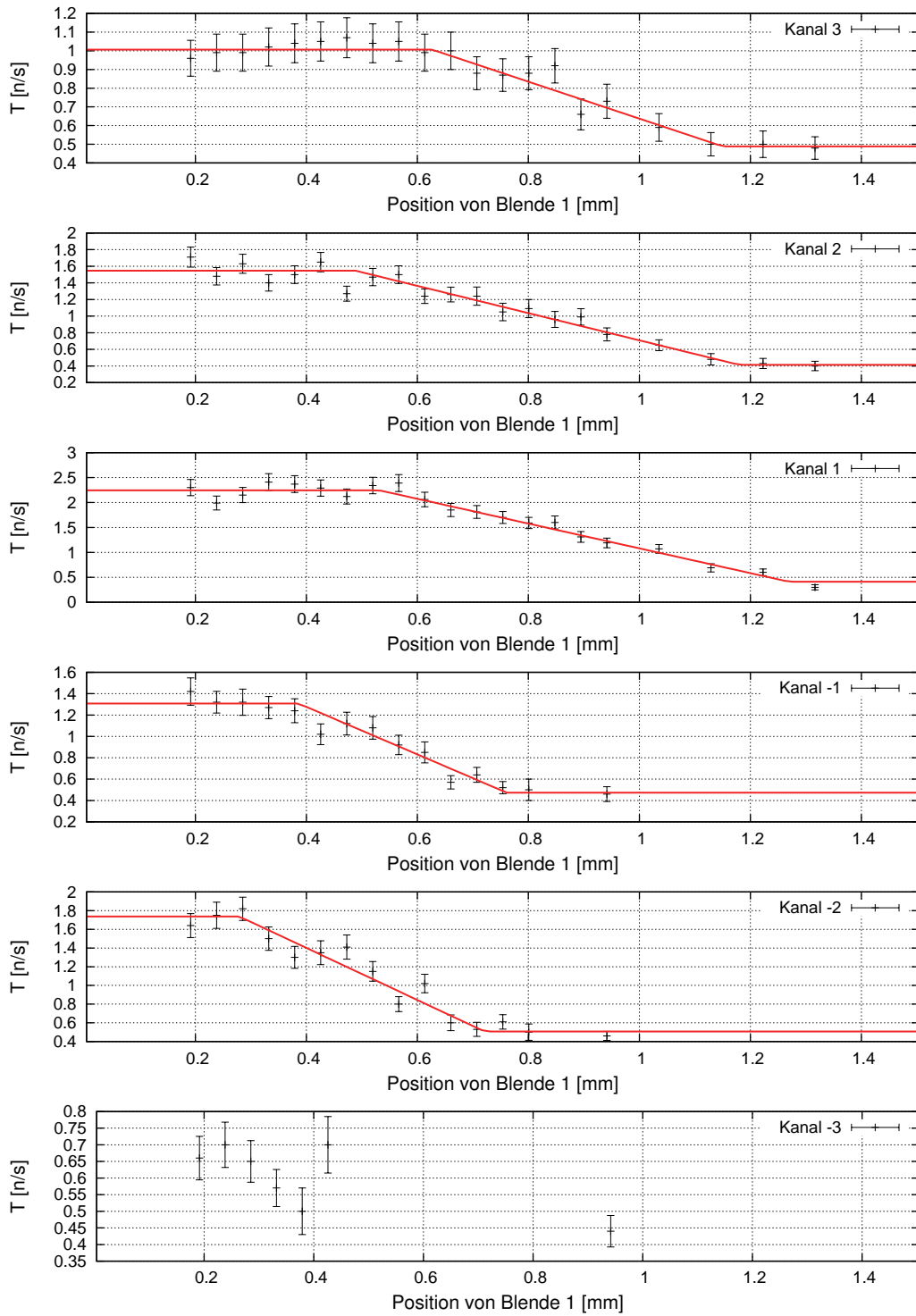


Abbildung 6.7: Messergebnisse der ortsauflösenden Messung

6.2 Zuführung der ultrakalten Neutronen zum Experiment

Von großer Wichtigkeit für unsere Gravitationsexperimente ist die Geschwindigkeitsverteilung der Neutronen in x-Richtung. Sie geht in alle Rechnungen ein, da die Zeitentwicklung des Systems von der x-Geschwindigkeit abhängt und damit alle quantenmechanischen Wahrscheinlichkeitsdichten mit dem Geschwindigkeitsspektrum gefaltet werden müssen.

Diese Tatsache ist im Allgemeinen ein störender Effekt für alle unsere Experimente. Die Faltung mit dem Spektrum entspricht einer Mittelung verschiedener Wellenfunktionen, wodurch es beispielsweise zu einer Verringerung der Sensitivität auf Fünfte Kräfte kommt. Auch das Revival der Wellenfunktion für den Quantum Bouncing Ball ist nicht messbar, wenn die Geschwindigkeitsverteilung zu breit ist. Dies wurde im Kapitel zum Quantum Bouncing Ball in Abbildung 3.8 gezeigt.

Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurde eine Flugzeitmessung am TEST-Strahl des Strahlplatzes PF2 am ILL durchgeführt. Es wurde getestet, wie das Geschwindigkeitsprofil in x-Richtung durch den Einsatz verschiedener Konfigurationen von Strahlrohren beeinflusst werden kann. Die Messungen konnten aufgrund eines Defekts am Schrittmotor des vom Paul-Scherrer-Instituts bereitgestellten Choppers nicht mehr im Rahmen meiner Strahlzeit durchgeführt werden. Sie wurden freundlicherweise von Gwendal Rogel und Peter Geltenbort im Anschluss durchgeführt und von mir ausgewertet.

Versuchs Idee Ausgangspunkt und Motivation des Versuchs war die Tatsache, dass das Geschwindigkeitsspektrum des Strahls für unser Experiment zu breit ist und sein Maximum bei zu hohen Geschwindigkeiten hat. Für unser Experiment wird ein Spektrum bevorzugt, welches sich näherungsweise als dreieckig mit einer totalen Breite von ungefähr 2 m/s beschreiben lässt.

Eine untere Abschneidekante für das Spektrum kann sehr leicht gesetzt werden, indem eine dünne Folie in das Strahlrohr eingelassen wird. Neutronen mit einer Geschwindigkeit $v_x < v_{Grenz}$ können diese Potentialbarriere nicht passieren.

Komplizierter ist es, das Spektrum nach oben hin zu beschränken. In diesem Experiment wurde der Einsatz von doppelt gebogenen Strahlrohren getestet. Zu schnelle Neutronen werden an der Biegung den Grenzwinkel überschreiten und können unseren Versuchsaufbau für das Gravitationsexperiment nicht mehr erreichen. Eine Skizze der Versuchsidee zeigt Abbildung 6.8

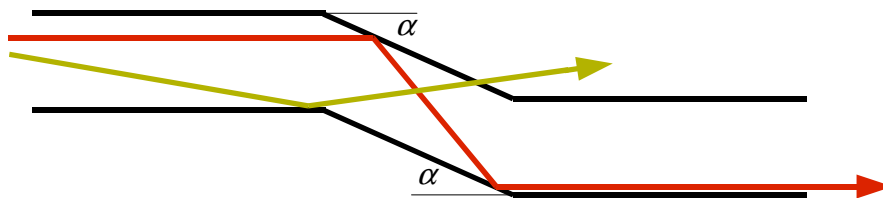


Abbildung 6.8: Skizze der Versuchsidee

Aufbau Der Versuch besteht im Wesentlichen aus der zu testenden Strahlrohrkonfiguration, einem Chopper, einem weiteren geraden Strahlrohr und einem Detektor.

Ein Chopper besteht im Allgemeinen aus einer sich drehenden Scheibe aus einem neutronenabsorbierenden Material mit einer Aussparung in einer bestimmten Form. Diese Scheibe wird vor das Strahlrohr gebracht. Neutronen können das System nur zu bestimmten Zeiten t_1, t_2, \dots mit festen Abständen Δt passieren. Im Anschluss an den Chopper passieren die Neutronen ein Strahlrohr der bekannten Länge s (engl. distance of flight, dof). Danach werden sie von einem Detektor nachgewiesen. Aus der vergangenen Flugzeit kann die Geschwindigkeit der Neutronen bestimmt werden. Die Geschwindigkeitsspektren wurden für vier verschiedene Strahlrohrkonfigurationen bestimmt. Abbildung 6.9 zeigt die Anordnung der Strahlrohre für die vier Teile des Experiments.

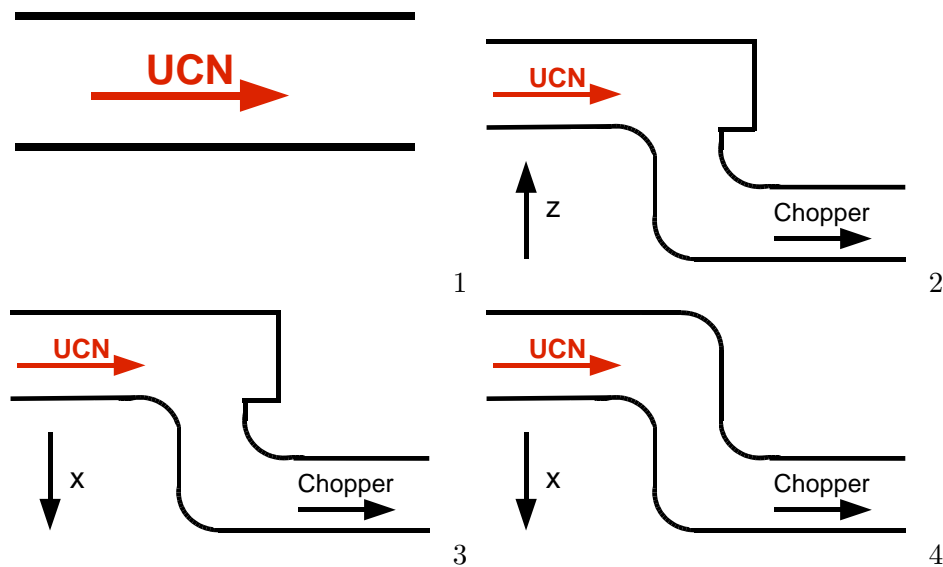


Abbildung 6.9: Die verschiedenen Strahlrohrkonfigurationen

Bestimmung der Geschwindigkeitsspektren Experimentell wurden Flugzeitspektren bestimmt, das heißt die Anzahl der Neutronen in Abhängigkeit der vergangenen Flugzeit. Um aus diesen Daten auf die Geschwindigkeitsspektren zu schließen, muss nachdifferenziert werden:

$$\frac{dN}{dv} = \frac{dN}{dt} \cdot \left| \frac{dt}{dv} \right| = \frac{dN}{dt} \cdot \frac{t^2}{s}. \quad (6.24)$$

Geschwindigkeitsspektren Zuerst wurde das Geschwindigkeitsprofil des TEST-Strahls mit geradem Strahlrohr für die Flugstrecken 1.00 m , 1.29 m und 2.09 m gemessen. Abbildung 6.10 zeigt das Ergebnis auf der linken Seite als Flugzeit-, auf der rechten als Geschwindigkeitsspektrum. Auffällig ist, dass sich das Spektrum zu größeren Geschwindigkeiten hin verändert. Dies lässt darauf schließen, dass langsamere Neutronen stärker aus dem Rohr gestreut werden als schnellere.

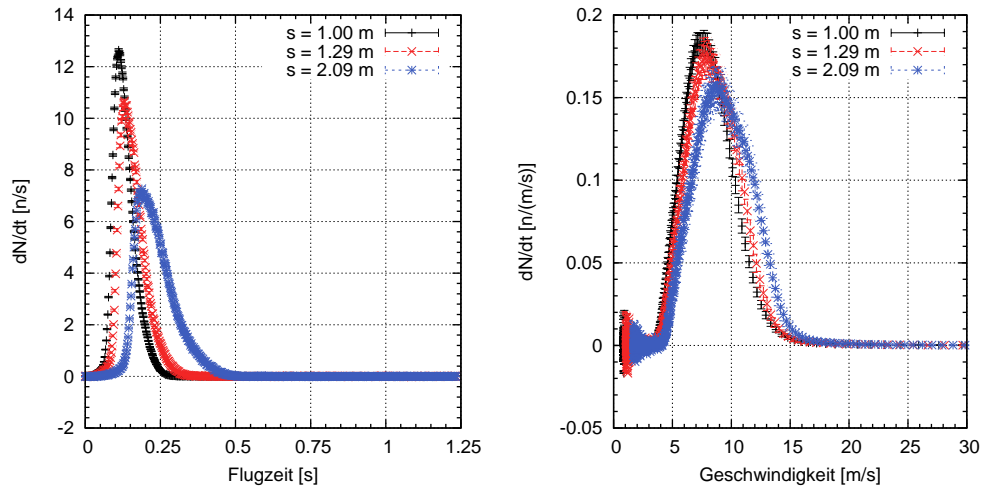


Abbildung 6.10: Flugzeit- und Geschwindigkeitsspektren der Neutronen am TEST-Strahl in Abhängigkeit der Strahlrohrlänge s

In Abbildung 6.11 ist der Vergleich der Geschwindigkeitsspektren aller verwendeten Strahlrohrkonfigurationen dargestellt. Auf der linken Seite sind die Spektren auf dieselbe Fläche normiert. Die Kurven für Setup 2 und 3 kommen einer dreieckigen Verteilung recht nah. Auch das Maximum der Geschwindigkeit wäre mit unseren Gravitationsexperimenten verträglich. Der Setup mit den gebogenen Strahlrohren (Setup 4) ergibt ein für unsere Zwecke zu breites Spektrum. Auf der rechten Seite der Abbildung 6.11 sind

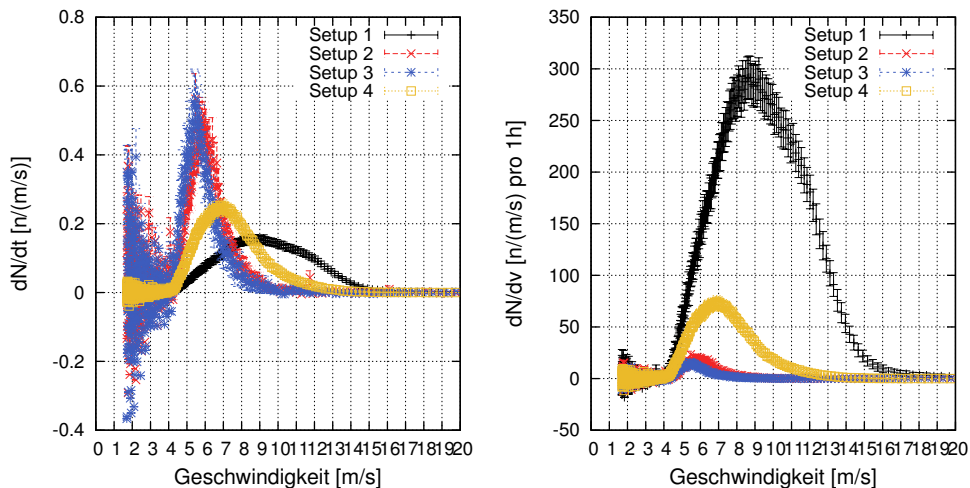


Abbildung 6.11: Geschwindigkeitsspektren für die vier verschiedenen Strahlrohrkonfigurationen. Im linken Bild sind die Spektren auf 1 normiert, im rechten auf gleiche Messzeit.

dieselben Spektren gezeigt, allerdings sind sie auf die gleiche Messzeit von 1 h normiert. Setup 2 und 3 weisen nur eine sehr geringe Transmission auf, die Kurven liegen sehr deutlich unter dem Ausgangsspektrum mit geradem Strahlrohr (schwarz). Dies könnte

allerdings auch daran liegen, dass im Experiment für die erste Biegung ein T-Stück verwendet wurde und kein gewinkeltes Strahlrohr (siehe schematische Abbildung 6.9).

Es ist wichtig, dass vor Beginn des Gravitationsexperiments die Strahlrohrkonfiguration optimiert wird, um das für unser Experiment gewünschte dreieckige Geschwindigkeitsprofil $v_x = 6 \pm 1 \text{ m/s}$ zu erhalten. Die Messergebnisse dieses Versuchs zeigen, dass es möglich ist, das Geschwindigkeitsspektrum der Neutronen gezielt zu beeinflussen. Die Messungen sind jedoch nicht vollständig übertragbar, da das Gravitationsexperiment am UCN-Strahlrohr des Strahlplatzes PF2 vorgesehen ist. Dieser weist ein etwas anderes Ausgangsspektrum auf. Die Neutronen sind dort im Mittel langsamer.

Kapitel 7

Schlussbemerkungen

Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurde ein Experiment weiterentwickelt, mit dessen Hilfe die Beziehung zwischen Quantenmechanik und Gravitation untersucht werden soll. Es wurden Vorschläge gemacht, wie ein solches Experiment optimiert werden kann, um das in der Literatur als „Quantum Bouncing Ball“ bekannte System experimentell zugänglich zu machen. Es wurden Konfigurationen gefunden, in denen sich die klassisch erwartete Höhenverteilung der Neutronen und die quantenmechanische Wahrscheinlichkeitsdichte messbar unterscheiden.

Die Ergebnisse der Berechnungen flossen in ein Proposal ein, mit dem Experimentierzeit an der bislang stärksten Quelle für ultrakalte Neutronen am Institut Laue-Langevin in Grenoble/ Frankreich beantragt wurde. Die Durchführung der Experimente ist für Juli 2008 im Rahmen des Reaktorzyklus *Cycle n° 151 (082)* geplant.

Weiterhin wurde die Sensitivität des Experiments auf Nicht-Newtonsche Gravitation diskutiert. Durch die Betrachtung der Differenzen zweier Messungen mit verschiedenen Plattenbeschichtungen und durch die geschickte Ausnutzung der durch Fünfte Kräfte bedingten Änderung der Zeitentwicklung des Systems können die sich durch die Statistik ergebenden Grenzen auf Nicht-Newtonsche Gravitation um bis zu vier Größenordnungen verbessert werden. Die Ersetzung des rauen Absorbers durch eine glatte Platte führt außerdem zu einer deutlichen Verbesserung der Systematik.

Die Messungen sollen in naher Zukunft am Institut Laue-Langevin in Grenoble durchgeführt werden. Längerfristig gesehen bieten neue, stärkere Quellen für ultrakalte Neutronen eine reizvolle Alternative. Diese werden in den nächsten Jahren fertiggestellt, den Anfang macht noch in diesem Jahr die Spallationsquelle des Paul-Scherrer-Instituts in Villigen in der Schweiz. Die neue Quelle verspricht eine um drei Größenordnungen höhere Anzahl an ultrakalten Neutronen.

Parallel zu den theoretischen Berechnungen wurde der bestehende Versuchsaufbau an beinahe allen Teilen weiterentwickelt und getestet. Die Entwicklung eines ortsauflösenden Detektors für ultrakalte Neutronen mit einer Auflösung im Mikrometerbereich wurde vorangetrieben. Hier ist ein weiterer Test notwendig, um endgültig Klarheit über die Funktionsweise des Tapers zu erhalten. Außerdem konnte die gezielte Beeinflussung des Geschwindigkeitsspektrums für unsere Zwecke gezeigt werden.

Anhang A

Technische Zeichnungen des Prototyps des Tapers

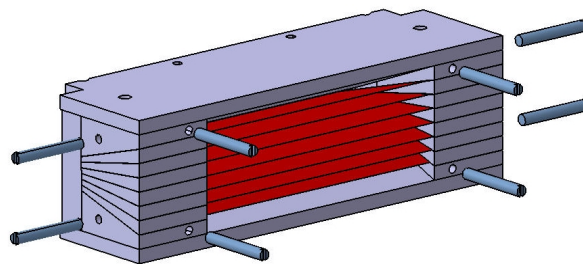


Abbildung A.1: Rückseite des Tapers mit den Kanälen -4 bis +4 (von unten nach oben). Die Aluminiumfolien sind in rot dargestellt. Außerdem sind symbolisch die acht kleinen Schrauben gezeigt, mit denen die Folien nachgespannt werden konnten.

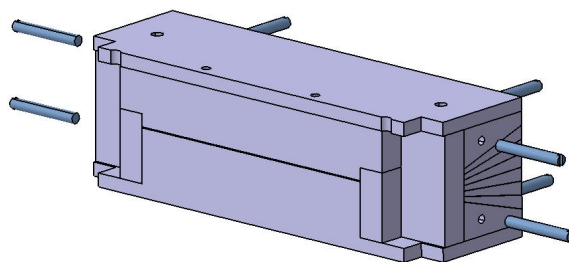


Abbildung A.2: Vorderseite des Tapers

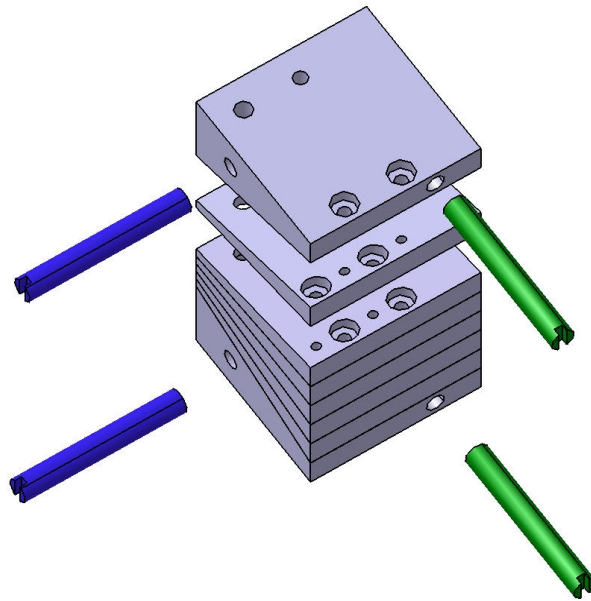


Abbildung A.3: Vergrößerung der Spacer, die den Abstand der Folien am Ende des Tapers herstellten. Immer zwei Spacer wurden gegenseitig verschraubt und spannten die Aluminiumfolie dazwischen. Der gesamte Block an Spacern konnte dann mit Hilfe der vier gezeichneten Schrauben bewegt werden, um die gespannten Folien nachzuspannen.

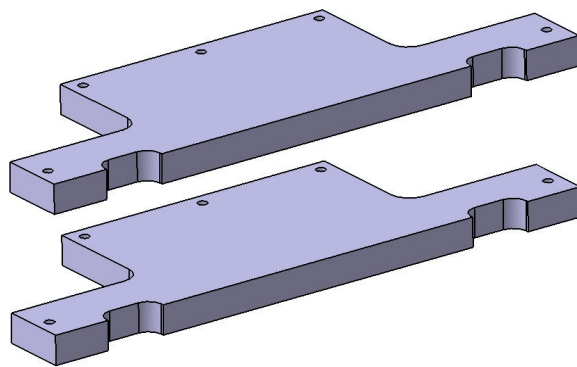


Abbildung A.4: Herstellung der Form der Aluminiumfolien: Zwischen zwei Aluminiumplatten wurden viele Lagen der Aluminiumfolien gespannt. Dann wurden die Platten entlang der im Bild gezeigten Form erodiert.

Anhang B

Literaturverzeichnis

- [1] N. ARKANI-HAMED, S. DIMOPOULOS, and G. DVALI. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. *Phys. Lett. B* **429**, page 263, 1998.
- [2] I. ANTONIADIS. *Phys. Lett. B*, 246:337, 1990.
- [3] I. ANTONIADIS, C. MUNOZ, and M. QUIROS. *Nucl. Phys. B* **397**, page 515, 1993.
- [4] P. CALLIN and C. P. BURGESS. Deviations from newton's law in supersymmetric large extra dimensions. *arXiv:0708.0911*, 2005.
- [5] J. GEA-BANACLOCHE. A quantum bouncing ball. *American Journal of Physics*, Volume 67, Issue 9:776–782, 1999.
- [6] R. L. GIBBS. The quantum bouncer. *American Journal of Physics*, Volume 43, Issue 1:25–28, 1975.
- [7] H. ABELE, S. BAESSLER, and A. WESTPHAL. Quantum states of neutrons in the gravitational field and limits for non-newtonian interaction in the range between $1\ \mu\text{m}$ and $10\ \mu\text{m}$. *Lecture Notes In Physics* **631**, page 355, 2003.
- [8] W.-M. YAO ET. AL. Particle Data Group. *J. Phys. G: Nucl. Part Phys.* **33**, 2006.
- [9] F. RUESS. Quantum States In The Gravitational Field. Diploma thesis, University of Heidelberg, 2000.
- [10] A. WESTPHAL. A quantum mechanical description of the experiment on the observation of gravitationally bound states. *Eur.Phys.J. C* **51**, 367, 2007.
- [11] A. WESTPHAL. Quantum mechanics and gravitation. Master's thesis, Physikalisches Institut der Universität Heidelberg, 2001.
- [12] U. SCHMIDT. *Drehpendeleexperimente zur Untersuchung der Gravitation*. Habilitationsschrift, Universität Heidelberg, 2005.
- [13] A. WESTPHAL, H. ABELE, and S. BAESSLER. Analytically derived limits on short-range fifth forces from quantum states of neutrons in the earth's gravitational field. *arXiv: hep-ph/0703108*, 2007.
- [14] F FERRER and J.A. GRIFOLS. *Phys. Rev. D* **58**, page 096006, 1998.
- [15] J. CHIAVERINI, S.J. SMULLIN, A.A. GERACI, D.M. WELD, and A. KAPITULNIK. *Phys. Rev. Letters* **90**, page 15101, 2003.

- [16] V. NESVIZHEVSKY ET. AL. Quantum states of neutrons in the earth's gravitational field. *Nature*, 415, 2002.
- [17] V. NESVIZHEVSKY ET. AL. Study of the neutron quantum states in the gravity field. *Eur. Phys. J. C* 40, 4:479–491, 2005.
- [18] C. KRANTZ. Quantum states of neutrons in the gravitational field. Master's thesis, Physikalisches Institut der Universität Heidelberg, 2006.
- [19] M. KLEIN. *Experimente zur Quantenmechanik mit ultrakalten Neutronen und Entwicklung eines neuen Detektors zum orts aufgelösten Nachweis von thermischen Neutronen auf großen Flächen*. PhD thesis, Physikalisches Institut der Universität Heidelberg, 2000.
- [20] S. L. NAHRWOLD. Development of a detector for bound quantum states of neutrons in the earth's gravitational field. Master's thesis, Physikalisches Institut der Universität Heidelberg, 2004.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Personen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Mein besonderer Dank gilt meinem Betreuer Herrn Prof. H. Abele für die freundliche Aufnahme in seine Arbeitsgruppe und die exzellente Betreuung. Herrn Prof. B. Jähne danke ich für seine sofortige Bereitschaft, die Arbeit zu begutachten. Gedankt sei außerdem Herrn Dr. Ulrich Schmidt für die vielen fruchtbaren Diskussionen insbesondere in der Schlussphase der Arbeit.

Dem Strahlverantwortlichen des Experimentierplatzes PF2 des Instituts Laue-Langevin, Dr. P. Geltenbort, sowie dem Techniker desselben Strahlplatzes, T. Brenner, möchte ich für ihre Rundumbetreuung während der beiden Experimentierzeiten danken. Vielen Dank dafür, Mark, dass ich während der Experimentierzeit bei Dir wohnen durfte und Du Dir sehr viel Mühe gegeben hast, damit ich mich gern an Grenoble zurückerinnere.

Herrn J. Gerhäuser der Konstruktionsabteilung des Physikalischen Instituts danke ich für seine Geduld und seine Ideen, Bauteile mit schwierigen Funktionen trotzdem genial einfach zu konstruieren. Den Mitarbeitern der Mechanischen Werkstatt und der Elektronikwerkstatt danke ich für die fristgerechte Umsetzung aller Konstruktionspläne.

Allen Mitgliedern der Arbeitsgruppe ANP unter der Leitung von Herrn Prof. D. Dubbers danke ich für spannende Vorträge, Kaffee und Kuchen. Besonders bedanken möchte ich mich bei Herrn Dr. B. Märkisch für die Hilfe bei gnuplot- und L^AT_EX-Problemen sowie bei Herrn Dr. M. Klein für die Beantwortung zahlloser Fragen, die sich durch seine große praktische Erfahrung mit Neutronen und Detektoren beantworten ließen. Danke auch für die zahllosen Tischtennisduelle im Keller zu ungewöhnlicher Zeit, Felix.

Simone und Timo sei gedankt für das Korrekturlesen der Arbeit und die Hilfe bei der Konversion der alten Schreibweise in die neue.

Meiner Familie möchte ich dafür danken, dass sie immer für mich da war und alle meine Ideen unterstützt hat.

Nicht zuletzt danke ich Stéphanie für ihre Unterstützung, ihre Geduld und die schöne Zeit.

Erklärung

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Heidelberg, den