

Skript

Variationsrechnung

Anton Arnold

TU Wien, WS 2007/08; SS 2010, 2012, 2014, 2016, 2018,
2020, 2022, 2024, 2026

2. März 2026

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung, klassische Beispiele	5
2	Euler-Lagrange Gleichungen	11
2.1	Erste Variation	11
2.2	Stationäre Punkte von Variationsintegralen	15
2.3	Natürliche Randbedingungen	21
2.4	Erdmannsche Gleichung und Eckenbedingung	23
3	Zweite Variation, Konvexität	27
3.1	Konvexe Funktionale	27
3.2	Die Legendre-Hadamard-Bedingung	31
3.3	Jacobi-Bedingung, konjugierte Punkte	35
4	Variationsprobleme mit Nebenbedingungen	45
4.1	Isoperimetrische Nebenbedingungen	45
4.2	Holonome Nebenbedingungen	48
4.3	stationäre Stokes Gleichung	54
5	Existenztheorie für Minimierer	57
5.1	Funktionalanalytische Hilfsmittel	57
5.1.1	Sobolev Räume $W^{k,p}(\Omega)$	57
5.1.2	Schwache Konvergenz	58
5.1.3	Unterhalbstetigkeit	59
5.2	Direkte Methode der Variationsrechnung	61
5.3	Minimalflächenproblem	67
5.4	Polykonvexität	70
5.5	Hindernisprobleme / Variationsungleichungen	74
6	Nichtkonvexe Probleme	81
6.1	Relaxierte Funktionale	82
6.2	Γ -Konvergenz	86
6.3	Anwendung der Γ -Konvergenz: Homogenisierung	90
6.4	Young Maße	95
7	Sattelpunktprobleme	105
7.1	“Mountain-Pass” Theorem	105
7.2	Anwendung des MPT: semilineare elliptische PDGl	111

8	Parameter-abhängige Variationsprobleme, Verzweigungstheorie	117
8.1	Verzweigungsprobleme in der Variationsrechnung	117
8.2	Funktionalanalytischer Zugang zur Verzweigungstheorie	120
8.3	Katenoid als Beispiel eines Verzweigungsprozesses	128
A	Literaturverzeichnis	131
B	Folien	133

1 Einleitung, klassische Beispiele

Variationsprobleme sind unendlichdimensionale Minimierungsaufgaben; gesucht sind Funktionen.

Ziel der Vorlesung:

- Vorstellung von typischen Variationsproblemen und Anwendungen;
- typische mathematische Fragestellungen (Existenz, Eindeutigkeit von Lösungen und deren qualitatives Verhalten);
- typische (analytische) Lösungsstrategien.

Die Vorlesung gliedert sich in folgende Themenbereiche:

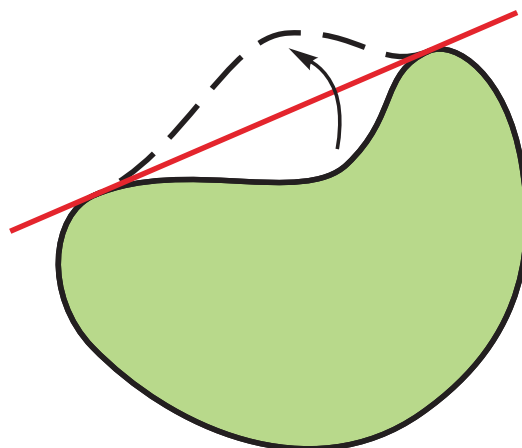
- i) Einleitung mit klassischen bzw. historischen Beispielen; §1.
- ii) Klassische Theorie der Variationsrechnung (“indirekte Methode”). Hier ist das Ziel, notwendige und hinreichende Bedingungen an Minimierer (des Variationsproblems) anzugeben; typischerweise sind diese ODEs oder PDEs. In einfachen Fällen (meist für nur ODEs) kann man deren eindeutige Lösbarkeit erkennen oder sie sogar explizit lösen (im Sinne von ‘ausrechnen’); §§2-4.
- iii) Direkte Methode der Variationsrechnung. Hier ist das Ziel, mit funktionalanalytischen Methoden die Existenz und Eindeutigkeit von Minimierern von Variationsproblemen zu beweisen; §5.
- iv) Weiterführende Probleme: In §§6-7 existiert meist kein Minimierer des betrachteten Variationsproblems. Daher werden Modifikationen des Ausgangsproblems bzw. des Lösungsbegriffs diskutiert, so dass die neuen Probleme (eindeutig) lösbar sind. In §8 hängen die Variationsprobleme von einem Parameter ab, und es wird die Parameterabhängigkeit der zugehörigen Lösungen betrachtet.

Viele Anwendungsprobleme sind generisch als Variationsprobleme formuliert. Auch für simple Beispiele ist deren Lösung aber oft schwierig (sowohl der Beweis der eindeutigen Lösbarkeit und erst recht das explizite Angeben der Lösung).

Beispiel 1.1. Isoperimetrisches Problem (= „Problem der Dido“, 9. Jhd. v. Chr.; *isos* (*ἴσος*) = gleich, *perimetros* (*περίμετρος*) = Umfang):

Aufgabe: Finde die geschlossene Kurve einer vorgegebenen Länge mit maximalem Inhalt.

Lösung: Kreis



Die Lösung muss konvex sein, sonst Gebietsvergrößerung möglich. □

Beispiel 1.2. Minimalflächen: $(x_1, x_2, u(x_1, x_2)), x = (x_1, x_2) \in \Omega$ sei eine Fläche im $\mathbb{R}^3$.

$$\text{Oberfläche} = O(u) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} \, dx$$

Aufgabe: Finde Fläche minimalen Inhalts, die die Randbedingung $u = g$ auf $\partial\Omega$ erfüllt ($\rightarrow$ *Variationsproblem*, d.h. Minimierung des Funktionals $O(u)$).

Anwendung: eingespannte Membran, Seifenblasen

Man kann zeigen: $u(x)$ erfüllt die *Minimalflächengleichung* (quasilinear, glm. elliptisch)

$$\begin{cases} \operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = 0 & , \quad \Omega, \\ u = g & , \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

bzw:

$$(1 + u_{x_2}^2)u_{x_1x_1} - 2u_{x_1}u_{x_2}u_{x_1x_2} + (1 + u_{x_1}^2)u_{x_2x_2} = 0 \tag{1.1}$$

$$\text{Koeffizientenmatrix: } A = \begin{pmatrix} 1 + u_{x_2}^2 & -u_{x_1}u_{x_2} \\ -u_{x_1}u_{x_2} & 1 + u_{x_1}^2 \end{pmatrix} \geq I$$

Dabei ist $\kappa(x) := \frac{1}{2} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right)$ die *mittlere Krümmung* der Fläche an x (=Durchschnitt der Hauptkrümmungen d.h. Min./Max. der Normalkrümmungen).

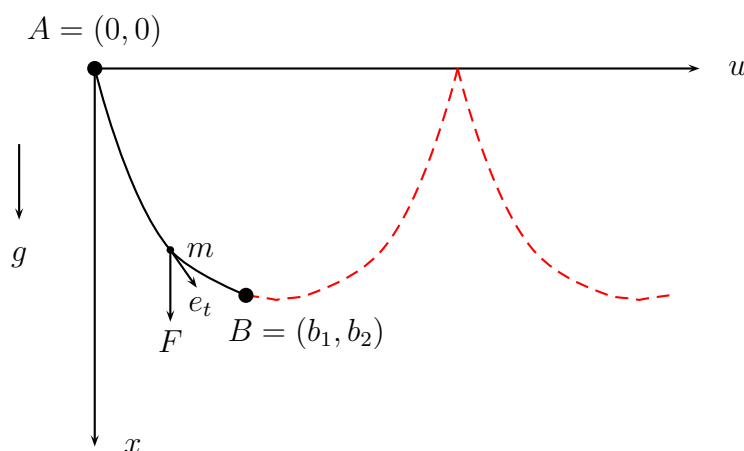
Minimalflächen: mittlere Krümmung $\equiv 0 \Rightarrow$ lokale Sattelform.

Bem.: Für $|\nabla u|$ klein gilt $A \approx I$. In dieser Linearisierung wird aus (1.1) die Laplace Gleichung. $\square$

Beispiel 1.3. Brachistochrone (Bernoulli, 1696; brachistos ($\beta\rho\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau\omicron\varsigma$) = kürzeste, chronos ($\chi\rho\acute{o}\nu\omicron\varsigma$) = Zeit):

Aufgabe: Finde Kurve $u = u(x)$ zwischen den Punkten $A = (0,0)$ und $B = (b_1, b_2)$ mit $b_1 > 0, b_2 > 0$, so dass ein Körper in dem konstanten Schwerfeld $F \equiv (g, 0), g > 0$ reibungsfrei *möglichst schnell* von A nach B kommt – bei Anfangsgeschwindigkeit 0.

Lösung: Zykloidenbogen (Radkurve), obwohl längerer Weg als Verbindungsgerade



(formale) Herleitung der mathematischen Formulierung:

m ... Masse des Körpers

$(x(t), u(t))$... Position des Körpers zur Zeit t

$s(t)$... zurückgelegter Weg (Bogenlänge)

2. Newton'sches Gesetz (in tangentialer Richtung), d.h. Masse $\times$ Beschleunigung = Kraft:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = F \cdot e_t(x) = m \frac{g}{\sqrt{1+u'^2}},$$

$$e_t(x) = \frac{1}{\sqrt{1+u'^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ u' \end{pmatrix} \dots \text{Einheitstangententialvektor an Kurve}$$

gesucht: $t(x)$ bzw. $x(t)$, $\frac{dx}{dt}$ = vertikale Geschwindigkeitskomponente

$$\text{Bogenlängenelement: } \sqrt{1+u'^2} dx = ds \Rightarrow \sqrt{1+u'^2} = \frac{ds}{dx} = \frac{ds}{dt} \frac{dt}{dx}$$

$$\Rightarrow g = \frac{d^2 s}{dt^2} \sqrt{1+u'^2} = \frac{d^2 s}{dt^2} \frac{ds}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \right] \frac{dt}{dx}$$

$$\Rightarrow g \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \xrightarrow{\text{Anf.geschw.}=0} g x = \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \Rightarrow \sqrt{2gx} = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1+u'^2} \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx} = \sqrt{\frac{1+u'^2}{2gx}} \quad \Big| \int_0^{b_1} \dots dx$$

$$\Rightarrow \text{Durchlaufzeit} = \int_0^{b_1} \frac{1}{\sqrt{2gx}} \sqrt{1+u'^2} dx$$

mathematische Problemstellung:

Definiere die Funktionenmenge $U := \{u \in C^1[0, b_1] \mid u(0) = 0, u(b_1) = b_2\}$ und das Funktional

$$\mathcal{F} : U \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{F}(u) := \int_0^{b_1} \frac{1}{\sqrt{2gx}} \sqrt{1+u'^2} dx.$$

Finde $u_0 \in U$, so dass $\mathcal{F}(u_0)$ minimal wird.

offene Fragen:

- Ist U eine / die geeignete Menge?
- Gibt es ein Minimum von $\mathcal{F}$ auf U ? eindeutig?
- Wie findet man es?

□

Gegenstand der VL:

Untersuchung von Extremalstellen von *Variationsintegralen* (oder *Energie-Funktionalen*):

$$u \mapsto \mathcal{F}(u) := \int_{\Omega} F(x, u(x), \underbrace{Du(x)}_{\text{Jacobi Matrix}}) dx : U \rightarrow \mathbb{R}$$

auf Mengen $U \subset \{u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N\}$. $F(x, z, p)$ heißt *Lagrange Funktion*.

Idee: Verallgemeinerung von Extremwertmethoden für skalare Funktionen $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

- notwendige Bedingungen (analog zu $f'(x_0) = 0$ für $f \in C^1$)
- hinreichende Bedingungen (analog zu $f''(x_0) > / < 0$ für $f \in C^2$).
Typischerweise gibt es eine “Lücke” zwischen diesen beiden Bedingungen.
- Existenz globaler Extremwerte (analog zur Annahme der Extremwerte stetiger Funktionen auf Kompakta)

Definition 1.4. Sei $\mathcal{F} : U \rightarrow \mathbb{R}$. Der “Punkt” $u \in U$ heißt

- a) (globale) Minimalstelle von $\mathcal{F}$, falls $\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in U$;
- b) strikte (globale) Minimalstelle von $\mathcal{F}$, falls $\mathcal{F}(u) < \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in U \setminus \{u\}$;
- c) [strikte] lokale Minimalstelle von $\mathcal{F}$, falls U topologischer Raum ist, und eine offene Umgebung $V \subset U$ von u existiert, so dass u eine [strikte] Minimalstelle von $\mathcal{F}|_V$ ist.

Der Wert $\mathcal{F}(u) \in \mathbb{R}$ heißt dann [striktes] Minimum. Analoge Definitionen für [strikte] Maximalstellen und Extremalstellen.

Beispiel 1.5. Für festes $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ sei

$$\mathcal{F}(u) := \int_0^1 (1 + u'(x)^2)^\alpha dx \quad \text{auf} \quad U = \{u \in C^1[0, 1] \mid u(0) = 0, u(1) = 1\}.$$

Es ist $\mathcal{F}(u) > 1 \quad \forall u \in U$, da $u' \not\equiv 0$ für $u \in U$. Für

$$u_n(x) := \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ n^2(x - 1 + \frac{1}{n})^2 & , \quad 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad , \quad n \in \mathbb{N},$$

ist $u_n \in U$ und

$$\mathcal{F}(u_n) \leq \int_0^{1-\frac{1}{n}} dx + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 (5n^2)^\alpha dx = 1 - \frac{1}{n} + 5^\alpha n^{2\alpha-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1;$$

$$\text{verwende im 2. Integral: } 1 + 4n^4 \underbrace{\left(x - 1 + \frac{1}{n}\right)^2}_{\leq 1/n} \leq 5n^2.$$

Also ist $\inf_{u \in U} \mathcal{F}(u) = 1$, das Infimum wird aber nicht angenommen. Das Problem $\mathcal{F}(u) \rightarrow \min$ ist also in U nicht lösbar! Die Minimalfolge $\{u_n\}$ ist nicht kompakt (in geeigneter Topologie).

Die Situation ist ähnlich wie beim Minimierungsproblem $f(x) := e^{-x} \rightarrow \min$ auf $\mathbb{R}$. $\square$

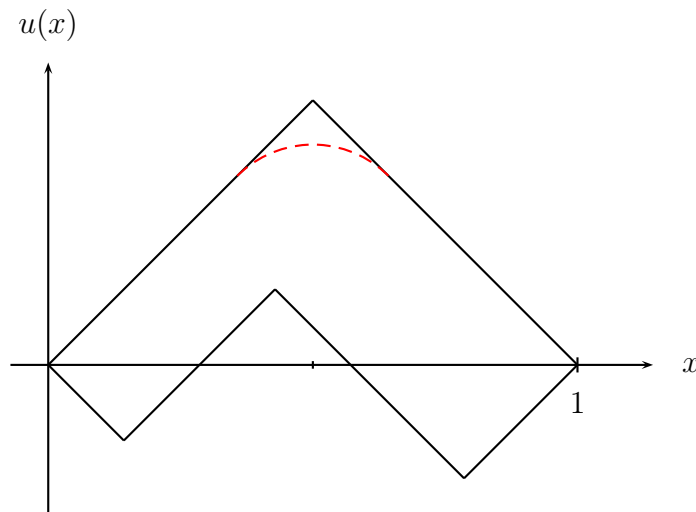
Beispiel 1.6. Für

$$\mathcal{F}(u) := \int_0^1 (u'(x)^2 - 1)^2 dx \quad \text{auf} \quad U = \{u \in C^1[0, 1] \mid u(0) = u(1) = 0\}$$

ist $\inf_{u \in U} \mathcal{F}(u) = 0$, das Infimum wird aber nicht angenommen: Für jede Zick-Zack-Funktion $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u(0) = u(1) = 0$ und $u'(x) = \pm 1$ (bis auf endlich viele Ausnahmepunkte) gilt $\mathcal{F}(u) = 0$. Und Zick-Zack-Funktionen lassen sich bez. der $W^{1,4}(0, 1)$ -Norm, die für $\mathcal{F}$ relevant ist, beliebig gut aus U approximieren.

Auf dem Raum der lipschitzstetigen Funktionen $Lip[0, 1]$ mit $u(0) = u(1) = 0$ wird das Minimum aber angenommen. Die Lösung ist dann aber nicht eindeutig.

Bemerkung: Obwohl F analytisch ist, sind Lösungen hier *nicht* glatt.



□

Referenzen: [Se] §1, [vB] §1

2 Euler-Lagrange Gleichungen

Inhalt: klassische Theorie, “indirekte Methode”, d.h. Zugang mittels Differentialgleichungen (ohne Funktionalanalysis)

Fragen:

Zuerst machen wir die *Annahme*, dass das Variationsproblem eine Lösung (z.B. Minimum) hat).

- Welche Gleichung erfüllt die Lösung?
- Welche Eigenschaften (z.B. Symmetrien) erbt sie vom Variationsintegral?

2.1 Erste Variation

Betrachte Funktional $\mathcal{F} : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $U \subset X$, X linearer Raum über $\mathbb{R}$.

Sei $u_0 \in U$, $\xi \in X$, sodass $\{u_0 + \varepsilon\xi \mid |\varepsilon| < \varepsilon_0\} \subset U$ für ein $\varepsilon_0 > 0$ gelte.

$$\phi(\varepsilon) := \mathcal{F}(u_0 + \varepsilon\xi), \quad |\varepsilon| < \varepsilon_0.$$

Definition 2.1. Falls $\phi'(0)$ existiert, heißt $\delta\mathcal{F}(u_0, \xi) := \phi'(0)$ erste Variation von $\mathcal{F}$ an u_0 in Richtung ξ .

Beispiel 2.2. $X = \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u_0 \in U$, $\mathcal{F} \in C^1(U, \mathbb{R})$

$$\Rightarrow \quad \delta\mathcal{F}(u_0, \xi) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_k}(u_0) \xi_k = \nabla \mathcal{F}(u_0) \cdot \xi,$$

also *Richtungsableitung* von $\mathcal{F}$ an u_0 in Richtung ξ (=Linearform in ξ). □

Bemerkung 2.3. Sei U topologischer Raum. Hat $\mathcal{F}$ lokales Extremum an u_0 (mit Umgebung V aus Def. 1.4, so dass $\{u_0 + \varepsilon\xi \mid |\varepsilon| < \tilde{\varepsilon}_0\} \subset V$ für ein $\tilde{\varepsilon}_0 > 0$); dann hat ϕ ein lokales Extremum an $\varepsilon = 0$.

$$\Rightarrow \quad \delta\mathcal{F}(u_0, \xi) = 0, \quad \text{wenn } \delta\mathcal{F}(u_0, \xi) \text{ definiert ist.} \quad (2.1)$$

(2.1) ist also *notwendige Bedingung* dafür, dass u_0 lokale Extremalstelle von $\mathcal{F}$ ist.

[Etwas unpräzise formuliert gilt also an einer lokalen Extremalstelle $\delta\mathcal{F}(u_0, \xi) = 0 \ \forall \xi$.]

Definition 2.4. Sei $\mathcal{F} : U \subset X \rightarrow \mathbb{R}$. $u_0 \in U$ heißt stationärer Punkt (bzw. kritischer Punkt) von $\mathcal{F}$, falls

$$\delta\mathcal{F}(u_0, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in X, \text{ für die } \delta\mathcal{F}(u_0, \xi) \text{ existiert.}$$

Bemerkung 2.5. Sei $\delta\mathcal{F}(u_0, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in X$. Dann ist u_0 lokale Extremalstelle von $\mathcal{F}$ oder Sattelpunkt (vgl. $x = 0$ für $f(x) = x^3$).

Beispiel 2.6. Sei

$$\mathcal{F}(u) := \int_0^{b_1} \sqrt{\frac{1 + u'(x)^2}{x}} dx \quad \text{auf} \quad U := \{u \in C^1[0, b_1] \mid u(0) = 0, u(b_1) = b_2\}$$

(vgl. Bsp. 1.3: Brachistochrone).

$$\begin{aligned} \{u_0 + \varepsilon\xi \mid |\varepsilon| < \varepsilon_0\} &\subset U \quad (\varepsilon_0 \text{ beliebig}) \quad \Leftrightarrow \\ \xi \in \tilde{U} &:= \{\eta \in C^1[0, b_1] \mid \eta(0) = \eta(b_1) = 0\}. \end{aligned}$$

Für $\xi \in \tilde{U}$ gilt

$$\phi(\varepsilon) = \mathcal{F}(u_0 + \varepsilon\xi) = \int_0^{b_1} \sqrt{\frac{1 + (u'_0 + \varepsilon\xi')^2}{x}} dx.$$

Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz (von Lebesgue) gilt:

$$\delta\mathcal{F}(u_0, \xi) = \phi'(0) = \int_0^{b_1} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \sqrt{\frac{1 + (u'_0 + \varepsilon\xi')^2}{x}} \Big|_{\varepsilon=0} dx = \int_0^{b_1} \underbrace{\frac{u'_0(x)}{\sqrt{x(1 + u'_0(x)^2)}}}_{=: y(x)} \xi'(x) dx \quad \text{existiert.}$$

Berechnung der Brachistochrone:

Sei u_0 eine Minimalstelle von $\mathcal{F}$.

Annahme: $y \in C[0, b_1]$. (Eine sauberere aber technischere Herleitung ist in [GH] §6.2.3.)

Wähle speziell

$$\xi(x) := \int_0^x y(\tau) d\tau - Cx, \quad C = \frac{1}{b_1} \int_0^{b_1} y(x) dx \quad \Rightarrow \xi \in \tilde{U}.$$

Aus (2.1):

$$0 = \delta\mathcal{F}(u_0, \xi) = \int_0^{b_1} y(x)(y(x) - C) dx = \int_0^{b_1} y(x)^2 - 2Cy(x) + C^2 dx = \int_0^{b_1} (y(x) - C)^2 dx,$$

$$\text{da } \int_0^{b_1} Cy(x)dx = b_1 C^2 = \int_0^{b_1} C^2 dx.$$

$$\Rightarrow y(x) \equiv C, \text{ also aus } C[0, b_1] \Rightarrow u'_0(x) = \sqrt{\frac{x}{D-x}} \quad \text{für ein } D > b_1$$

$$\Rightarrow u_0(x) = D \arctan \sqrt{\frac{x}{D-x}} - \sqrt{Dx - x^2} \quad (\text{da } u_0(0) = 0; \text{Zykloide}),$$

D kann eindeutig so gewählt werden, dass $u_0(b_1) = b_2$. □

Dieses Beispiel wurde durch einen Trick gelöst; in §2.2 entwickeln wir eine systematische Methode.

Definition 2.7. Sei $m \in \mathbb{N}$. Falls $\phi^{(m)}(0)$ existiert, heißt

$$\delta^m \mathcal{F}(u_0, \xi) := \phi^{(m)}(0)$$

m -te Variation von $\mathcal{F}$ an u_0 in Richtung ξ .

Beispiel 2.8. Sei $\mathcal{F} \in C^2(U, \mathbb{R})$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u_0 \in U$:

$$\delta^2 \mathcal{F}(u_0, \xi) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial u_i \partial u_j}(u_0) \xi_i \xi_j \quad ; \text{quadratische Form in } \xi \quad \square$$

Bemerkung 2.9. Sei U topologischer Raum. Hat $\mathcal{F}$ lokales Minimum (Maximum) an u_0 , dann gilt:

$$\delta^2 \mathcal{F}(u_0, \xi) \geq 0 \quad (\leq 0)$$

$\forall \xi$, für die $\delta^2 \mathcal{F}(u_0, \xi)$ definiert ist.

Bemerkung 2.10. “Variation” ist ein “schwacher” Ableitungsbegriff; er benötigt *keine* Topologie auf X .

Vergleich mit Gâteaux- und Fréchet-Ableitung:

Definition 2.11. Sei X Banachraum und X' sein (topologischer) Dualraum. Sei $\mathcal{F} : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset X$ offen, $u_0 \in U$. Es existiere $l \in X'$ (abhängig von u_0) mit

$$a) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{\mathcal{F}(u_0 + \varepsilon \xi) - \mathcal{F}(u_0) - \varepsilon l(\xi)}{\varepsilon} \right| = 0 \quad \forall \xi \in X.$$

Dann heißt $\mathcal{F}$ Gâteaux differenzierbar an u_0 , und $d\mathcal{F}(u_0, \cdot) = l$ seine Gâteaux Ableitung.

$$b) \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{|\mathcal{F}(u_0 + \xi) - \mathcal{F}(u_0) - l(\xi)|}{\|\xi\|} = 0.$$

Dann heißt $\mathcal{F}$ Fréchet differenzierbar an u_0 , und $D\mathcal{F}(u_0) = \mathcal{F}'(u_0) = l$ seine Fréchet Ableitung.

Bemerkung 2.12.

a) $\mathcal{F}$ Fréchet differenzierbar an $u_0 \Rightarrow \mathcal{F}$ Gâteaux differenzierbar an $u_0 \Rightarrow$ erste Variation von $\mathcal{F}$ an u_0 existiert für jede Richtung ξ (aber nicht umgekehrt: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$ in Gâteaux Ableitung muss in ξ nicht gleichmäßig sein).

b) $\mathcal{F}$ Fréchet differenzierbar an $u_0 \Rightarrow$

$$D\mathcal{F}(u_0)(\xi) = d\mathcal{F}(u_0, \xi) = \delta\mathcal{F}(u_0, \xi) \quad \forall \xi \in X.$$

c) erste Variation “ähnlich” zu Gâteaux Ableitung, aber

- $\delta\mathcal{F}(u_0, \xi)$ muss nicht für alle $\xi \in X$ existieren; oft z.B. nur für Unterraum $\xi \in Z \subsetneq X$
- $\xi \mapsto \delta\mathcal{F}(u_0, \xi)$ muss nicht stetig und linear sein.

d) Gâteaux–Differenzierbarkeit in Literatur *nicht* einheitlich definiert.

Beispiel 2.13. $\mathcal{F} : u \mapsto \int_0^T u(\tau) d\tau$; $\mathcal{F} : X := C[0, T] \rightarrow \mathbb{R}$.

$D\mathcal{F}(u_0) = \mathcal{F} \forall u_0 \in X$, da linear. □

Beispiel 2.14. $\mathcal{F} : u \mapsto \int_0^T u^2(\tau) d\tau$ auf $X = C[0, T]$ ist Gâteaux (+Fréchet) differenzierbar:

$$\mathcal{F}(u_0 + \varepsilon\xi) = \int_0^T (u_0^2 + \varepsilon^2\xi^2 + 2\varepsilon u_0\xi) d\tau$$

$$l(\xi) := 2 \int_0^T u_0\xi d\tau \Rightarrow l \in X'$$

$$\frac{|\mathcal{F}(u_0 + \varepsilon\xi) - \mathcal{F}(u_0) - \varepsilon l(\xi)|}{\varepsilon} = \varepsilon \int_0^T \xi^2(\tau) d\tau$$

□

Beispiel 2.15. Für die Funktionen

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } u = 0, \\ \frac{u_1 u_2^2}{u_1^2 + u_2^4} & \text{für } u \neq 0, \end{cases}$$

und $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto G(u) = (F(u))^2$ gilt:

1. Die erste Variation $\delta F(0, \xi) = \xi_2^2 / \xi_1$ existiert, aber F ist an der Stelle $u = 0$ nicht Gâteaux-differenzierbar.
2. G ist Gâteaux-differenzierbar, aber nicht Fréchet-differenzierbar. □

Referenzen: [GH] §1.1, [Se] §2, [Ju] §1

2.2 Stationäre Punkte von Variationsintegralen

generelle Annahmen für §2.2:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt; $u \in X := C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$

$1\text{-Graph}(u) := \{(x, u(x), \underbrace{Du(x)}_{\substack{\text{Jacobi} \\ \text{Matrix}}}) \mid x \in \underbrace{\overline{\Omega}}_{\text{kompakt}}\} \dots \text{kompakt}$

Sei $V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{Nn}$ offen, und sei Lagrange Funktion $F \in C^1(V, \mathbb{R})$.

Sei $U := \{u \in X \mid 1\text{-Graph}(u) \subset V\}$ (um $F(x, u(x), Du(x))$ definieren zu können).

Definiere *Variationsintegral*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : U &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \mathcal{F}(u) &:= \int_{\Omega} F(x, u(x), Du(x)) dx \end{aligned}$$

Lemma 2.16. $\forall u_0 \in U, \forall \xi \in X$ gilt: $\delta \mathcal{F}(u_0, \xi)$ existiert.

Beweis. $1\text{-Graph}(u_0)$ ist kompakt, V offen

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 : \quad 1\text{-Graph}(v) \subset V \quad \forall v \in B_{\delta}(u_0; X) := \{v \in X \mid \|u_0 - v\|_X < \delta\},$$

da $\|w\|_{C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)} = \sup_{x \in \Omega} \max(|w(x)|, |Dw(x)|)$

$$\Rightarrow \quad \phi(\varepsilon) := \mathcal{F}(u_0 + \varepsilon \xi) \text{ ist definiert für jedes (feste) } \xi \in X \text{ und } |\varepsilon| < \varepsilon_0 = \frac{\delta}{1 + \|\xi\|_X}.$$

Da Ω beschränkt und $F \in C^1(V, \mathbb{R})$

$$\Rightarrow \quad \phi \in C^1(-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \quad \Rightarrow \quad \delta \mathcal{F}(u_0, \xi) = \phi'(0) \text{ existiert.} \quad \blacksquare$$

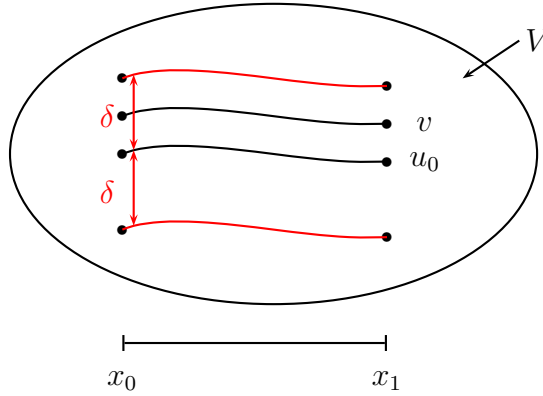


Abbildung 2.1: 0-Graph für $n = N = 1$.

Berechnung der ersten Variation:

Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz gilt:

$$\begin{aligned}
 \delta \mathcal{F}(u_0, \xi) &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{F}(u_0 + \varepsilon \xi) \right|_{\varepsilon=0} \\
 &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_{\Omega} F(x, u_0(x) + \varepsilon \xi(x), Du_0(x) + \varepsilon D\xi(x)) dx \right|_{\varepsilon=0} \\
 &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \frac{\partial F}{\partial z_i}(x, u_0(x), Du_0(x)) \xi_i(x) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_{ij}}(x, u_0(x), Du_0(x)) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(x) dx
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

$\rightarrow \delta \mathcal{F}(u_0, \xi)$ ist (bez. ξ) lineares Funktional auf X .

Beispiel 2.17. Sei $N = 1$. *Dirichlet-Integral* $\mathcal{F}(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx$,

$$\text{also } F(x, z, p) = \frac{1}{2} |p|^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p_j} = p_j$$

$$\delta \mathcal{F}(u, \xi) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \xi dx \quad \square$$

Anwendung: Sei $u(x)$ ein Potential $\rightarrow$

$-\nabla u$... Kraftfeld $\rightarrow \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2$... Energiedichte des Kraftfeldes, $\mathcal{F}(u)$... totale potentielle Energie des Potentials/Kraftfeldes

physikalische Kraftfelder minimieren die darin gespeicherte Energie, also $\mathcal{F}(u) \rightarrow \min$.

Beispiel 2.18. Sei $N = 1$. Oberfläche $O(u) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx$, also

$$F(x, z, p) = \sqrt{1 + |p|^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p_j} = \frac{p_j}{\sqrt{1 + |p|^2}}$$

$$\Rightarrow \delta O(u, \xi) = \int_{\Omega} \frac{\nabla u \cdot \nabla \xi}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} dx$$

□

Definition 2.19. Sei $C \subset U \subset X = C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. Dann heißt $u \in C$

a) eine schwache (lokale) Minimalstelle von $\mathcal{F}$ in C , falls $\exists \delta_0 > 0$ mit

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in C \cap B_{\delta_0}(u; X).$$

b) eine starke (lokale) Minimalstelle von $\mathcal{F}$ in C , falls $\exists \delta_0 > 0$ mit

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in C \cap B_{\delta_0}(u; C(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^N))$$

typische Bsp. für C :

- $C = U$: keine Einschränkung $\rightarrow$ natürliche Randbedingung für u
- $C = \{u \in U \mid u(x) = g(x) \quad \forall x \in \partial\Omega\}$: Dirichlet Randbedingung
- $C = \left\{u \in U \mid \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = g(x) \quad \forall x \in \partial\Omega\right\}$: Neumann Randbedingung

Bemerkung 2.20. Für $\xi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ gilt auf $\partial\Omega$ für diese C (falls $V = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN}$):

$$\begin{aligned} (u + \xi)(x) &= u(x), \quad D(u + \xi)(x) = Du(x) \\ \Rightarrow u \in C &\Rightarrow u + \xi \in C \quad \forall \xi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) \end{aligned}$$

Lemma 2.21. Sei u schwache Minimalstelle von $\mathcal{F}$ in einer Menge $C \subset U \subset X$, und sei $u + \xi \in C \quad \forall \xi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

$$\Rightarrow \delta \mathcal{F}(u, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) \quad (2.3)$$

Beweis. Laut Def. 2.19: $\exists \delta_0 > 0$ mit $\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in C \cap B_{\delta_0}(u; X)$.

Sei $\xi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) \Rightarrow u + \xi \in C$ und $\exists \delta_1 > 0$ mit $\|\delta_1 \xi\|_X < \delta_0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \phi(0) &= \mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u + \varepsilon \xi) = \phi(\varepsilon) \quad \text{für } |\varepsilon| < \delta_1 \\ \Rightarrow \phi'(0) &= \delta \mathcal{F}(u, \xi) = 0 \quad (\text{existiert wegen Lemma 2.16}) \end{aligned}$$

■

Bemerkung 2.22. Kandidaten für Minimalstellen von $\mathcal{F}$ sind jene u , die $\delta\mathcal{F}(u, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ erfüllen. Diese *notwendige Bedingung* kann als Differentialgl. für u geschrieben werden:

Satz 2.23. Zusätzlich zu den generellen Annahmen gelte $\frac{\partial F}{\partial p_{ij}} \in C^1(V)$.

Für eine Funktion $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ gelte

$$\delta\mathcal{F}(u, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N).$$

Dann erfüllt u die Euler-Lagrange Gleichung (EL-Gl.) von $\mathcal{F}$:

$$\frac{\partial F}{\partial z_i}(x, u(x), Du(x)) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial F}{\partial p_{ij}}(x, u(x), Du(x)) \right] = 0; \quad x \in \Omega; i = 1, \dots, N$$

Beweis. Sei $\psi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, $\xi(x) := \psi(x)e_i$.

Aus $\delta\mathcal{F}(u, \xi) = 0$ folgt mit (2.2):

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial F}{\partial z_i} \psi + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) dx = 0$$

- verwende

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\psi \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} \right)}_{\Sigma_j \text{ ist div}(\dots)} = \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} + \psi \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial p_{ij}},$$

- Divergenz-Satz und $\psi|_{\partial\Omega} = 0$ liefert:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial F}{\partial z_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} \right) \psi dx = 0 \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$$

- punktweise Gleichung folgt aus nachfolgendem *Fundamental-Lemma der Variationsrechnung*. ■

Lemma 2.24 (Fundamentallemma). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ und

$$a) \int_{\Omega} f \eta dx \geq 0 \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega), \eta \geq 0,$$

oder

$$b) \int_{\Omega} f \eta dx = 0 \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega).$$

Dann gilt $f \geq 0$ bzw. $f = 0$.

c) (Du Bois-Reymond Lemma) Sei Ω auch zusammenhängend, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ und

$$\int_{\Omega} f(x) \frac{\partial \eta}{\partial x_j}(x) dx = 0, \quad 1 \leq j \leq n, \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega)$$

$\Rightarrow f = \text{const}$ auf Ω .

Beweis. Es gelte (a), aber es existiere $x_0 \in \Omega$ mit $f(x_0) < 0$.

$\Rightarrow \exists \varepsilon, r > 0$ mit $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$ und $f(x) < -\varepsilon \quad \forall x \in B_r(x_0)$.

Wähle

$$\eta(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{r^2 - |x - x_0|^2}} & , \quad x \in B_r(x_0) \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

$\rightarrow \eta \in C_0^\infty(\Omega), \eta \geq 0$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} f \eta dx = \int_{B_r(x_0)} f \eta dx < -\varepsilon \int_{B_r(x_0)} \eta dx < 0$$

$\rightarrow$ Widerspruch zu (a), also $f \geq 0$.

Wenn (b) gilt, gilt (a) für f und $-f$, also $f = 0$.

(c) folgt aus (b) mit partieller Integration. ■

Bemerkung 2.25. Lemma 2.24(a-c) gilt auch für $f \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ (siehe [GH] §1.2.3).

Zusammenfassung:

Sei $F \in C^1, u \in C \subset U \subset X = C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, und seien

$$Z(u, C) := \{ \xi \in X \mid \exists \varepsilon_0 > 0 : u + \varepsilon \xi \in C \quad \forall |\varepsilon| < \varepsilon_0 \}$$

die “zulässigen Variationsrichtungen”.

bisher gezeigt:

Wenn $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) \subset Z(u, C)$ und u schwache Minimalstelle von $\mathcal{F}$ in C ist, dann löst u

- die *schwache Form* der EL-Gl:

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \frac{\partial F}{\partial z_i}(x, u(x), Du(x)) \xi_i(x) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_{ij}}(x, u(x), Du(x)) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(x) dx = 0$$

$$\forall \xi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N);$$

- die *starke Form* der EL-Gl. (falls zusätzlich $\frac{\partial F}{\partial p_{ij}} \in C^1$, $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$):

$$L_F u = 0, \quad (2.4)$$

mit dem *Euler-Operator* $L_F : C^s(\Omega, \mathbb{R}^N) \rightarrow C^{s-2}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $s \geq 2$,

$$(L_F u)_i(x) = \frac{\partial F}{\partial z_i}(x, u(x), Du(x)) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial F}{\partial p_{ij}}(x, u(x), Du(x)) \right]; \quad i = 1, \dots, N \quad (2.5)$$

Bemerkung 2.26. (2.4) ist quasilineares Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung für u .

Beispiel 2.27. Sei $N = 1$. *Dirichlet-Integral*

$$\mathcal{F}(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx; \quad F(x, z, p) = \frac{1}{2} |p|^2, \quad \frac{\partial F}{\partial p_j} = p_j$$

$$\Rightarrow L_F u = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial u}{\partial x_j} \right] = -\Delta u$$

EL-Gl. = Laplace Gleichung □

Beispiel 2.28. Sei $N = n = 1$, $F = F(x, p)$, $\Omega = I$.

$$\Rightarrow \text{EL-Gl: } [F_p(x, u'(x))] = 0, x \in I$$

kann integriert werden (z.B. Brachistochrone, obwohl dort $F \notin C^1$). □

Beispiel 2.29. Seien $N = 3, n = 1$,

$$\mathcal{F}(\underbrace{u}_{\in \mathbb{R}^3}) := \int_I \left(\frac{m}{2} |u'(x)|^2 - V(u(x)) \right) dx; \quad m = \text{const}$$

$$\rightarrow F(x, z, p) = \frac{m}{2} |p|^2 - V(z), F_z = -\nabla_z V(z), F_p = mp$$

$$\Rightarrow \text{EL-GL: } \nabla_z V(u(x)) + \frac{d}{dx} (mu'(x)) = 0$$

Variablen-Umbenennung: $x \mapsto t, u \mapsto x$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -\nabla_x V(x) \quad [\text{mit der Notation } \dot{x} := \frac{dx}{dt}]$$

Also: *Newton'sche Gleichung* für Bewegung $x = x(t)$ einer Punktmasse m in konservativem Kraftfeld mit Potential $V(x)$ liefert stationären Punkt des *Wirkungsfunktional* $\mathcal{F} = \int E_{\text{kin}}(t) - E_{\text{pot}}(t) dt$ (*Hamiltonsches Prinzip* oder *Prinzip der minimalen Wirkung*). $\square$

Referenzen: [GH] §1.2, [Se] §5, [vB] §1, [vdM] §1.1, [Ju] §2

2.3 Natürliche Randbedingungen

bisherige Variationsrichtungen $\xi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

Frage: Welche Zusatzinformation über u (im Vergleich zu Satz 2.23) erhält man, falls

$$\delta\mathcal{F}(u, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)? \quad (2.6)$$

Satz 2.30. Sei $\partial\Omega \in C^1$, $F \in C^1(V, \mathbb{R})$, $\frac{\partial F}{\partial p_{ij}} \in C^1(V)$, $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$.

Falls (2.6) gilt, erfüllt u auf Ω die EL-Gleichungen von $\mathcal{F}$ und auf $\partial\Omega$ die natürlichen Randbedingungen:

$$\sum_{j=1}^n \nu_j(x) \frac{\partial F}{\partial p_{ij}}(x, u(x), Du(x)) = 0 \quad ; i = 1, \dots, N.$$

$\nu(x)$... äußerer Normalenvektor an $x \in \partial\Omega$.

Beweis.

i) Sei zunächst zusätzlich $u \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. Sei $\xi(x) = \psi(x)e_i$ mit $\psi \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} 0 = \delta\mathcal{F}(u, \xi) &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial F}{\partial z_i} \psi + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) dx \\ &\stackrel{\text{Div-Satz}}{=} \int_{\Omega} L_F(u)_i \psi dx + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^n \nu_j(x) \frac{\partial F}{\partial p_{ij}}(x, u(x), Du(x)) \psi(x) dS}_{\in C(\partial\Omega), \text{ da } \partial\Omega \in C^1} \end{aligned}$$

- aus Satz 2.23: $L_F(u) = 0$, da $C_0^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\overline{\Omega})$.

- aus Fundamentallemma auf $\partial\Omega$:

$$\sum_{j=1}^n \nu_j \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

- ii) Für $u \notin C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$: Divergenz-Satz *nicht* anwendbar.

$\Rightarrow$ approximiere Ω : $\bar{\Omega}_k \subset\subset \Omega$, $\Omega_k \nearrow \Omega$ mit $\partial\Omega_k \in C^1$, $\partial\Omega_k \rightarrow \partial\Omega$ in C^1 (d.h. die lokalen Graphen konvergieren); dann: $u \in C^2(\bar{\Omega}_k)$. ■

Beispiel 2.31. $\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$, $N = 1$, $\frac{\partial F}{\partial p_j} = p_j$

natürliche RB = homogene Neumann RB: $0 = \nu \cdot \nabla u = \frac{\partial u}{\partial \nu}$.

Aufgabe: Minimiere $\mathcal{F}(u)$ in der Menge $C = C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, also ohne Rand-Einschränkung.

$$\Rightarrow u \text{ erfüllt } \begin{cases} \Delta u = 0 & , \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & , \quad \partial\Omega \end{cases}$$

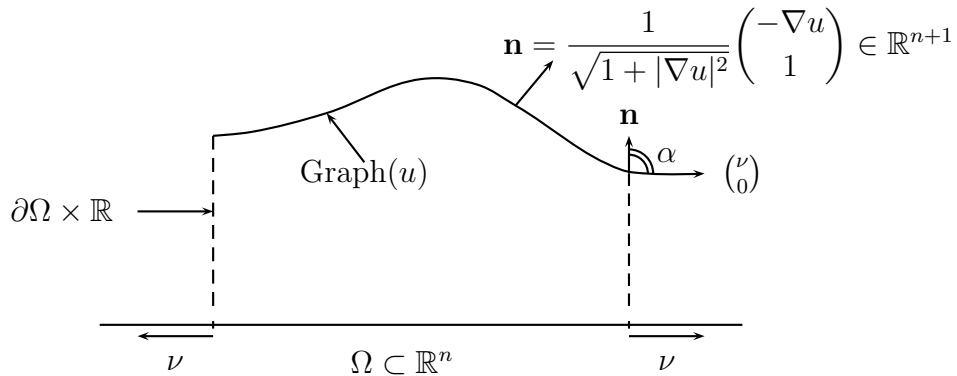
$\Rightarrow u = \text{const}$ (lt. PDGL-VL)

□

Beispiel 2.32. Minimalfläche: $\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx$, $N = 1$, $\frac{\partial F}{\partial p_j} = \frac{p_j}{\sqrt{1 + |p|^2}}$

natürliche RB: $\frac{\nu \cdot \nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = 0$ auf $\partial\Omega$

geometrische Interpretation:



Sei α Winkel zwischen $\text{Graph}(u)$ und Zylinder-Wand $\partial\Omega \times \mathbb{R}$:

$$\cos \alpha = \begin{pmatrix} \nu \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n} = \frac{-\nu \cdot \nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \Big|_{\partial \Omega} = 0 \quad \Rightarrow$$

Glatte Minimalflächen ohne Rand-Einschränkung schneiden $\partial \Omega \times \mathbb{R}$ orthogonal (z.B. Seifenhaut innerhalb eines Zylinders). $\square$

Referenzen: [GH] §1.2, [Se] §11, [vdM] §1.1

2.4 Erdmannsche Gleichung und Eckenbedingung

$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 (u'(x)^2 - 1)^2 dx$ hat auf $U = \{u \in C^1[0, 1] \mid u(0) = u(1) = 0\}$ kein Minimum, wohl aber auf $\text{Lip}[0, 1]$ mit den selben Randbedingungen (vgl. Bsp. 1.6). Minima erfüllen f.ü. $|u'(x)| = 1$, aber $u \notin C^2(0, 1)$ erfüllen EL-Gl. *nicht* (überall).

Anwendungen: Aufkreuzen beim Segeln (siehe Beispiel 6.1).

Ziel: Für $n = 1$, finde notwendige Bedingungen für Minimierer von

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x)) dx,$$

$F \in C^1(I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, $I = [a, b]$, auf

$$D^1(I, \mathbb{R}^N) := \{u \in C(I, \mathbb{R}^N) \mid u|_{[t_j, t_{j+1}]} \in C^1 \ \forall j = 0, \dots, k \\ \text{mit } a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k+1} = b\} \subset \text{Lip}[a, b].$$

$D^1 \dots$ stückweise C^1 -Funktionen, differenzierbar bis auf endlich viele *Ecken* $t_1, \dots, t_k$. Dort existieren zumindest die einseitigen Ableitungen.

Satz 2.33. Sei $u \in D^1(I, \mathbb{R}^N)$ und $\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in C_r$ für ein $r > 0$, und

$$C_r := \left\{ v \in D^1(I, \mathbb{R}^N) \mid v(a) = u(a), v(b) = u(b), \sup_I |u - v| < r \right\}.$$

Sei $x_0 \in (a, b)$ eine Ecke von u (d.h. u' hat an x_0 eine Sprungstelle); setze $z_0 := u(x_0)$, $p_0^+ := u'(x_0 + 0)$, $p_0^- := u'(x_0 - 0)$.

$\Rightarrow$ folgende zwei Erdmannsche Eckenbedingungen gelten:

$$a) \nabla_p F(x_0, z_0, p_0^-) = \nabla_p F(x_0, z_0, p_0^+),$$

$$b) F(x_0, z_0, p_0^-) - p_0^- \cdot \nabla_p F(x_0, z_0, p_0^-) = F(x_0, z_0, p_0^+) - p_0^+ \cdot \nabla_p F(x_0, z_0, p_0^+)$$

Beweis. a) Laut Erweiterung von Lemma 2.16 auf lokale Minimalstelle $u \in \text{Lip}[a, b]$ ($\Rightarrow \exists \delta \mathcal{F}(u, \xi)$) und Bem. 2.3:

$$0 = \delta \mathcal{F}(u, \xi) \stackrel{(2.2)}{=} \int_a^b \left[\nabla_z F(x, u, \underbrace{u'}_{\in L^\infty(a,b)}) \cdot \xi + \nabla_p F(x, u, u') \cdot \xi'(x) \right] dx \quad \forall \xi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N).$$

Mit partieller Integration im 1. Integranden:

$$\int_a^b \underbrace{\left[- \int_a^x \nabla_z F(t, u(t), u'(t)) dt + \nabla_p F(x, u, u') \right]}_{\in L^\infty(a,b), \text{ stückweise stetig}} \cdot \xi'(x) dx = 0 \quad \forall \xi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N).$$

Mit einer Variante vom Fundamentallemma (Lemma 2.24c, Bem. 2.25) folgt: [...] = konst, also $\exists c \in \mathbb{R}^N$:

$$\nabla_p F(x, u(x), u'(x)) = c + \int_a^x \underbrace{\nabla_z F(t, u(t), u'(t))}_{\in L^\infty(a,b)} dt \quad \text{f.ü. auf } (a,b). \quad (2.7)$$

(2.7) heißt *Du Bois-Reymond Gleichung* bzw. *integrierte Form der EL-Gleichung*.

Für $u \in \text{Lip}[a, b]$ ist rechte Seite von (2.7) stetig, also auch $\nabla_p F(x, u(x), u'(x))$. $\Rightarrow$ (a).

b)

- Sei $\eta \in C_0^\infty(I)$ und $\tau_\varepsilon(x) := x + \varepsilon \eta(x)$, $x \in I$, $|\varepsilon| < \varepsilon_0 := (1 + \|\eta'\|_\infty)^{-1}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \tau_\varepsilon(x) &= x \quad \text{für } x \notin \text{supp } \eta, \\ \tau'_\varepsilon(x) &= 1 + \varepsilon \eta'(x) \geq 1 - |\varepsilon| \|\eta'\|_\infty > 0 \quad \forall x \in I \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \tau_\varepsilon \text{ ist } C^\infty\text{-Diffeomorphismus von } I; \tau_0(x) = x$$

- Für $|\varepsilon|$ klein gilt: $v_\varepsilon := u \circ \tau_\varepsilon^{-1} \in C_r$.

$$\text{Es gilt } v'_\varepsilon(x) = u'(\tau_\varepsilon^{-1}(x)) \frac{d\tau_\varepsilon^{-1}}{dx}(x) = \frac{u'(\tau_\varepsilon^{-1}(x))}{1 + \varepsilon \eta'(\tau_\varepsilon^{-1}(x))}.$$

$$\text{Variablentransformation } y = \tau_\varepsilon^{-1}(x), \quad x = \tau_\varepsilon(y) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(v_\varepsilon) &= \int_a^b F(x, u(\tau_\varepsilon^{-1}(x)), v'_\varepsilon(x)) dx \\ &= \int_a^b F(y + \varepsilon \eta(y), u(y), \frac{u'(y)}{1 + \varepsilon \eta'(y)}) (1 + \varepsilon \eta'(y)) dy \end{aligned}$$

- Wegen Minimalität von u (und mit $y = \tau_0^{-1}(x) = x$):

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{F}(v_\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} = \int_a^b F_x(x, u, u') \eta + [F(x, u, u') - \nabla_p F(x, u, u') \cdot u'] \eta' dx \\
 &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \int_a^b \left[- \int_a^x F_x(t, u(t), u'(t)) dt + F(x, u, u') - (\nabla_p F)(x, u, u') \cdot u' \right] \eta' dx \\
 &\quad \forall \eta \in C_0^\infty(I)
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

- aus Lemma 2.24c (für $f \in L^1(I)$): [...] = konst. Also $\exists c \in \mathbb{R}$, sodass die *Erdmannsche Gleichung* gilt:

$$F(x, u(x), u'(x)) - u'(x) \cdot \nabla_p F(x, u(x), u'(x)) = c + \int_a^x F_x(t, u(t), u'(t)) dt \quad \text{f.ü. auf } I \tag{2.9}$$

Für $u \in \text{Lip}[a, b]$ ist rechte Seite von (2.9) stetig, also auch die linke Seite. ■

Man beachte die unterschiedlichen Variationen von u in Beweisteil (a), (b): In (a) additive Variation $u + \varepsilon \xi$ (wie in Definition von $\delta \mathcal{F}(u, \xi)$). In (b) eine *innere Variation* (durch “Verzerrung” von I).

Bemerkung 2.34. a) Satz 2.33 gilt sinngemäß auch für $u, v \in \text{Lip}(I, \mathbb{R}^N)$: Die beiden Funktionen aus Aussage (a), (b) sind dann auf I stetig.

b) [...] in (2.8) ist *erstes Integral*, also Erhaltungsgröße für Minimierer.

Beispiel 2.35. $\mathcal{F}(u) = \int_0^1 (u'(x)^2 - 1)^2 dx$, $F = F(p) = (p^2 - 1)^2$, $F_p = 4p(p^2 - 1)$.

Für $u \in \text{Lip}[0, 1]$ mit $|u'| = 1$ f.ü. gilt:

$$F_p(u'(x)) \equiv 0, F(u'(x)) - u'(x) F_p(u'(x)) \equiv 0 \quad \text{auf } I.$$

□

Referenzen: [GH] §1.3.3, [Se] §7, [vdM] §1.2

3 Zweite Variation, Konvexität

endlich-dim. Fall:

Sei $u_0 \in \mathbb{R}^n$ stationärer Punkt der reellen Fkt. $\mathcal{F} \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Hesse-Matrix $\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial u^2}(u_0) > 0 \Rightarrow u_0$ ist lokale Minimalstelle.

unendlich-dim. Fall:

Sei u_0 stationärer Punkt von $\mathcal{F}(u) := \int_{\Omega} F(x, u, Du) dx$.

Die positive Definitheit von $\delta^2 \mathcal{F}(u_0, \cdot)$, d.h.

$$\delta^2 \mathcal{F}(u_0, \xi) > 0 \quad \forall 0 \neq \xi \in C_0^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$$

ist *nicht* hinreichend dafür, dass u_0 schwache lokale Minimalstelle ist:

Beispiel 3.1. Sei $\mathcal{F}(u) := \int_{-1}^1 x^2 u'(x)^2 + x u'(x)^3 dx$. Es gilt

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F}(0, \xi) &= 0 \quad \forall \xi \in C_0^1[-1, 1], \\ \delta^2 \mathcal{F}(0, \xi) &> 0 \quad \forall 0 \neq \xi \in C_0^1[-1, 1]. \end{aligned}$$

Aber $u_0 = 0$ ist *nicht* schwache lokale Minimalstelle ($\rightarrow$ Übung); es fehlt hier die Gleichmäßigkeit von $\delta^2 \mathcal{F}(0, \xi)$ bez. ξ . □

Es sind also zusätzliche Bedingungen an $\mathcal{F}$ nötig. [als Vorgriff auf Folgerung 3.27: sLHB fehlt.]

Ziel des Kapitels: notwendige bzw. hinreichende Bedingungen bei Minimalstellen

3.1 Konvexe Funktionale

Sei $U \subset X$, X linearer Raum über $\mathbb{R}$. [In §3.1 muss $\mathcal{F}$ nicht unbedingt ein Integral sein.]

Definition 3.2. Ein Funktional $\mathcal{F} : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt konvex, falls U konvex ist, und

$$\mathcal{F}((1 - \lambda)u + \lambda v) \leq (1 - \lambda)\mathcal{F}(u) + \lambda\mathcal{F}(v) \quad \forall u \neq v, \forall 0 < \lambda < 1;$$

strikt konvex, falls “<” gilt.

Die folgenden 2 Sätze liefern *hinreichende Bedingungen* für globale Minimalstellen.

Satz 3.3. Sei $\mathcal{F} : U \rightarrow \mathbb{R}$ [strikt] konvex, $u \in U$.

a) Zu jedem $v \in U$ existiere ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u + \lambda(v - u)) \quad \forall 0 \leq \lambda \leq \varepsilon$$

$\Rightarrow$ u ist eine [strikte - also eindeutige] globale Minimalstelle von $\mathcal{F}$.

b) Es existiere $\delta\mathcal{F}(u, v - u) \quad \forall v \in U$. Dann gilt:

u ist [strikte] globale Minimalstelle von $\mathcal{F} \Leftrightarrow$

$$\delta\mathcal{F}(u, v - u) = 0 \quad \forall v \in U$$

Beweis. a) Sei $v \neq u$ und (oBdA) $0 < \varepsilon < 1$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u + \varepsilon(v - u)) = \mathcal{F}((1 - \varepsilon)u + \varepsilon v) \stackrel{\text{konvex}}{\leq} \mathcal{F}(u) + \varepsilon(\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(u))$$

$$\Rightarrow 0 \leq \varepsilon(\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(u)) \Rightarrow \mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v)$$

(bei strikter Konvexität “<”)

b) “ $\Rightarrow$ ” lt. §2.1

“ $\Leftarrow$ ” Sei $u \neq v \in U, \xi := v - u; \delta\mathcal{F}(u, \xi)$ existiert.

$\Rightarrow \exists 0 < \varepsilon_0 \leq 1$ mit $u + \varepsilon\xi \in U \quad \forall |\varepsilon| < \varepsilon_0$, da der Differentialquotient existiert.

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 = \delta\mathcal{F}(u, \xi) &\stackrel{\varepsilon \searrow 0}{=} \frac{\mathcal{F}(\overbrace{u + \varepsilon\xi}^{(1-\varepsilon)u + \varepsilon v}) - \mathcal{F}(u)}{\varepsilon} \stackrel{\text{konvex}}{\leq} \\ &\leq \frac{(1 - \varepsilon)\mathcal{F}(u) + \varepsilon\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(u)}{\varepsilon} = \mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(u) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v).$$

Bei strikter Konvexität ist u strikte globale Minimalstelle; sonst erhielte man mit einer 2. Minimalstelle v :

$$\mathcal{F}\left(\frac{u + v}{2}\right) < \frac{\mathcal{F}(u) + \mathcal{F}(v)}{2} = \mathcal{F}(u),$$

also einen Widerspruch. ■

Lemma 3.4. Sei $U \subset X$, $\mathcal{F} : U \rightarrow \mathbb{R}$, $u \in U$ und $\xi \in X$, sodass $\exists \delta^k \mathcal{F}(u, \xi)$ mit $k \in \mathbb{N}$ fest.

Dann gilt:

a)

$$\exists \delta^k \mathcal{F}(u, \mu \xi) \quad \forall \mu \in \mathbb{R},$$

b)

$$\delta^k \mathcal{F}(u, \mu \xi) = \mu^k \delta^k \mathcal{F}(u, \xi) \quad (3.1)$$

Beweis. -Idee: Sei $\mu \neq 0$ oBdA.

$$\Rightarrow \mathcal{F}(u + \varepsilon(\mu \xi)) = \mathcal{F}(\underbrace{u + (\varepsilon \mu) \xi}_{\in U \text{ für } |\varepsilon| \text{ klein}})$$

■

Satz 3.5. Sei $\mathcal{F} : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit U konvex. $\forall u, v \in U$ mit $u \neq v$ gelte: $\delta^2 \mathcal{F}(u, v - u)$ existiert, und

$$\delta^2 \mathcal{F}(u, v - u) \geq 0 \quad [> 0]$$

$\Rightarrow \mathcal{F}$ ist [strikt] konvex.

Beweis. Seien $u, v \in U$ mit $\xi := v - u \neq 0$. Definiere

$$\begin{aligned} \phi : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \lambda &\mapsto \mathcal{F}((1 - \lambda)u + \lambda v) \quad (\mathcal{F} \text{ auf der Interpolationsstrecke}) \end{aligned}$$

[Ziel vom Beweis: $\forall \lambda_0 \in (0, 1)$: $\exists \phi''(\lambda_0)$ und $\phi''(\lambda_0) \geq [>] 0$; also [strikte] Konvexität in Richtung ξ .]

• Betrachte für festes $\lambda_0 \in [0, 1]$ die Zwischenstelle $\tilde{u} := u + \lambda_0 \xi \in U$ und (für $\lambda_0 + \lambda \in [0, 1]$) $\phi(\lambda_0 + \lambda) = \mathcal{F}(\tilde{u} + \lambda \xi)$.

Mit Lemma 3.4: $\delta \mathcal{F}(\tilde{u}, \xi) = \frac{1}{1 - \lambda_0} \delta \mathcal{F}(\tilde{u}, v - \tilde{u})$ und sie existiert lt. VS. $\Rightarrow \phi$ ist an λ_0 differenzierbar (ev. nur einseitig). $\Rightarrow \phi \in C[0, 1]$ (für $\lambda_0 = 1$ betrachte $\phi(\lambda) = \mathcal{F}(v + (1 - \lambda)(u - v))$).

• Es gilt sogar $\phi \in C^1(0, 1)$, da:

Sei $\lambda_0 \in (0, 1)$ fest. Mit Lemma 3.4: $\delta^2 \mathcal{F}(\tilde{u}, \xi) = \frac{1}{(1 - \lambda_0)^2} \delta^2 \mathcal{F}(\tilde{u}, v - \tilde{u})$ und sie existiert lt. VS.

Also: ϕ ist an λ_0 zweimal differenzierbar; λ_0 ist beliebig $\Rightarrow \phi \in C^1(0, 1)$.

• Weiters:

$$\begin{aligned}\phi''(\lambda_0) &= \delta^2 \mathcal{F}(\tilde{u}, \xi) \\ &\stackrel{(3.1)}{=} \frac{1}{(1 - \lambda_0)^2} \delta^2 \mathcal{F}(\tilde{u}, v - \tilde{u}) \geq 0 \quad [> 0]\end{aligned}$$

Also: ϕ [strikt] konvex, und daher $\mathcal{F}$ [strikt] konvex. ■

Beispiel 3.6. Seien $X = C^1[a_1, b_1]$, $0 < g \in C(a_1, b_1) \cap L^1(a_1, b_1)$,

$$\mathcal{F}(u) = \int_{a_1}^{b_1} g(x) \sqrt{1 + u'(x)^2} dx \quad [\text{Integrand ist strikt konvex in } u']$$

auf $U = \{u \in X \mid u(a_1) = a_2, u(b_1) = b_2\}$.

Für $u \neq v \in U$ existiert $\delta^2 \mathcal{F}(u, \xi)$ mit $\xi := v - u$,

$$\delta \mathcal{F}(u, \xi) = \int_{a_1}^{b_1} g(x) \frac{u'(x) \xi'(x)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}} dx, \quad \delta^2 \mathcal{F}(u, \xi) = \int_{a_1}^{b_1} g(x) \frac{\xi'(x)^2}{(1 + u'(x)^2)^{3/2}} dx \geq 0.$$

$\xi' \neq 0$, da sonst wegen der RBen $u = v$ folgte.

$\Rightarrow \delta^2 \mathcal{F}(u, \xi) > 0$, also $\mathcal{F}$ strikt konvex lt. Satz 3.5.

Lt. Satz 3.3(b): Ein stationärer Punkt von $\mathcal{F}(u)$ ist die eindeutige globale Minimalstelle.

Anwendung: Brachistochrone mit $g(x) := (2gx)^{-1/2}$, Bsp. 2.6 □

Beispiel 3.7. Betrachte $\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} F(x, Du(x)) dx$ mit $F \in C^2(V, \mathbb{R})$, $V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{Nn}$.

$$\Rightarrow \delta^2 \mathcal{F}(u, \xi) = \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^N \sum_{j,l=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial p_{ij} \partial p_{kl}}(x, Du(x)) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_l} dx.$$

Def.: F heißt *superelliptisch*, falls

$$\sum_{i,k=1}^N \sum_{j,l=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial p_{ij} \partial p_{kl}}(x, p) \pi_{ij} \pi_{kl} > 0 \quad \forall (x, p) \in V, \forall 0 \neq \pi = (\pi_{ij}) \in \mathbb{R}^{Nn}. \quad (3.2)$$

(3.2) ist äquivalent zur strikten Konvexität der Funktion $p \mapsto F(x, p) \quad \forall x \in \Omega$ fest.

Sei $\mathcal{F} : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit U konvex, und F erfülle (3.2); also $\delta^2 \mathcal{F}(u, \xi) \geq 0$.

- a) $\mathcal{F}$ ist dann lt. Satz 3.5 konvex.
- b) Sei U so, dass $\forall u, v \in U$ mit $u \neq v$ gilt: $D(u - v) \neq 0$. [Das ist typischerweise eine Vorgabe an die Randbedingungen in U .]
Dann ist $\mathcal{F}$ strikt konvex. $\square$

Referenzen: [Se] §2-4, [GH] §4.2

3.2 Die Legendre-Hadamard-Bedingung

Ziel: notwendige/hinreichende Bedingungen an $\delta^2 \mathcal{F}$ bzw. $\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}$ bei Minimalstellen.

generelle Annahmen für §3.2:

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt; $V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{Nn}$ offen;

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x), Du(x)) dx$$

auf $U = \{u \in X := C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) \mid 1 - \text{Graph}(u) \subset V\}$, $F \in C^2(V, \mathbb{R})$.

Analog zu Lemma 2.16, 2.21 gilt:

Lemma 3.8. a) $\forall u \in U, \forall \xi \in X$ gilt: $\delta^2 \mathcal{F}(u, \xi)$ existiert und

$$\begin{aligned} \delta^2 \mathcal{F}(u, \xi) &= \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^N \left[\underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial z_i \partial z_k}(x, u, Du)}_{=: a^{ik}(x)} \xi_i \xi_k \right. \\ &\quad + 2 \sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial z_i \partial p_{kj}}(x, u, Du)}_{=: b_j^{ik}(x)} \xi_i \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \\ &\quad \left. + \sum_{j,l=1}^n \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial p_{ij} \partial p_{kl}}(x, u, Du)}_{=: c_{jl}^{ik}(x)} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_l} \right] dx. \end{aligned} \quad (3.3)$$

b) Sei u schwache Minimalstelle von $\mathcal{F}$ in einer Menge $C \subset X$, und sei $u + \xi \in C \quad \forall \xi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

$$\Rightarrow \quad \delta^2 \mathcal{F}(u, \xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) \quad (3.4)$$

Diese *notwendige Bedingung* für Minimalstellen u ist in integraler Form; nun eine *punktweise* notwendige Bedingung für $u(x)$:

Satz 3.9. Sei $u \in U$ und es gelte

$$\delta^2 \mathcal{F}(u, \xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N).$$

Dann erfüllt u auf Ω die (notwendige) Legendre-Hadamard-Bedingung (LHB):

$$\sum_{i,k=1}^N \sum_{j,l=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial p_{ij} \partial p_{kl}}(x, u(x), Du(x)) \chi_i \chi_k \eta_j \eta_l \geq 0 \quad \forall x \in \Omega, \forall \chi \in \mathbb{R}^N, \forall \eta \in \mathbb{R}^n. \quad (3.5)$$

Bemerkung 3.10. Speziell $N = 1$ (d.h. u skalar):

$$(3.5) \Leftrightarrow \text{Hesse-Matrix } \frac{\partial^2 F}{\partial p_j \partial p_l}(x, u(x), \nabla u(x)) \geq 0, \quad \text{also } F \text{ an } u \text{ konvex bez. } p \in \mathbb{R}^n; \forall x \in \Omega.$$

Gilt analog auch für $n = 1$.

Beweis. (von Satz 3.9)

Idee: Der 3. Term von (3.3) ist dominant für oszillatorische Funktionen $\xi(x)$.

- Ziel: Wir zeigen (3.5) für ein festes $x_0 \in \Omega$.

Sei oBdA $x_0 = 0 \in \Omega$; sei $K = B_\varepsilon(x_0) \subset \Omega$ für ein $\varepsilon > 0$.

Für $\xi \in C_0^\infty(K, \mathbb{R}^N)$ setze

$$\xi_\lambda(x) := \lambda^{1-\frac{n}{2}} \xi\left(\frac{x}{\lambda}\right), \quad 0 < \lambda < 1.$$

- Aus $\delta^2 \mathcal{F}(u, \xi_\lambda) \geq 0$ folgt mit $x = \lambda y$:

$$\int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^N \left[\lambda^2 a^{ik}(\lambda y) \xi_i \xi_k + 2\lambda \sum_{j=1}^n b_j^{ik}(\lambda y) \xi_i \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} + \sum_{j,l=1}^n c_{jl}^{ik}(\lambda y) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_l} \right] dy \geq 0$$

- $\lambda \rightarrow 0 \Rightarrow$

$$\int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^N \sum_{j,l=1}^n c_{jl}^{ik}(0) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{\xi_k}}{\partial x_l} dy \geq 0 \quad \forall \xi \in C_0^\infty(K, \mathbb{R}^N). \quad (3.6)$$

Das ist zunächst eine Ungleichung für reelle ξ ; der Integrand hat die Struktur einer Vektor-Matrix-Vektor Multiplikation.

- Wegen $c_{jl}^{ik} = c_{lj}^{ki}$ und $\forall z_j^i := \underbrace{\alpha_j^i}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{i}_{=\sqrt{-1}} \underbrace{\beta_j^i}_{\in \mathbb{R}} \in \mathbb{C}$ gilt für den Integranden:

$$\sum_{i,k=1}^N \sum_{j,l=1}^n c_{jl}^{ik}(0) z_j^i \overline{z_l^k} = \sum_{i,k=1}^N \sum_{j,l=1}^n c_{jl}^{ik}(0) \alpha_j^i \alpha_l^k + \sum_{i,k=1}^N \sum_{j,l=1}^n c_{jl}^{ik}(0) \beta_j^i \beta_l^k$$

$\Rightarrow$ (3.6) gilt auch $\forall \xi \in C_0^\infty(K, \mathbb{C}^N)$.

- wähle speziell $\xi(x) = t^{-1} \varphi(x) e^{itx \cdot \underbrace{\eta}_{\in \mathbb{R}^n}} \underbrace{\chi}_{\in \mathbb{R}^N}$ mit $0 \neq \varphi \in C_0^\infty(K, \mathbb{R})$, $t > 0$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^N \sum_{j,l=1}^n c_{jl}^{ik}(0) \chi_i \chi_k \left(t^{-2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} + \varphi^2 \eta_j \eta_l \right) dx \\ &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} \varphi^2 dx \right) \sum_{i,k=1}^N \sum_{j,l=1}^n c_{jl}^{ik}(0) \chi_i \chi_k \eta_j \eta_l. \end{aligned}$$

(Im 1. Integral heben sich die gemischten Terme mit $\varphi \cdot \partial \varphi$ weg.)

Also gilt (3.5) für $x_0 = 0$. ■

Definition 3.11. $u \in X$ erfüllt die strikte (oder hinreichende) Legendre-Hadamard-Bedingung (*sLHB*), wenn $\exists \lambda > 0$:

$$\sum_{i,k=1}^N \sum_{j,l=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial p_{ij} \partial p_{kl}}(x, u(x), Du(x)) \chi_i \chi_k \eta_j \eta_l \geq \lambda |\chi|^2 |\eta|^2 \quad \forall x \in \Omega, \chi \in \mathbb{R}^N, \eta \in \mathbb{R}^n. \quad (3.7)$$

Satz 3.12. Sei $n = 1$ oder $N = 1$ und $F = F(x, p)$.

$u \in X = C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ genüge (3.7) für ein $\lambda > 0$. $\Rightarrow \exists \delta > 0$ sodass:

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u + \xi) \quad \forall \|\xi\|_X < \delta, \quad \text{für die } \delta \mathcal{F}(u, \xi) = 0 \text{ gilt.}$$

Bem: δ kann gleichmäßig bez. der ξ -Richtungen gewählt werden.

Beweis. Sei $N = 1$:

- Laut Lemma 2.16: $\exists \varepsilon > 0$ mit $1 - \text{Graph}(v) \subset V \quad \forall v \in B_\varepsilon(u; X)$ und $\mathcal{F}$ ist definiert auf $B_\varepsilon(u; X) \subset U$.
- wähle festes ξ lt. VS.
- für $\delta < \varepsilon$ definiere $\phi(\theta) := \mathcal{F}(u + \theta \xi) \in C^2[-1, 1]$ (Regularität folgt erst aus (3.9)).

- da $\phi'(0) = \delta\mathcal{F}(u, \xi) = 0$:

$$\mathcal{F}(u + \xi) = \phi(1) = \phi(0) + \int_0^1 \phi'(t) dt = \mathcal{F}(u) + \int_0^1 \int_0^t \phi''(s) ds dt \quad (3.8)$$

- Laut Lemma 3.8 (a) mit $N = 1$, $F = F(x, p)$:

$$\begin{aligned} \phi''(s) &= \delta^2 \mathcal{F}(u + s\xi, \xi) \\ &= \int_{\Omega} \sum_{j,l=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial p_j \partial p_l}(x, \nabla u(x) + s\nabla \xi(x)) \overbrace{\frac{\partial \xi}{\partial x_j}}^{=\eta_j} \overbrace{\frac{\partial \xi}{\partial x_l}}^{=\eta_l} dx \\ &\stackrel{(*)}{\geq} \int_{\Omega} (\lambda - K_{\xi}(s, x)) |\nabla \xi(x)|^2 dx \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\text{mit } K_{\xi}(s, x) = \sum_{j,l=1}^n \left| \frac{\partial^2 F}{\partial p_j \partial p_l}(x, \nabla u(x) + s\nabla \xi(x)) - \frac{\partial^2 F}{\partial p_j \partial p_l}(x, \nabla u(x)) \right|.$$

In (*) verwendet: (3.7) für $N = 1, s = 0$; und $|\frac{\partial \xi}{\partial x_j}| \leq |\nabla \xi|$ im Term mit K_{ξ} (da negatives Vorzeichen).

- $\frac{\partial^2 F}{\partial p_j \partial p_l}$ ist glm. stetig auf folgendem Kompaktum (da beschränkt und abgeschlossen; ∇u glm. stetig auf $\overline{\Omega}$):

$$\left\{ (x, p) \mid x \in \overline{\Omega}, |\nabla u(x) - p| \leq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \lambda - K_{\xi}(s, x) &\geq 0 \quad \forall 0 \leq s \leq 1 \text{ und } x \in \Omega, \text{ falls } \delta \geq |\nabla \xi| \text{ klein genug} \Rightarrow \\ \phi''(s) &\geq 0 \Rightarrow \mathcal{F}(u + \xi) \geq \mathcal{F}(u) \text{ aus (3.8).} \end{aligned}$$

n=1: analog ■

Folgerung 3.13. *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.12 gilt:*

u ist stationärer Punkt von $\mathcal{F} \Leftrightarrow u$ ist schwache lokale Minimalstelle von $\mathcal{F}$ (siehe Def. 2.4, 2.19a).

(“ $\Leftarrow$ ” folgt aus Lemma 2.16 und Bemerkung 2.3).

Beispiel 3.14. Satz 3.12 gilt i.A. *nicht* für $F = F(x, z, p)$:

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^{2\pi} (u'(x)^2 - u(x)^2) dx,$$

$$n = N = 1, F(z, p) = p^2 - z^2, \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} = 2 > 0,$$

also gilt die sLHB (3.7).

Aber: $\delta^2 \mathcal{F}(u, \xi) = \dots = 2\mathcal{F}(\xi) \quad \forall u$

$$\Rightarrow \quad \delta^2 \mathcal{F}(u, \xi) < 0 \quad \text{z.B. für } \xi(x) = \sin \frac{x}{2}$$

Also notwendige Bedingung für Minimalstelle verletzt. $u \equiv 0$ ist stationärer Punkt aber keine Minimalstelle. $\square$

Referenzen: [Se] §4,8; [GH] §4.1, [Gr] §2.3

3.3 Jacobi-Bedingung, konjugierte Punkte

Während Satz 3.12 nur für Funktionale mit $F = F(x, p)$ gilt, sollen nun hinreichende Bedingungen für lokale Minimalstellen auch im Fall $F = F(x, z, p)$ gefunden werden.

Konzept: Finde (zusätzlich zur sLHB) notwendige bzw. hinreichende *Jacobi Bedingung*

für Minimalstellen von $\mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x)) dx$ (nur für $n = 1$ aber $F = F(x, z, p)$)

zulässig – im Gegensatz zu Satz 3.12).

generelle Annahmen für §3.3:

$V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ offen, $F \in C^2(V, \mathbb{R})$

Sei $u \in X := C^1([a, b], \mathbb{R}^N)$ geg., $1\text{-Graph}(u) \subset V$.

Sei $C_\delta := \{v \in X \mid v(a) = u(a), v(b) = u(b), \|u - v\|_X < \delta\}$ für $\delta > 0$.

Lemma 3.15. *Sei u schwache lokale Minimalstelle von $\mathcal{F}$ in $C_\delta \Rightarrow$*

$$a) \quad \delta \mathcal{F}(u, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in X_0 := C_0^1([a, b], \mathbb{R}^N) := \{v \in C^1([a, b], \mathbb{R}^N) \mid v(a) = v(b) = 0\} .$$

(analog Lemma 2.21)

$$b) \quad \delta^2 \mathcal{F}(u, \xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in X_0$$

(analog Lemma 3.8b)

$$c) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(x, u(x), u'(x)) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

(analog Bem. 3.10)

$\square$

zuerst Strategie der Jacobi-Theorie für $n = N = 1$:

u ist gegeben und erfülle die sLHB $F_{pp}(x, u(x), u'(x)) \geq \lambda > 0$.

Teilziel 1: Zeige (unter geeigneten Bedingungen), dass $\delta^2 \mathcal{F}(u, \xi) \geq [>]0 \quad \forall \xi \in X_0$.
Das ist nämlich notwendig für schwache Minimalstellen. Es wird erreicht durch Darstellung als vollständiges Quadrat:

- Aus Lemma 3.8 (a) mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} \delta^2 \mathcal{F}(u, \xi) &= \int_a^b \xi^2 \left\{ \underbrace{F_{zz}(x, u(x), u'(x)) - \frac{d}{dx} [F_{zp}(x, u(x), u'(x))]}_{=: \alpha(x)} \right\} \\ &\quad + \xi'^2 F_{pp}(x, u(x), u'(x)) dx \\ &\stackrel{w \text{ bel., } \xi \in X_0}{=} \int_a^b \xi^2 \alpha + \xi'^2 F_{pp} - (w \xi^2)' dx \\ &= \int_a^b \underbrace{F_{pp}}_{\geq \lambda} \left[\xi'^2 - 2 \frac{w}{F_{pp}} \xi \xi' + \underbrace{\frac{\alpha - w'}{F_{pp}}}_{\stackrel{!}{=} w^2 / F_{pp}^2} \xi^2 \right] dx \end{aligned}$$

- für vollständiges Quadrat erfülle w die *Riccati-Gleichung*

$$w^2 = \underbrace{F_{pp}(x, u(x), u'(x))}_{\text{gegeben; } >0} (\alpha(x) - w') \quad \text{auf ganz } [a, b] \quad (3.10)$$

$$\Rightarrow \delta^2 \mathcal{F}(u, \xi) = \int_a^b F_{pp} \left[\xi' - \frac{w}{F_{pp}} \xi \right]^2 dx \geq 0 \quad \forall \xi \in X_0$$

- Überprüfung der globalen Lösbarkeit von (3.10): Nach Substitution $w =: \frac{\varphi'}{\varphi} F_{pp}$ erfüllt φ die lineare *Jacobi-Gleichung*:

$$[\varphi' F_{pp}(x, u(x), u'(x))] - \alpha(x) \varphi = 0 \quad \text{auf } [a, b]$$

$\Rightarrow w$ existiert auf ganz $[a, b]$ unter der *Bedingung*

$$\varphi(x) \neq 0 \quad \text{auf ganz } [a, b]. \quad (3.11)$$

Wir suchen also eine Lösung φ , ohne Nullstelle auf $[a, b]$, vgl. Bsp. 3.22. (Solch eine Nullstelle wäre ein “konjugierter Punkt” und soll für unser aktuelles Ziel vermieden werden.)

- Und dann: $\delta^2 \mathcal{F}(u, \xi) \geq 0 \quad \forall \xi$

nun Jacobi-Theorie für $n = 1$, $N \in \mathbb{N}$:

Teilziel 2: Zeige (unter geeigneten Bedingungen), dass die Jacobi-Bedingung notwendig ist für eine schwache lokale Minimalstelle.

Definition 3.16. Sei $u \in X$ fest. Für $\xi \in X_0$ heißt

$$\mathcal{Q}(\xi) := \delta^2 \mathcal{F}(u, \xi) \stackrel{(3.3)}{=} \int_a^b Q(x, \xi(x), \xi'(x)) dx$$

das akzessorische Integral von $\mathcal{F}$ bezüglich u mit der akzessorischen Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} Q(x, z, p) = & z^T \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(x, u(x), u'(x))}_{=: A(x) \in \mathbb{R}^{N \times N}} z \\ & + 2z^T \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial p}(x, u(x), u'(x))}_{=: B(x) \in \mathbb{R}^{N \times N}} p + p^T \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(x, u(x), u'(x))}_{=: C(x) \in \mathbb{R}^{N \times N}} p, \end{aligned} \quad (3.12)$$

also quadratische Form in (z, p) .

Definition 3.17. Eine Fkt. $\varphi \in X$ heißt Jacobi-Feld längs u , wenn $\psi := B^T \varphi + C \varphi' \in X$, die Gleichung

$$\psi' - A\varphi - B\varphi' \equiv 0 \quad \text{auf } [a, b] \text{ erfüllt.}$$

also: φ erfüllt die EL-Gl. von $\mathcal{Q}$, d.h.

$$\begin{aligned} 0 = -\frac{1}{2} L_Q \varphi &= \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial Q}{\partial p}(x, \varphi, \varphi') \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial z}(x, \varphi, \varphi') \\ &= \frac{d}{dx} \left(\underbrace{B^T \varphi + C \varphi'}_{=\psi} \right) - A\varphi - B\varphi'. \end{aligned} \quad (3.13)$$

(3.13) heißt Jacobi-Gleichung von $\mathcal{F}$ bez. u .

Bemerkung 3.18. Ist $C(x)$ invertierbar $\forall x \in [a, b]$, so ist Def. 3.17 äquivalent dazu, dass (φ, ψ) folgendes lineares DGL-System 1. Ordnung löst:

$$\begin{cases} \varphi' = C^{-1} \psi - C^{-1} B^T \varphi, \\ \psi' = (A - B C^{-1} B^T) \varphi + B C^{-1} \psi. \end{cases} \quad (3.14)$$

(3.14) immer lösbar. $\Rightarrow$ Jacobi-Feld $\varphi \not\equiv 0$ existiert (man wähle eine nichttriviale Anfangsbedingung).

Definition 3.19. a) Ein Punkt $\tilde{a} \in (a, b]$ heißt konjugiert zu a (bez. $\mathcal{F}$ und u), wenn $\exists$ Jacobi-Feld $0 \not\equiv \varphi \in X$ längs u mit $\varphi(a) = \varphi(\tilde{a}) = 0$.

- b) u erfüllt die [strikte] Jacobi-Bedingung (JB , $[sJB]$), wenn $\tilde{a}$ zu a konjugierter Pkt. in (a, b) , $[(a, b)]$.

Bem. Das ist eine globale Bedingung in x – im Gegensatz zur (s)LHB.

Satz 3.20. u erfülle die sLHB:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(x, u(x), u'(x)) > 0 \quad \forall x \in [a, b]. \quad (\text{also } C(x) \text{ invertierbar; } \exists \varphi \neq 0)$$

Dann gilt

- a) Ist $\mathcal{Q}(\xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in X_0 \Rightarrow u$ erfüllt JB .
 b) Ist $\mathcal{Q}(\xi) > 0 \quad \forall 0 \neq \xi \in X_0 \Rightarrow u$ erfüllt sJB .

Bem.: Im Satz 3.26 werden wir auch beide Rückrichtungen, also Äquivalenzen zeigen.

Beweis. indirekt: Angenommen $\exists$ Jacobi-Feld $0 \neq \varphi \in X$ mit $\varphi(a) = \varphi(\tilde{a}) = 0$ für ein $a < \tilde{a} \leq b$ (also $\tilde{a}$ ist konjugierter Punkt).

Definiere die stückweise C^1 -Fkt:

$$\xi_0(x) := \begin{cases} \varphi(x), & a \leq x \leq \tilde{a} \\ 0, & \tilde{a} \leq x \leq b \end{cases},$$

mit dem Ziel $\mathcal{Q}(\xi_0) = 0$ zu zeigen:

Für $a \leq x \leq \tilde{a}$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(x, \xi_0, \xi'_0) &= \varphi^T [A(x)\varphi + B(x)\varphi'] + \varphi'^T [B^T(x)\varphi + C(x)\varphi'] \\ &\Rightarrow \int_a^{\tilde{a}} \varphi'^T [B^T \varphi + C \varphi'] dx \stackrel{\text{part. Int.}}{=} \underbrace{\varphi^T [B^T \varphi + C \varphi'] \Big|_{x=a}^{x=\tilde{a}}}_{=0, \text{ da } \varphi(a) = \varphi(\tilde{a}) = 0} - \int_a^{\tilde{a}} \varphi^T [B^T \varphi + C \varphi']' dx \\ &\Rightarrow \mathcal{Q}(\xi_0) = \int_a^{\tilde{a}} \varphi^T \{A\varphi + B\varphi' - [B^T \varphi + C \varphi']'\} dx = \frac{1}{2} \int_a^{\tilde{a}} \varphi^T L_Q \varphi dx \stackrel{(3.13)}{=} 0 \end{aligned}$$

- a) Sei $a < \tilde{a} < b$ (also: JB gilt nicht). Laut VS in (a):

$$0 = \mathcal{Q}(\xi_0) \leq \mathcal{Q}(\xi) \quad \forall \xi \in X_0, \quad \text{aber i.A. } \xi_0 \notin X_0. \quad (3.15)$$

(3.15) gilt auch $\forall \xi \in D_0^1([a, b], \mathbb{R}^N) := \{v \in D^1([a, b], \mathbb{R}^N) \mid v(a) = v(b) = 0\}$, da $\overline{X_0} = H_0^1((a, b), \mathbb{R}^N)$ (Abschluss bez. $H_0^1(a, b)$ -Norm; $\mathcal{Q}$ ist stetiges Funktional auf $H_0^1(a, b)$) und $D_0^1([a, b], \mathbb{R}^N) \subset H_0^1((a, b), \mathbb{R}^N)$.

Also: $\xi_0 \in D_0^1$ ist schwache lokale (+ sogar globale) Minimalstelle von $\mathcal{Q}$ in D_0^1 .

Laut Satz 2.33 gilt die 1. Erdmannsche Eckenbedingung:

$$\nabla_p Q(x, \xi_0(x), \xi'_0(x)) = \underbrace{2B^T(x)\xi_0(x)}_{\text{ist stetig}} + 2C(x)\xi'_0(x)$$

ist stetig an $x = \tilde{a}$,

Laut VS: $C^{-1}(x)$ stetig $\Rightarrow \xi'_0$ an $\tilde{a}$ stetig, also $\varphi'(\tilde{a}) = 0$.

Laut Def. 3.17: $\psi(\tilde{a}) = 0 \Rightarrow$ Lösung von (3.14) ist $\varphi \equiv \psi \equiv 0 \Rightarrow$ Widerspruch zu $\varphi \not\equiv 0$.

- b) Sei $\tilde{a} = b$ (also: sJB gilt nicht). Es gilt $0 \neq \xi_0 = \varphi \in X_0$ und $\varphi \not\equiv 0$. Aber $\mathcal{Q}(\xi_0) = 0$ ist Widerspruch zur VS $\mathcal{Q}(\xi_0) > 0$. ■

Folgerung 3.21. Ist u schwache lokale Minimalstelle von $\mathcal{F}$ in C_δ , und gilt die sLHB, so erfüllt u die JB; diese ist also notwendig.

Beispiel 3.22. Sei $\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2} \int_0^b u'(x)^2 - u(x)^2 dx$ ($N = 1$).

$$\mathcal{Q}(\xi) = \delta^2 \mathcal{F}(u, \xi) = 2\mathcal{F}(\xi), \quad F(x, z, p) = \frac{1}{2}(p^2 - z^2), \quad Q(z, p) = p^2 - z^2.$$

$A = -1, B = 0, C = \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} = 1 > 0$, also sLHB erfüllt.

- Jacobi-Gleichung:

$$0 = -\frac{1}{2}L_Q\varphi = \frac{d}{dx}(\varphi') + \varphi = \varphi'' + \varphi \quad (3.16)$$

- Alle Lösungen φ sind Jacobi-Felder.
- ges: konjugierte Punkte zu $a = 0$:

Alle Lösungen $\varphi \not\equiv 0$ mit $\varphi(0) = 0$ sind:

$$\varphi(x) = \alpha \sin x, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (3.17)$$

kleinster conj. Pkt: $\tilde{a} = \pi$

Sei $b > [=]\pi$: JB [sJB] ist *nicht* erfüllt $\Rightarrow$ lt. (Gegenteil von) Satz 3.20 $\exists 0 \neq \xi \in X_0$ mit $\overline{\mathcal{Q}(\xi)} < [=]0$:

Z.B. gilt für $\xi(x) := \sin \frac{\pi x}{b}$ (mit $y = \frac{\pi x}{b}$):

$$\mathcal{Q}(\xi) = \dots = \int_0^\pi \frac{\pi}{b} \cos^2 y - \frac{b}{\pi} \sin^2 y dy = \left(\frac{\pi}{b} - \frac{b}{\pi} \right) \frac{\pi}{2} \stackrel{[=]}{<} 0$$

Also: $\nexists$ Minimalstelle u für $b > \pi$.

Sei $0 < b < \pi$: sJB ist erfüllt, da es keinen zu a konjugierten Punkt in $(a, b]$ gibt. Wenn für $\varphi \not\equiv 0$ gilt: $\varphi(a) = 0$, dann liegt die nächste Nullstelle von φ außerhalb von $[a, b]$, siehe (3.17).

Durch eine kleine Störung (bzw. Verschiebung) von solch einem φ läßt sich eine Lösung von (3.16) erhalten, die gar keine Nullstelle auf $[a, b]$ hat – wie in (3.11) gefordert:

Für hinreichend kleines $\beta > 0$ gilt

$$\tilde{\varphi}(x) := \sin x + \beta \cos x \neq 0 \quad \forall x \in [0, b]$$

$\Rightarrow w := \frac{\tilde{\varphi}'}{\tilde{\varphi}}$ löst die *Riccati-Gleichung* (vgl. (3.10)) :

$$w' + 1 + w^2 = 0 \quad \text{auf } [0, b]. \quad (3.18)$$

$\Rightarrow \forall \xi \in X_0$ gilt:

$$\begin{aligned} \xi'^2 - \xi^2 - (w\xi^2)' &= \xi'^2 - \xi^2 - w'\xi^2 - 2w\xi\xi' \\ &\stackrel{(3.18)}{=} \xi'^2 + w^2\xi^2 - 2w\xi\xi' = (\xi' - w\xi)^2 \\ \Rightarrow \mathcal{Q}(\xi) &= \int_0^b \xi'^2 - \xi^2 dx \stackrel{\xi \in X_0}{=} \int_0^b \xi'^2 - \xi^2 - (w\xi^2)' dx = \int_0^b (\xi' - w\xi)^2 dx \geq 0, \end{aligned}$$

also $\delta^2 \mathcal{F}(u, \xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in X_0$. D.i. notwendige Bedingung für schwache Minimalität von u in C_δ (siehe Lemma 3.15 b).

$$\delta \mathcal{F}(u, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in X_0 \Leftrightarrow u + u'' = 0 \quad (\text{EL-Gl.}) \quad (3.19)$$

Betrachte $\mathcal{F}(u) \stackrel{!}{\rightarrow} \min$, z.B. mit RBen $u(0) = 0$, $u(b) = 1$ mit $0 < b < \pi$ (also sJB gilt).

$\Rightarrow$ eindeutige Lösung von (3.19): $u_0(x) = \frac{\sin x}{\sin b}$.

Laut Satz 3.25 (unten): u_0 ist strikte schwache lokale Minimalstelle von $\mathcal{F}$. □

Teilziel 3: sLHB + sJB sind hinreichend für strikte schwache lokale Minimalstelle.

Vorbereitung:

Lemma 3.23. *Es gebe ein $S = S(x, z) \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^N)$ und $\delta > 0$, sodass*

$$\begin{aligned} F(x, u(x), u'(x)) - S_x(x, u(x)) - (\nabla_z S)(x, u(x)) \cdot u'(x) \\ \leq F(x, z, p) - S_x(x, z) - (\nabla_z S)(x, z) \cdot p \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\forall (x, z, p) \in [a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \text{ mit } |z - u(x)| + |p - u'(x)| < \delta.$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u + \xi) \quad \forall 0 \neq \xi \in X_0 \text{ mit } \|\xi\|_\infty + \|\xi'\|_\infty < \delta.$$

Es gilt sogar “<”, falls in (3.20) “<” gilt $\forall z \neq u(x)$.

Beweis. Sei $v := u + \xi$ mit $\|\xi\|_\infty + \|\xi'\|_\infty < \delta$. $\Rightarrow$

$$F(x, u(x), u'(x)) - \frac{d}{dx} S(x, u(x)) \stackrel{(3.20)}{\leq} F(x, v(x), v'(x)) - \frac{d}{dx} S(x, v(x)) \quad \forall x \in [a, b] \quad (3.21)$$

$$\Rightarrow \int_a^b F(x, u(x), u'(x)) dx - S(x, u(x)) \Big|_{x=a}^{x=b} \leq \int_a^b F(x, v(x), v'(x)) dx - S(x, v(x)) \Big|_{x=a}^{x=b}, \quad (3.22)$$

wobei die Randterme wegen $\xi \in X_0$ (also $u(a) = v(a), u(b) = v(b)$) übereinstimmen $\Rightarrow$ Behauptung.

Bei der Zusatzannahme “ $<$ ” in (3.20) und $\xi \not\equiv 0$ gilt in (3.21) “ $<$ ” auf offenem Teilintervall und “ $<$ ” in (3.22). ■

Lemma 3.24. u erfülle $sLHB$ (also $C = \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(x, u(x), u'(x)) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$) und sJB . Definiere folgende Matrizen aus $C([a, b], \mathbb{R}^{N \times N})$:

$$\tilde{A} := -C^{-1}B^T, \quad \tilde{B} := C^{-1}, \quad \tilde{C} := A - BC^{-1}B^T.$$

$\Rightarrow \exists \alpha > 0$ und $\exists$ punktweise symmetrische Lösung $W = W^T \in C^1([a, b], \mathbb{R}^{N \times N})$ der Matrix-Riccati-Gleichung.

$$W' + W\tilde{A} + \tilde{A}^T W + W\tilde{B}W - \tilde{C} = -\alpha I \quad \text{auf ganz } [a, b].$$

(Bem.: globale Lösbarkeit folgt aus sJB ; vgl. (3.18))

Beweis. siehe [Se] §9: Lemma 9.13 + Folgerung 9.14

Der folgende Satz ist das zentrale Ergebnis dieses Kapitels.

Satz 3.25. u erfülle $\delta\mathcal{F}(u, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in X_0$, $sLHB$ und sJB .

$\Rightarrow \exists S \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^N)$, das (3.20) erfüllt (mit Zusatz “ $<$ ” falls $z \neq u(x)$). Also: u ist strikte schwache lokale Minimalstelle von $\mathcal{F}$.

Beweis. Mit $\alpha > 0$, W aus Lemma 3.24 definiere:

$$\pi(x) := \nabla_p F(x, u(x), u'(x)) \stackrel{(*)}{=} c + \int_a^x \nabla_z F(t, u(t), u'(t)) dt,$$

$$S(x, z) := \pi(x) \cdot z + \frac{1}{2}(z - u(x))^T W(x) (z - u(x)).$$

(*) ... mit (2.7), d.h. integrierter Form der EL-Gleichung.

$$\Rightarrow \pi'(x) = \nabla_z F(x, u(x), u'(x)); \pi \in X; S \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^N) \quad (3.23)$$

laut generellen Annahmen: $\exists \delta_0 > 0$, sodass

$$\begin{aligned} G(x, z, p) &:= F(x, z, p) - S_x(x, z) - \nabla_z S(x, z) \cdot p \\ &= F(x, z, p) - \pi'(x) \cdot z + u'(x)^T W(x) (z - u(x)) \\ &\quad - \frac{1}{2} (z - u(x))^T W'(x) (z - u(x)) - [\pi(x) + W(x) (z - u(x))] \cdot p \end{aligned}$$

ist def. $\forall (x, z, p)$ mit $x \in [a, b]$, $|z - u(x)| + |p - u'(x)| \leq \delta_0$

z.z.: $\exists 0 < \delta < \delta_0$ mit

$$G(x, u(x), u'(x)) \leq G(x, z, p) \quad \forall (x, z, p) \text{ mit } |z - u(x)| + |p - u'(x)| < \delta, \quad (3.24)$$

und “ $<$ ”, falls $z \neq u(x)$, also VS für Lemma 3.23.

Mit Taylorentwicklung von G und Riccati Gleichung für W zeigt man, dass $G(x, u(x), u'(x))$ lokales Minimum ist:

$$\begin{aligned} G(x, z, p) &= G(x, u(x), u'(x)) + (\nabla_{(z,p)} G)(x, u(x), u'(x)) \cdot h(x, z, p) \\ &\quad + \int_0^1 (1-t) h(x, z, p)^T \frac{\partial^2 G}{\partial (z, p)^2}(x, (1-t)u(x) + tz, (1-t)u'(x) + tp) h(x, z, p) dt, \end{aligned}$$

mit $h(x, z, p) := (z - u(x), p - u'(x)) \in \mathbb{R}^{2N}$. Da

$$\nabla_{(z,p)} G = (\nabla_z F - \pi' - W(p - u') - W'(z - u), \nabla_p F - \pi - W(z - u)), \quad (3.25)$$

gilt:

$$(\nabla_{(z,p)} G)(x, u(x), u'(x)) \stackrel{(3.23)}{\equiv} 0 \quad \text{auf } [a, b] \quad (3.26)$$

Notation:

$$\begin{aligned} A_G(x) &:= \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}(x, u(x), u'(x)), \\ B_G(x) &:= \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial p}(x, u(x), u'(x)), \\ C_G(x) &:= \frac{\partial^2 G}{\partial p^2}(x, u(x), u'(x)), \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 G}{\partial (z, p)^2}(x, u(x), u'(x)) &= \begin{pmatrix} A_G & B_G \\ B_G^T & C_G \end{pmatrix} (x) \stackrel{(3.25)}{=} \begin{pmatrix} A - W' & B - W \\ B^T - W & C \end{pmatrix} (x) \end{aligned}$$

Laut Lemma 3.24:

$$\begin{aligned} -\alpha I &= W' + W\tilde{A} + \tilde{A}^T W + W\tilde{B}W - \tilde{C} \\ &= W' - A + (B - W)C^{-1}(B^T - W) \\ \Rightarrow A_G &= A - W' = B_G C^{-1} B_G^T + \alpha I \quad \text{auf } [a, b] \end{aligned}$$

$\Rightarrow \forall (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{2N}$ gilt:

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} A_G & B_G \\ B_G^T & C_G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle &= \langle A_G \xi, \xi \rangle + \langle B_G \eta, \xi \rangle + \langle B_G^T \xi, \eta \rangle + \langle C_G \eta, \eta \rangle \\ &= \langle B_G C^{-1} B_G^T \xi, \xi \rangle + \alpha |\xi|^2 + \langle B_G \eta, \xi \rangle \\ &\quad + \langle B_G^T \xi, \eta \rangle + \langle C_G \eta, \eta \rangle \\ &= \langle C^{-1} (B_G^T \xi + C \eta), B_G^T \xi + C \eta \rangle + \alpha |\xi|^2 \\ &\stackrel{C^{-1} > 0}{\geq} \beta |B_G^T \xi + C \eta|^2 + \alpha |\xi|^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h^T \frac{\partial^2 G}{\partial (z, p)^2} (x, u(x), u'(x)) h > 0 \quad \forall x \in [a, b], \forall 0 \neq h \in \mathbb{R}^{2N}.$$

Da $G \in C^2$: $\exists \delta > 0$ mit

$$\begin{aligned} h^T \frac{\partial^2 G}{\partial (z, p)^2} (x, u(x), u'(x)) h > 0 \quad \forall (x, z, p) \text{ mit} \\ |z - u(x)| + |p - u'(x)| < \delta \quad \forall 0 \neq h \in \mathbb{R}^{2N}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ aus (3.26) folgt (3.24) $\Rightarrow$ Behauptung folgt aus Lemma 3.23. ■

Abschließend nochmals zurück zu Teilziel 1 (nun für $N \in \mathbb{N}$): Zeige (unter geeigneten Bedingungen), dass $\delta^2 \mathcal{F}(u, \xi) \geq [\geq] 0 \quad \forall \xi \in X_0$.

Satz 3.26. u erfülle $sLHB$. $\Rightarrow$

- a) u erfüllt $JB \Leftrightarrow \mathcal{Q}(\xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in X_0$.
- b) u erfüllt $sJB \Leftrightarrow \mathcal{Q}(\xi) > 0 \quad \forall 0 \neq \xi \in X_0$.

Beweis. “ $\Leftarrow$ ” schon in Satz 3.20.

“ $\Rightarrow$ ”

b) Analog zu Bsp. 3.22:

$$\delta^2 \mathcal{Q}(\xi = 0, \zeta) = 2\mathcal{Q}(\zeta) \quad (:= 2\delta^2 \mathcal{F}(u, \zeta)) \quad \forall \zeta \in X_0$$

$\Rightarrow$ Jacobi-Gl. von $\mathcal{Q}$ bez. $\xi = 0$ (d.h. EL-Gl. von $\delta^2 \mathcal{Q}$) ist EL-Gl. von $\mathcal{Q}$ (bei festem u), also (laut Def. 3.17) die Jacobi-Gl. von $\mathcal{F}$ bez. u .

$\Rightarrow$ sJB von $\mathcal{F}$ gilt auch für $\mathcal{Q}$. Weiters: sLHB (wegen (3.12): $\frac{\partial^2 \mathcal{Q}}{\partial p^2} = 2C = 2\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}$) gilt auch für $\mathcal{Q}$.

Da

$$\mathcal{Q}(t\zeta) = t^2 \mathcal{Q}(\zeta) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{3.27}$$

gilt:

$$\delta \mathcal{Q}(0, \zeta) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{Q}(t\zeta) - \overbrace{\mathcal{Q}(0)}^{=0}}{t} = 0 \quad \forall \zeta \in X_0.$$

$\Rightarrow$ Laut Satz 3.25 für $\mathcal{Q}$: $\exists \delta > 0$: 0 ist strikte schwache lokale Minimalstelle von $\mathcal{Q}$, d.h.

$$0 = \mathcal{Q}(0) < \mathcal{Q}(\zeta) \quad \forall 0 \neq \zeta \in X_0 \text{ mit } \|\zeta\|_\infty + \|\zeta'\|_\infty < \delta.$$

Aus “Skalierung” (3.27): $\mathcal{Q}(\zeta) > 0 \quad \forall 0 \neq \zeta \in X_0$.

a) Idee: potentieller konjugierter Pkt. b wird “abgeschnitten”:

Sei $0 < \varepsilon < b - a$. Definiere

$$\mathcal{F}_\varepsilon(v) := \int_a^{b-\varepsilon} F(x, v, v') dx; \quad u_\varepsilon := u|_{[a, b-\varepsilon]}$$

$\Rightarrow \mathcal{F}_\varepsilon, u_\varepsilon$ erfüllen Voraussetzungen von (b).

$$\Rightarrow \mathcal{Q}_\varepsilon(\zeta) := \int_a^{b-\varepsilon} Q(x, \zeta, \zeta') dx \stackrel{\text{Teil (b)}}{\geq} 0 \quad \forall \zeta \in C_0^1([a, b-\varepsilon], \mathbb{R}^N)$$

Sei $\xi \in X_0$. Definiere die lineare Verzerrung $\zeta_\varepsilon(x) := \xi(a + \frac{b-a}{b-\varepsilon-a}(x-a)) \in C_0^1([a, b-\varepsilon], \mathbb{R}^N)$.

$$\Rightarrow 0 \leq \mathcal{Q}_\varepsilon(\zeta_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{Q}(\xi). \quad \blacksquare$$

Folgerung 3.27 (aus Satz 3.25, 3.20). u erfülle $\delta \mathcal{F}(u, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in X_0$, $sLHB$, $\delta^2 \mathcal{F}(u, \xi) > 0 \quad \forall 0 \neq \xi \in X_0 \Rightarrow u$ ist strikte schwache lokale Minimalstelle von $\mathcal{F}$ (vgl. Bsp. 3.1: dort “fehlte” $sLHB$, als Zusatz zu den Bedingungen im Endlichdimensionalen).

Referenzen: [Se] §9, [vB] §10.4-10.6.1, [GH] §5

4 Variationsprobleme mit Nebenbedingungen

generelle Annahmen:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt; $u \in X := C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$.

Sei $V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{Nn}$ offen mit $1 - \text{Graph}(u) \subset V$.

Lagrange Funktionen $F, G \in C^2(V, \mathbb{R})$.

betrachte Probleme:

$$\mathcal{F}(u) := \int_{\Omega} F(x, u(x), Du(x)) dx \rightarrow \min! \quad (4.1)$$

in einer Menge C_{δ} mit festem $\delta > 0$ und festem $v \in X$:

$$C_{\delta} := \{u \in X \mid v = u \text{ auf } \partial\Omega, \|u - v\|_X < \delta, \text{ Nebenbedingung für } u\}$$

Ziel: finde notwendige Bedingungen für einen Minimierer u , für verschiedene Arten von Nebenbedingungen

4.1 Isoperimetrische Nebenbedingungen

Integral-NB: $\mathcal{G}(u) := \int_{\Omega} G(x, u(x), Du(x)) dx \stackrel{!}{=} c; \quad c \in \mathbb{R} \text{ geg.}$

Beispiel 4.1. klassisches isoperimetrisches Problem:

Gesucht: Minimale Bogenlänge einer Kurve bei gegebenem Flächeninhalt:

Sei $\Omega = I = (a, b)$,

$$\mathcal{F}(u) := \int_I \sqrt{1 + u'(x)^2} dx \rightarrow \min!$$

in $C_0^1(\bar{I}) := \{u \in C^1(\bar{I}) \mid u|_{\partial I} = 0\}$ mit

$$\mathcal{G}(u) := \int_I u(x) dx \stackrel{!}{=} c.$$

Die Einschränkung $0 \leq c < \frac{\pi(b-a)^2}{8}$ folgt aus der geometrischen Annahme $u \geq 0$, und dass der Graph $(I, u(I))$ höchstens die Fläche eines Halbkreises einschließen kann. Es gilt $F = \sqrt{1+p^2}$, $G = z$.

Duales Problem: Maximaler Flächeninhalt bei gegebenem Umfang. $\square$

Satz 4.2. Sei $u \in X$ schwache lokale Minimalstelle von $\mathcal{F}$ in C_δ , und sei

$$\delta\mathcal{G}(u, \cdot) \quad \text{nicht das Nullfunktional auf } C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N). \quad (4.2)$$

[Sonst würde die NB nicht "wirken".]

a) $\Rightarrow \exists! \lambda \in \mathbb{R}$ (skalärer Lagrange Multiplikator), sodass

$$\delta\mathcal{F}(u, \xi) + \lambda \delta\mathcal{G}(u, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N).$$

b) Sei ferner $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

$\Rightarrow$ Es gelten die EL-Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial z_i} [F + \lambda G](x, u(x), Du(x)) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial p_{ij}} + \lambda \frac{\partial G}{\partial p_{ij}} \right) (x, u(x), Du(x)) \right] = 0;$$

$x \in \Omega; i = 1, \dots, N$

Beweis.

Bem: In §2 waren alle Störungsrichtungen $\xi \in X$ zulässig. Wesentlicher Aspekt hier (und in §4.2) ist die Konstruktion von zulässigen Variationen, die die NB erfüllen.

- Laut Voraussetzung $\exists \varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit $\delta\mathcal{G}(u, \varphi) = 1$ (da $\delta\mathcal{G}$ homogen in φ). Sei $\xi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ beliebig; definiere

$$\phi(\varepsilon, t) := \mathcal{F}(u + \varepsilon\xi + t\varphi), \quad \Psi(\varepsilon, t) := \mathcal{G}(u + \varepsilon\xi + t\varphi)$$

für $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, $|t| < t_0$; ε_0, t_0 hinreichend klein. [Der Term $t\varphi$ dient zur Kompensation, um in der Mannigfaltigkeit der NB $\mathcal{G}(v) = c$ zu bleiben.]

$$\Rightarrow \Psi(0, 0) = c, \Psi_t(0, 0) = \delta\mathcal{G}(u, \varphi) = 1.$$

Gesucht: $t = \tau(\varepsilon)$, sodass $\Psi(\varepsilon, t) = c$ für $u + \varepsilon\xi + t\varphi \in C_\delta$. Also ist $\Psi(\varepsilon, t) = c$ lokal nach t aufzulösen.

- laut Satz über implizite Funktionen:

Für $|\varepsilon| < \varepsilon_1 < \varepsilon_0 : \exists \tau = \tau(\varepsilon) \in C^1(-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ mit $\tau(0) = 0$ und $\Psi(\varepsilon, \tau(\varepsilon)) = c \quad \forall |\varepsilon| < \varepsilon_1$.

- Das sind Variationen in der Mannigfaltigkeit der NB $\mathcal{G}(v) = c$.

$$\Rightarrow \frac{d}{d\varepsilon} \Psi(\varepsilon, \tau(\varepsilon)) \Big|_{\varepsilon=0} = \Psi_\varepsilon(0, 0) + \underbrace{\Psi_t(0, 0)}_{=1} \tau_\varepsilon(0) = 0$$

$$\Rightarrow \tau_\varepsilon(0) = -\Psi_\varepsilon(0, 0) = -\delta \mathcal{G}(u, \xi)$$

- Berechnung der 1. Variation von ϕ an Minimalstelle u : Wegen der Minimalität von u gilt:

$$\begin{aligned} \phi(0, 0) &\leq \phi(\varepsilon, \tau(\varepsilon)) \quad \forall |\varepsilon| < \varepsilon_1 \\ \Rightarrow 0 &= \frac{d}{d\varepsilon} \phi(\varepsilon, \tau(\varepsilon)) \Big|_{\varepsilon=0} = \phi_\varepsilon(0, 0) + \phi_t(0, 0) \tau_\varepsilon(0) \\ &= \delta \mathcal{F}(u, \xi) - \underbrace{\delta \mathcal{F}(u, \varphi)}_{=: \lambda \in \mathbb{R}} \delta \mathcal{G}(u, \xi), \end{aligned} \quad (4.3)$$

und (a) folgt. λ ist unabhängig von ξ (lt. Def.) und eindeutig, sonst führt Differenz von (4.3) für λ_1, λ_2 zu Widerspruch mit (4.2).

(b) folgt aus Satz 2.23 für das Funktional $\mathcal{F} + \lambda \mathcal{G}$. ■

Beispiel 4.1 (Fortsetzung).

- Laut Bsp. 1.1: Lösung u ist konkav (für $u \geq 0$).
- Annahme $u \in C^1(\bar{I}) \cap C^2(I)$

$$\Rightarrow \text{laut Satz 4.2 (b): } \lambda \underbrace{G_z}_{=1} - \frac{d}{dx} [F_p(u'(x))] = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dx} \frac{u'(x)}{\sqrt{1 + u'(x)^2}}}_{=\text{Krümmung } \kappa(x)} = \lambda \quad (< 0)$$

$\Rightarrow$ Kreisbogen mit Radius $-\frac{1}{\lambda}$:

$$u(x) = -\frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - (c_1 + \lambda x)^2} + c_2$$

$c_{1,2}$ durch Anpassung an RBen $u(a) = u(b) = 0$, λ aus gegebener Fläche c .

Folgerung: *isoperimetrische Ungleichung* für jedes beschränkte Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit (geschlossenem) C^1 -Rand:

$$\text{Flächeninhalt von } \Omega \leq \frac{1}{4\pi} (\text{Länge von } \partial\Omega)^2,$$

da genau für Kreise Gleichheit gilt. □

Beispiel 4.3. Eigenwertproblem für eingespannte (vibrierende) Membran:

Betrachte $\mathcal{F}(v) := \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \rightarrow \min!$ in $C_0^1(\bar{\Omega})$ mit NB $\mathcal{G}(v) := - \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \stackrel{!}{=} -1$ zur

L^2 -Normierung der Eigenfunktion v . Also $F = |p|^2$, $G = -z^2$.

[Bem.: Ohne NB erhielte man $u \equiv 0$.]

Ein schwacher Minimierer $u \in C^2(\Omega)$ erfüllt die EL-Gl.:

$$0 = \lambda G_z(u) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} [F_{p_j}(\nabla u)] = -2(\lambda u + \Delta u), \quad x \in \Omega \quad \dots \text{EW-Gleichung für } -\Delta$$

Multiplikation mit u , $\int \dots dx$ und partielle Integration liefern:

$$\underbrace{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}_{\rightarrow \min} = \lambda \int_{\Omega} u^2 dx \stackrel{\text{NB}}{=} \lambda$$

$\Rightarrow$ Lagrange Multiplikator $\lambda > 0$ ist kleinster EW von $-\Delta$ mit homogenen Dirichlet-RBen auf Ω , und u ist zugehörige Eigenfunktion. $\square$

Referenzen: [GH] §2.1, [vdM] §1.3, [Se] §12

4.2 Holonome Nebenbedingungen

- punktweise NB(en): $G(x, v(x)) = 0 \quad \forall x \in \Omega$ (also $G = G(x, z)$); Anwendungen oft aus der Mechanik
- Sei $G = (G_1, \dots, G_r) \in \mathbb{R}^r$, $1 \leq r \leq N - 1$, sodass für jedes feste $x_0 \in \Omega$ $G(x_0, z) = 0$ eine $(N - r)$ -dim. Untermannigfaltigkeit $M(x_0)$ von $\mathbb{R}^N$ definiert. $\Rightarrow$ (4.1) ist Minimierungsproblem für Abbildungen $v : \bar{\Omega} \rightarrow M$.

Beispiel 4.4. Betrachte auf $I = (t_1, t_2)$:

$$\mathcal{F}(u) := \int_I |\dot{u}(t)| dt \rightarrow \min!$$

in $C := \{u \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^3) \mid u(t_1) = P_1, u(t_2) = P_2\}$ mit $G(z) = |z|^2 - R^2$ und $|P_{1,2}| = R$ geg.

Minimum $u(t)$ ist kürzeste Verbindung von P_1 und P_2 auf Sphäre mit Radius $R \rightarrow$ Geodätische, Großkreisbogen. $\square$

Sei nachfolgend $G \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^r)$ mit $r < N$,

$$\operatorname{Rg} \frac{\partial G}{\partial z}(x, z) = r \quad \forall (x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \text{ mit } G(x, z) = c := 0. \quad (\text{A1})$$

$\Rightarrow \forall x \in \Omega$ fest gilt: $M(x) := \{z \in \mathbb{R}^N \mid G(x, z) = 0\}$ ist $(N - r)$ -dim. C^1 -Fläche in $\mathbb{R}^N$,

$$\operatorname{span}\{\nabla_z G_1(x, z), \dots, \nabla_z G_r(x, z)\} = \underbrace{T_z M(x)}_{\text{Tg. Raum}}^\perp, \quad (4.4)$$

der Normalraum (mit Dimension r) an $M(x)$ im Punkt $z \in M(x)$.

Satz 4.5. Sei $u \in X \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ schwache lokale Minimalstelle von $\mathcal{F}$ in

$$C_\delta := \{v \in X \mid \operatorname{supp}(u - v) \subset \Omega, \|u - v\|_X < \delta, G(x, v(x)) = 0 \forall x \in \Omega\}$$

$\Rightarrow \exists$ eindeutig bestimmte Funktionen $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in C(\Omega)$ (Lagrange Multiplikatoren), sodass die EL-Gleichungen gelten:

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \left[F + \sum_{l=1}^r \lambda_l(x) G_l \right] (x, u(x), Du(x)) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial F}{\partial p_{ij}}(x, u(x), Du(x)) \right] = 0; \quad x \in \Omega; i = 1, \dots, N \quad (4.5)$$

Beweis. Umformulierung von (4.5) mit Euler-Operator L_F (2.5):

$$(\mathbb{R}^N \ni) \quad (L_F u)(x) = - \sum_{l=1}^r \lambda_l(x) (\nabla_z G_l)(x, u(x)) \quad \forall x \in \Omega. \quad (4.6)$$

$\forall x \in \Omega$ fest: $\{\lambda_l(x)\}$ ist eindeutig, sonst liefert das einen Widerspruch zu (A1). Aus $L_F u, \nabla_z G_l(\cdot, u) \in C(\Omega)$ wird dann auch $\lambda_l \in C(\Omega)$ folgen.

(4.6) bedeutet, dass $(L_F u)(x)$ eine Linearkombination der $(\nabla_z G_l)(x, u(x))$ ist, also laut (4.4) in $(T_{u(x)} M(x))^\perp$ liegt. Also ist $\forall x \in \Omega$ zu zeigen:

$$(\mathbb{R}^N \ni) \quad (L_F u)(x) \perp T_{u(x)} M(x), \quad (4.7)$$

dem Tangentialraum an $M(x)$ im Punkt $u(x) \in M(x)$.

indirekt: Sei (4.7) falsch $\Rightarrow \exists x_0 \in \Omega$ und $t_{x_0} \in T_{u(x_0)} M(x_0)$ mit

$$[(L_F u)(x_0)] \cdot t_{x_0} \neq 0 \quad (4.8)$$

Schritt 1: Beh: $\exists$ Tangentialvektorfeld $t \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, also $t(x) \in T_{u(x)} M(x) \quad \forall x \in \Omega$ mit $t(x_0) = t_{x_0}$; wähle z.B.

$$t(x) := (I - P(x)) t_{x_0}$$

mit $J(x) := \frac{\partial G}{\partial z}(x, u(x)) \in \mathbb{R}^{r \times N}$ und dem Projektor $P := J^T(JJ^T)^{-1}J$.

$J(x) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^r$ ist surjektiv wegen (A1), also $J^T(x) : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^N$ injektiv.

Aus $JJ^T y = 0$ folgt $|J^T y|^2 = \langle JJ^T y, y \rangle = 0$, also $y = 0$. $\Rightarrow JJ^T : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ ist injektiv, also bijektiv.

Da $P^2 = P^T = P$, ist P orthogonaler Projektor. Weiters ist $\ker P(x) = \ker J(x) = T_{u(x)}M(x)$, da die Zeilen von $J(x)$ eine Basis von $T_{u(x)}M(x)^\perp$ bilden (laut (4.4)). Also, $I - P(x)$ ist Orthogonalprojektor von $\mathbb{R}^N$ auf $T_{u(x)}M(x)$.

Lokalisierung von t um x_0 : Für skalares $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi(0) = 1$ gilt für das Tangentialvektorfeld $\xi(x) := \varphi\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\right)t(x)$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$: $\xi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\xi(x_0) = t(x_0)$, und

$$(\delta \mathcal{F}(u, \xi) =) \int_{\Omega} [(L_F u)(x)] \cdot \xi(x) dx \neq 0$$

(folgt aus Vorzeichen von (4.8) und Stetigkeit des Integranden).

Schritt 2: Im 3. Schritt werden wir eine Familie von zulässigen Variationen $v \in C^1(\Omega \times (-\varepsilon, \varepsilon), \mathbb{R}^N)$ konstruieren, mit

$$v(., 0) = u, \tag{4.9}$$

$$v(x, \tau) = u(x) \quad \forall x \in \Omega \setminus \text{supp } \xi, \quad \forall |\tau| < \varepsilon \tag{4.10}$$

$$G(x, v(x, \tau)) = 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall |\tau| < \varepsilon \quad (\text{also NB OK}) \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}(x, 0) = \xi(x) \quad \forall x \in \Omega \quad (\text{also tangentielle Variation an } M(x)) \tag{4.12}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\tau} \mathcal{F}(v(., \tau)) \Big|_{\tau=0} \stackrel{\text{mit (4.12)}}{=} \delta \mathcal{F}(u, \xi) = \int_{\Omega} [(L_F u)(x)] \cdot \xi(x) dx \neq 0 :$$

Widerspruch zur Minimalität von u unter der NB (4.11)!

Schritt 3: Definiere $w : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^N$,

$$w(x, \tau, \underbrace{\theta}_{\in \mathbb{R}^r}) := u(x) + \tau \xi(x) + \sum_{l=1}^r \theta_l (\nabla_z G_l)(x, u(x)).$$

[Der letzte Term dient zur Kompensation, um die NB zu erfüllen.]

Ziel: Konstruktion der Kompensations-Koeffizienten θ .

• $G(x, w(x, 0, 0)) = G(x, u(x)) = 0$,

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial}{\partial \theta} G(x, w(x, 0, \theta)) \Big|_{\theta=0} &= \underbrace{\frac{\partial G}{\partial z}}_{\in \mathbb{R}^{r \times N}}(x, u(x)) \cdot \underbrace{\frac{\partial w}{\partial \theta}}_{\in \mathbb{R}^{N \times r}}(x, 0, 0) \\ &= \frac{\partial G}{\partial z}(x, u(x)) \cdot \frac{\partial G^T}{\partial z}(x, u(x)) = J(x) \cdot J^T(x) \end{aligned}$$

Diese $r \times r$ -Matrix ist invertierbar (lt. Schritt 1).

- Laut Satz über implizite Funktionen zur Auflösung von $G(x, w(x, \tau, \theta)) = 0$ nach $\theta = \theta(x, \tau)$ (also gilt laut Konstruktion (4.11)):

$\exists! \theta \in C^1(\Omega \times (-\varepsilon, \varepsilon), \mathbb{R}^r)$, sodass (4.9)-(4.11) gelten für $v(x, \tau) := w(x, \tau, \theta(x, \tau))$: Wegen der Eindeutigkeit von θ impliziert $\tau \xi(x) = 0$ (z.B. auf $\Omega \setminus \text{supp } \xi$): $\theta(x, \tau) = 0$.

- Verifikation von (4.12):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} v(x, \tau) \Big|_{\tau=0} &= \xi(x) + \frac{\partial w}{\partial \theta}(x, 0, 0) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \tau}(x, 0) \\ &= \xi(x) + \frac{\partial G^T}{\partial z}(x, u(x)) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \tau}(x, 0). \end{aligned} \quad (4.13)$$

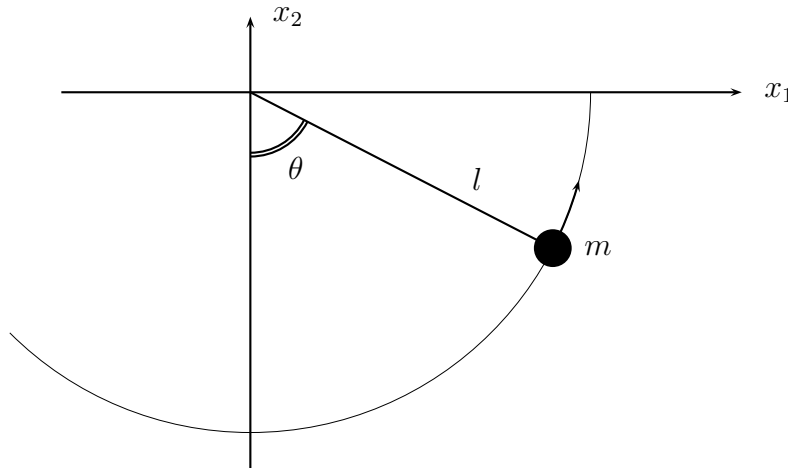
Es gilt $\underbrace{\frac{\partial G}{\partial z}(x, u(x))}_{\text{Zeilen } (\nabla_z G_l)^T \text{ sind Normalvektoren.}} \cdot \underbrace{\xi(x)}_{\text{Tang. Vektor von } M(x)} = 0$, da $\xi(x) \in T_{u(x)}M(x)$ (lt. Schritt 1) und (4.4).

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &\stackrel{(4.11)}{=} \frac{\partial}{\partial \tau} G(x, v(x, \tau)) \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial G}{\partial z}(x, u(x)) \cdot \frac{\partial v}{\partial \tau}(x, 0) \\ &\stackrel{(4.13)}{=} \underbrace{\frac{\partial G}{\partial z}(x, u(x)) \cdot \frac{\partial G^T}{\partial z}(x, u(x))}_{= J \cdot J^T \dots \text{invertierbar}} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \tau}(x, 0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial \tau}(x, 0) = 0 \quad \Rightarrow \text{Aus (4.13) folgt } \frac{\partial v}{\partial \tau}(x, 0) = \xi(x), \text{ also (4.12).} \quad \blacksquare$$

Beispiel 4.6. Pendelgleichung; $N = 2, n = 1$

Punktmasse m bewegt sich im $\mathbb{R}^2$ unter holonomem NB $G(x(t)) := |x(t)|^2 - l^2 = 0$; also $r = 1$. Trajektorie $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$.



kinetische Energie ... $E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} |\dot{x}(t)|^2$

potentielle Energie ... $E_{\text{pot}} = mgx_2(t)$

Wirkungsfunktional (vgl. Bsp. 2.29; dort und hier ev. nur Stationärer Punkt):

$$\mathcal{F}(x) = m \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} |\dot{x}(t)|^2 - gx_2(t) dt \longrightarrow \min !$$

$$F(z, p) = m \left(\frac{|p|^2}{2} - gz_2 \right), \quad G(z) = |z|^2 - l^2$$

EL-Gleichung (4.5):

$$\partial_{z_i} [F + \lambda(t)G](t, x) - \partial_t [F_{p_i}(\dot{x}(t))] = 0$$

bzw.:

$$\begin{cases} 2\lambda(t)x_1(t) - m\ddot{x}_1 = 0 \\ -mg + 2\lambda(t)x_2(t) - m\ddot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

Wegen NB $x_1^2 + x_2^2 = l^2$ liefert die Substitution $x_1(t) = l \sin \theta(t)$, $x_2(t) = -l \cos \theta(t)$:

$$\begin{cases} 2\lambda \sin \theta - m[\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta] = 0 \\ -\frac{mg}{l} - 2\lambda \cos \theta - m[\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta] = 0 \end{cases}$$

Elimination von $\lambda(t)$ [In beiden Zeilen nach $2\lambda/m$ auflösen.] liefert die *Pendelgleichung*:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad \square$$

Beispiel 4.7. harmonische Abbildung in eine Sphäre; $n = N$

$$\mathcal{F}(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underbrace{|Du|^2}_{=\sum_{i,j} (\partial_i u_j)^2} dx \rightarrow \min! \quad (4.14)$$

in $U := \{u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \mid u|_{\partial\Omega} = g; |u| = 1 \text{ f.ü. } \}$, g mit $|g| = 1$ geg.

Es gilt $M = S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ (=Einheitssphäre).

Anwendung in

- Modellierung von *Flüssigkristallen*: $u(x)$ ist die Richtung der Moleküle an x . Parallelausrichtung der Moleküle (d.h. $Du = 0$) minimiert zwar die Energie $\mathcal{F}(u)$, erfüllt aber die RB nicht.

- Mikromagnetismus: $u(x)$ ist Magnetisierung in Ferromagneten; Elementarmagnete haben variable Ausrichtung aber konst. Stärke $\Rightarrow |u(x)| = 1$.

Schwierigkeiten (analytisch + numerisch):

- NB $|u| = 1$ nicht konvex;
- Minimierer typischerweise unstetig (siehe Folie "Magnetisierungsmuster");
- Minimierer nicht eindeutig

Satz 4.8. (EL-Gleichung in schwacher Form)

Ein Minimierer $u \in U$ von (4.14) erfüllt

$$\int_{\Omega} Du : Dv \, dx = \int_{\Omega} |Du|^2 u \cdot v \, dx \quad \forall \text{ Testfunktionen } v \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n) \quad (4.15)$$

Bem:

1. Notation:

$$A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}; \quad A : B := \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij} = \text{Tr}(AB^T)$$

2. (4.15) ist die schwache Formulierung von

$$\begin{cases} -\Delta u &= -\lambda(x)u &, \quad \Omega, \\ u &= g &, \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Die Funktion $-\lambda(x) = |Du(x)|^2$ ist der *Lagrange-Multiplikator* zur NB $|u| = 1$.

- Vergleich zu (4.5): $F(p) = \frac{1}{2}|p|^2$, $p \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $G(z) = \frac{|z|^2 - 1}{2}$

$$\Rightarrow \underbrace{\nabla_z[\lambda(x) G(z)]}_{=\lambda(x) u(x)} - \text{div}_x \left[\underbrace{\frac{\partial F}{\partial p}(Du(x))}_{=Du(x)} \right] = 0$$

3. Man beachte, dass in (4.15) der Raum der Lösungsfunktion und der Raum der Testfunktionen verschieden sind.

Beweis. 1. Sei $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ fest (sowohl als Störungsfunktion als auch als Testfunktion).

Für kleines τ gilt $|u + \tau v| \neq 0$ (da $|u| = 1$).

$$\Rightarrow w(\tau) := \frac{u + \tau v}{|u + \tau v|} \in U \quad \dots \quad \text{zulässige Variationsfamilie} \quad (4.16)$$

2. Für $\phi(\tau) := \mathcal{F}(w(\tau)) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} Dw(\tau) : Dw(\tau) dx$ gilt:

$$\phi'(0) = \int_{\Omega} Du : Dw'(0) dx = 0$$

aus (4.16): $w'(0) = \dots = v - (u \cdot v)u$

$$\Rightarrow 0 = \int_{\Omega} Du : Dv - Du : D((u \cdot v)u) dx \quad (4.17)$$

Zur Vereinfachung von (4.17):

$$\begin{aligned} \text{NB:} \quad & |u|^2 \equiv 1 \quad |\Delta u| = 0 \\ \Rightarrow & \Delta u \cdot u + |Du|^2 = 0 \\ \Rightarrow & \int |Du|^2 u \cdot v dx = - \int (\Delta u \cdot u) u \cdot v dx \stackrel{\text{part. Int.}}{=} \int Du : D((u \cdot v)u) dx ; \end{aligned}$$

einsetzen in (4.17) liefert Ergebnis.

Wegen Δu ist eigentlich noch ein Dichtheitsargument nötig.

■

Referenzen: [GH] §2.2, [Se] §12, [vB] §6.1, [Ev1] §8.4.3

4.3 stationäre Stokes Gleichung

- Grundmodell für homogene, inkompressible, viskose (Flüssigkeits-)Strömung: *Navier-Stokes-Gleichungen* für Geschwindigkeitsfeld $u(\cdot, t) : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und Druck $p(\cdot, t) : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$; ν = Viskositätsparameter; $f(x, t)$ = geg. äußere Kraft:

$$\begin{cases} \alpha u_t + \beta u \cdot Du - \nu \Delta u &= -\nabla p + f \\ \operatorname{div} u &= 0 \end{cases} \quad \dots \text{Inkompressibilitätsbedingung} = \text{NB}$$

Spezialfälle:

- $\nu = 0$... *Euler Gleichungen* (nicht viskos)
- $\beta = 0$... *Stokes Gleichungen* (Linearisierung für u, Du „klein“, d.h. für langsame viskose Strömungen, z.B. in Adern)
- $\alpha = 0$... *stationäres Problem*

- sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet.

stationäres Stokes Problem (linear; oBdA: $\nu = 1$):

$$\begin{cases} -\Delta u &= -\nabla p + f &, \Omega \\ \operatorname{div} u &= 0 &, \Omega \\ u &= 0 &, \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{Haft-Randbedingung}), \quad (4.18)$$

wobei p als Lagrange-Multiplikator zur NB $\operatorname{div} u = 0$ betrachtet werden kann.
Andere Schreibweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -\Delta I & \nabla \\ -\operatorname{div} & 0 \end{pmatrix}}_{(*)} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matrix-Operator $(*)$ ist symmetrisch aber *indefinit* $\Rightarrow$ entspricht Sattelpunktproblem.

- Lösung durch Minimierungsproblem (nur für u — ohne p !):

$$\mathcal{F}(u) := \int_{\Omega} \frac{1}{2} |Du|^2 - f \cdot u \, dx \xrightarrow{!} \min \quad \text{mit } f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3) \text{ geg.}, \quad (4.19)$$

in $U = \{u \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \mid \operatorname{div} u = 0 \text{ in } \Omega\}$... Hilbertraum mit innerem Produkt
 $(u, v) := \int_{\Omega} Du : Dv \, dx$.

- (4.19) hat eindeutigen Minimierer $u \in U$ ($\rightarrow$ Übung)
- $\operatorname{div} u(x) = 0$ ist eine punktweise, *nicht-holonome* NB (allgemeiner: $G(x, u(x), Du(x)) = 0$)

Satz 4.9.

1. Der Minimierer $u \in U$ von (4.19) erfüllt folgende schwache Formulierung von (4.18):

$$\int_{\Omega} Du : Dv - f \cdot v \, dx = \int_{\Omega} p \operatorname{div} v \, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega), \text{ mit } \operatorname{supp} v \subset\subset \Omega, \quad (4.20)$$

wobei eine geeignete skalare Funktion $p \in L_{loc}^2(\Omega)$ (Lagrange Multiplikator zur Nebenbedingung $\operatorname{div} u = 0$) existiert.

2. Die folgende (andere) schwache Formulierung von (4.18):

$$\int_{\Omega} Du : Dv \, dx = \underbrace{\int_{\Omega} f \cdot v \, dx}_{\in U'}, \quad \forall v \in U \quad (\text{d.h. } \operatorname{div} v = 0)$$

hat eine eindeutige Lösung $u \in U$.

Beweis-Idee. 1. Zunächst für spezielle Testfunktionen $v \in U$ und unter der Annahme, dass $u \in U \cap H^2(\Omega)$. Sei $\phi(\tau) := \mathcal{F}(\underbrace{u + \tau v}_{\in U})$:

$$\phi'(0) = \delta \mathcal{F}(u, v) = \int_{\Omega} Du : Dv - f \cdot v \, dx = - \int_{\Omega} (\Delta u + f) \cdot v \, dx \stackrel{!}{=} 0$$

$\Rightarrow \Delta u + f = \nabla p$ für ein p , da $-\int \nabla p \cdot v \, dx = \int p \operatorname{div} v \, dx = 0$.
(Details recht technisch, inkl. Glättung von u : [Ev1])

2. $\int f \cdot v \, dx$ ist stetiges lineares Funktional auf U ; Satz von Riesz.

■

Referenzen: [Ev1] §8.4.4

5 Existenztheorie für Minimierer

5.1 Funktionalanalytische Hilfsmittel

5.1.1 Sobolev Räume $W^{k,p}(\Omega)$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ durchwegs (in ganz §5) ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz Rand; $k \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq p \leq \infty$.

Definition 5.1. (*Sobolev Räume*):

1.

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \mid \underbrace{\nabla^\alpha u}_{\text{als Distrib.}} \in L^p(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq k\}$$

Norm:

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\nabla^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, & p < \infty \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \|\nabla^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & p = \infty \end{cases}$$

2. $W_0^{k,p}(\Omega)$: ist Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ in $W^{k,p}(\Omega)$, für $1 \leq p < \infty$.

Notation: $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$, $W_0^{k,2}(\Omega) = H_0^k(\Omega)$.

Es gilt:

- $W^{k,p}$ -Funktionen sind Äquivalenzklassen von Funktionen, die f.ü. übereinstimmen.
- $W^{k,p}(\Omega)$ ist Abschluss von $C^\infty(\bar{\Omega})$ bez. $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$, $1 \leq p < \infty$.
- $W^{k,p}(\Omega)$, $W_0^{k,p}(\Omega)$ sind Banach Räume; reflexiv $\Leftrightarrow 1 < p < \infty$.
(Bem.: $L^p(\Omega)' = L^q(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)
- $u \in W_0^{k,p}(\Omega) \Leftrightarrow u \in W^{k,p}(\Omega)$ und $\forall |\alpha| \leq k-1$ gilt:
 $\nabla^\alpha u|_{\partial\Omega} = 0$ „im schwachen Sinn“
- *Randspur* für $1 \leq p < \infty$ und $\partial\Omega$ sei C^1 : $u \in W^{1,p}(\Omega) \Rightarrow u|_{\partial\Omega} \in L^p(\partial\Omega)$ mit
 $\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ (C ist unabhängig von u)
- *stetige Einbettungen* (auch für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ unbeschränkt):

1. $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $2 \leq q \leq \frac{2n}{n-2} =: 2^*$... kritischer Sobolev Exponent
(bzw. $2 \leq q < \infty$ für $n = 2$, $2 \leq q \leq \infty$ für $n = 1$)

$$\text{mit } \|u\|_{L^q} \leq C_q \|u\|_{H^1} \quad \forall u \in H^1(\Omega) \quad (5.1)$$

bzw. (Sobolev Ungleichung, Gagliardo-Nirenberg Ungleichung)

$$\|u\|_{L^q} \leq C_q \|u\|_{L^2}^{1-\alpha} \|u\|_{H^1}^\alpha \quad \text{mit } \alpha = \frac{n}{2} \left(1 - \frac{2}{q}\right) \quad (5.2)$$

2. $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B(\bar{\Omega})$, $p > n$ ($C_B(\bar{\Omega})$... stetige, beschränkte Funktionen auf $\bar{\Omega}$)

$$\text{mit } \|u\|_{C(\bar{\Omega})} \leq C_p \|u\|_{W^{1,p}} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

- kompakte Einbettungen (für Ω beschränkt):

1. Satz von Rellich-Kondrachov:

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 2 \leq q < \frac{2n}{n-2} \quad (2 \leq q < \infty \text{ für } n = 2, 2 \leq q \leq \infty \text{ für } n = 1) \quad (5.3)$$

2. $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

daher: $\|u_k\|_{W^{1,p}} \leq C \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists$ Teilfolge $\{u_{k_j}\}$ mit $u_{k_j} \rightarrow u$ in $L^p(\Omega)$ (vgl. PDGl-Skript, Satz 5.10).

Lemma 5.2. (Poincaré-Ungleichung): $\forall 1 \leq p < \infty : \exists c > 0$ (unabhängig von u), so dass

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Bew: [Ev1], vgl. PDGl-VL: Satz 4.11 für $p = 2$.

5.1.2 Schwache Konvergenz

Sei X BR $\Rightarrow X' = \{ \text{stetige, lin. Funktionale auf } X \}$ ist BR

Definition 5.3. Die Folge $\{u_k\} \subset X$ konvergiert schwach gegen $u \in X$ ($u_k \rightharpoonup u$), wenn

$$\langle v, u_k \rangle \rightarrow \langle v, u \rangle \quad \forall v \in X'.$$

Es gilt:

1. $u_k \rightarrow u \Rightarrow u_k \rightharpoonup u$

2. jede schwach konvergente Folge $(u_k \rightharpoonup u)$ ist beschränkt, und

$$\|u\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|.$$

(Beweis mit Banach-Steinhaus)

3. Sei $u_k \rightharpoonup u$ in X und $v_k \rightarrow v$ in X'

$$\Rightarrow \langle v_k, u_k \rangle \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \langle v, u \rangle$$

(wichtig für Konvergenz von quadrat. Termen in PDGl.)

4. Für $\dim X < \infty$ gilt: $u_k \rightarrow u \Leftrightarrow u_k \rightharpoonup u$

5. Sei K ein kompakter Operator auf X , dann gilt:

$$u_k \rightharpoonup u \Rightarrow Ku_k \rightarrow Ku$$

Bsp: $u_k(x) = \sin kx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ in $L^2(0, \pi)$, aber $\|u_k\|_{L^2(0, \pi)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \forall k \in \mathbb{N}$
(aber u_k konvergiert weder punktweise noch f.ü. !)

Bsp: weitere typische Beispiele mit $\|u_k\|_{L^2(\mathbb{R})} = \text{const}$, aber $u_k \rightharpoonup 0$ (also $\{u_k\}$ nicht kompakt):

- $u_k = k^{-1/2} \varphi(\frac{x}{k})$ mit $\varphi \in L^2 \cap L^\infty$. $u_k \rightarrow 0$ in $L^\infty(\mathbb{R})$... lokales Verschwinden der Folge
- $u_k = k^{1/2} \varphi(kx)$... Konzentration an $x = 0$ (*blow-up*)
- $u_k = \varphi(x - k)$... Translation

Achtung: Nichtlinearitäten sind i.A. *nicht stetig* bez. schwacher Konvergenz

Bsp: $u_k^2 = \sin^2 kx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \neq (w\text{-}\lim u_k)^2 = 0$;
aber: $w_k \rightarrow w$ in $L^{2p}(\Omega) \Rightarrow w_k^2 \rightarrow w^2$ in $L^p(\Omega)$

Satz 5.4. (*schwache Kompaktheit; Satz von Alaoglu*):

1. Sei X ein reflexiver BR (d.h. $X'' = X$), und $\{u_k\} \subset X$ beschränkt.
 $\Rightarrow \exists$ Teilfolge $\{u_{k_j}\} \subset \{u_k\}$ und $\exists u \in X$ mit $u_{k_j} \rightharpoonup u$.
2. Der BR X habe einen Prä-Dualraum, und $\{u_k\} \subset X$ beschränkt.
 $\Rightarrow \exists$ Teilfolge $\{u_{k_j}\} \subset \{u_k\}$ und $\exists u \in X$ mit $u_{k_j} \xrightarrow{*} u$.

5.1.3 Unterhalbstetigkeit

Motivation:

In ∞ -dim. Funktionenräumen sind "viele" Funktionale *nicht* stetig bez. glm. Konvergenz der Funktionen:

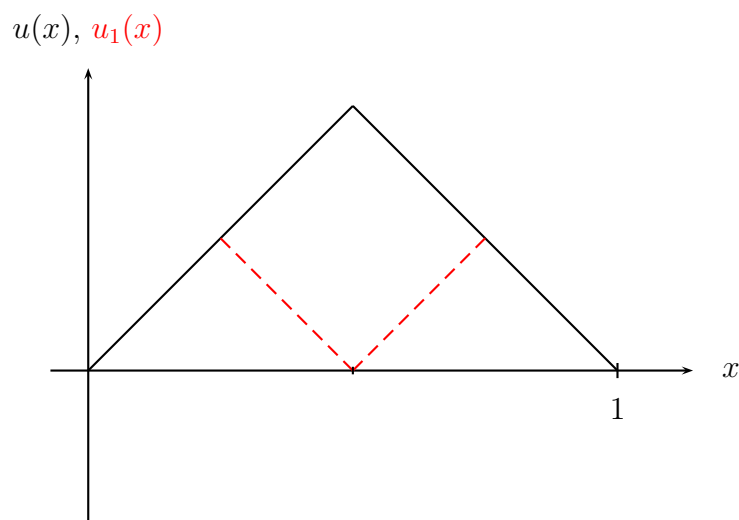
Beispiel 5.5. Länge von Zick-Zack-Kurven:

Sei $u(x) := \frac{1}{2} - |x - \frac{1}{2}|$, $x \in [0, 1]$ mit periodischer Fortsetzung auf $\mathbb{R}$.

$$u_k(x) := 2^{-k} u(2^k x), \quad x \in [0, 1], \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

$\Rightarrow$ Länge $\mathcal{L}(u_k) = \sqrt{2} \forall k$, aber glm. Limes: $u_\infty(x) \equiv 0$

$\Rightarrow 1 = \mathcal{L}(u_\infty) < \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{L}(u_k) = \sqrt{2}$



□

Definition 5.6. Sei X ein BR, $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine (nichtlineare) Abbildung, $\{u_k\} \subset X$ eine beliebige Folge. F heißt

1. unterhalbstetig, wenn

$$u_k \rightarrow u \text{ in } X \Rightarrow F(u) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} F(u_k);$$

2. schwach (folgen)stetig, wenn

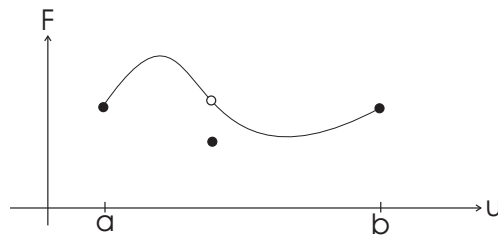
$$u_k \rightharpoonup u \text{ in } X \Rightarrow F(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(u_k).$$

(stärkere Eigenschaft als (Folgen-)Stetigkeit !)

3. schwach (folgen) unterhalbstetig (SUHS), wenn

$$u_k \rightharpoonup u \text{ in } X \Rightarrow F(u) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} F(u_k).$$

Bsp 1: $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ aus Graphik ist unterhalbstetig:



Bsp 2: Jedes *lineare* Funktional in X' ist schwach (folgen)stetig (ist trivial!).

Bsp 3: $F(u) = \|u\|_X$ ist SUHS (siehe Bem. (2) nach Def. 5.3).

$$u_k(x) := \sin kx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 = u(x) \text{ in } L^2(0, \pi)$$

$$0 = \|u\|_{L^2(0, \pi)} < \|u_k\|_{L^2(0, \pi)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Referenzen: [Ev1] §8.2, [Jo] §II.4.1-2

5.2 Direkte Methode der Variationsrechnung

Aufgabe: Seien $N = 1$ und Ω beschränkt mit Lipschitz-Rand. Finde, bzw. zeige Existenz einer globalen Minimalstelle von

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x), \nabla u(x)) dx, \quad U \rightarrow \mathbb{R}$$

für u in einer Funktionenmenge $U \neq \{\}$ mit der Dirichletrandbedingung $u|_{\partial\Omega} = g$ und gegebenem $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

- notwendige Bedingung für Lösbarkeit: $\mathcal{F}$ ist *nach unten beschränkt*; reicht aber nicht, vgl. $f(x) = e^{-x}$ auf $\mathbb{R}$

Strategie für Existenz eines Minimierers: (Programm von Tonelli ~1911)

4 Voraussetzungen an $\mathcal{F}$ und U :

1. $\mathcal{F}$ sei *nach unten beschränkt*

$$\Rightarrow \exists \inf_{u \in U} \mathcal{F}(u) =: m;$$

wähle *Minimalfolge* $\{u_k\} \subset U$ mit

$$\mathcal{F}(u_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} m.$$

→ 4 Fragen:

- (a) Ist $\{u_k\}$ beschränkt (vgl. e^{-x})?

- (b) Konvergiert $\{u_k\}$ gegen ein u (da U ∞ -dimensional)?
- (c) $u \in U$?
- (d) $\mathcal{F}(u) = m$?
- 2. eine *Kompaktheitsbedingung* (für (a)+(b)): Seien die Sub-Level-Sets $\{u \in U \mid \mathcal{F}(u) \leq \lambda\}$ *schwach kompakt*¹ in einem BR $X \supset U$ (z.B. durch Beschränktheit der Level-Sets in reflexivem BR).
 $\Rightarrow \exists$ schwach konvergente Teilfolge $\{u_{k_j}\}$ mit $u_{k_j} \rightharpoonup u$ in X .
- 3. Für (c): Für den Limes aus (2.) gelte $u \in U \subset X$; spezieller sei U *schwach abgeschlossen*².
- 4. Für (d): $\mathcal{F}$ sei *schwach unterhalbstetig* in X :

$$\Rightarrow \mathcal{F}(u) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_{k_j}) = \lim \mathcal{F}(u_{k_j}) = m; \text{ also: } \mathcal{F}(u) = m,$$

$\Rightarrow u$ ist Minimierer.

Bem: Beschränktheit und schwache Kompaktheit der Sub-Level-Sets $\{u \in U \mid \mathcal{F}(u) \leq \lambda\}$ in (2) ist leichter zu erhalten in grober (d.h. schwächerer) Topologie (da $\mathcal{F}(u) \|u\|_X$ "kontrollieren" muss); aber SUHS in (4) leichter in feiner (d.h. stärkerer) Topologie (da dann stärkere Voraussetzungen an $u_{k_j} \rightharpoonup u$ gelten) $\rightarrow$ gegenläufige Erfordernisse. Wahl von X oft schwierig.

konkrete Beispielklasse:

Annahmen an F (für ein beliebiges aber dann festes $q \in (1, \infty)$):

- $\exists \alpha > 0, \beta \geq 0$ mit

$$F(x, z, p) \geq \alpha |p|^q - \beta, \quad \forall x \in \Omega, z \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{Koerzivität von } F) \quad (\text{A2})$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(u) \geq \alpha \|\nabla u\|_{L^q(\Omega)}^q - \gamma \quad (\text{Koerzivität von } \mathcal{F}) \quad (5.4)$$

mit $\gamma = \beta|\Omega|$, und $\mathcal{F}(u) \rightarrow \infty$ für $\|\nabla u\|_{L^q} \rightarrow \infty$.

$\Rightarrow \mathcal{F}$ auf ganz U definiert mit Werten in $[-\gamma, +\infty]$.

Für obiges q wählen wir $X := W^{1,q}(\Omega)$, $U := \{u \in X \mid u|_{\partial\Omega} = g\}$ mit $1 < q < \infty$, und $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sei so gegeben, dass $U \neq \{\}$. [Dafür ist z.B. $g \in L^q(\partial\Omega)$ notwendig.]

Wegen *Koerzivität* (5.4) $\Rightarrow$ Minimalfolge $\{u_k\}$ ist beschränkt in $W^{1,q}(\Omega)$
 $\Rightarrow \exists$ schwach konvergente Teilfolge $\{u_{k_j}\}$ und ein $u \in U \subset W^{1,q}(\Omega)$ mit:

$$\begin{cases} u_{k_j} \rightarrow u & \text{in } L^q(\Omega), \\ \nabla u_{k_j} \rightharpoonup \nabla u & \text{in } L^q(\Omega, \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

$\rightarrow$ Problem: $\mathcal{F}$ nichtlinear & (nur) schwache Konvergenz von ∇u_{k_j} .

$\Rightarrow \mathcal{F} : W^{1,q}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ i.A. nicht schwach stetig.

¹D.h., jede beschränkte Menge hat eine schwach konvergente TF.

²D.h.: Sei $\{u_k\} \subset U$ mit $u_k \rightharpoonup u$. $\Rightarrow u \in U$.

- $\mathcal{F}$ sei schwach unterhalbstetig auf $W^{1,q}(\Omega)$ (A3)

(folgt z.B. aus Konvexität von F bez. p – siehe Satz 5.7)

Laut notwendiger LHB (Lemma 3.8(b) + Satz 3.9 für $N = 1$):

$\frac{\partial^2}{\partial p^2} F(x, u, \nabla u) \geq 0$ (d.h. lokale Konvexität bez. p an $u(x)$) notwendig für Minimum an u .

Konvexität liefert auch SUHS:

Satz 5.7. (Tonelli) Sei F glatt, nach unten beschränkt, und $F(x, z, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konvex $\forall x \in \Omega, z \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \mathcal{F}$ ist schwach unterhalbstetig auf $W^{1,q}(\Omega)$, $1 < q < \infty$.

Beweis.

1. Sei $u_k \rightharpoonup u$ in $W^{1,q}(\Omega)$.

Definiere $l := \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_k) > -\infty$, bzw. $l = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_{k_j})$ für eine Teilfolge.
Sei $l < \infty$, sonst Folgerung trivial. z.z.: $\mathcal{F}(u) \leq l$.

wegen kompakter Einbettung: $u_{k_j} \rightarrow u$ in $L^q(\Omega)$.

$\Rightarrow$ für (ev. weitere) Teilfolge gilt $u_{k_j} \rightarrow u$ f.ü. in Ω .

(lt. Korollar von Weyl zu Satz von Riesz-Fisher {d.h. L^1 ist vollständig}, [RS1] §I.3)

2. lt. Satz von Egoroff:

Da $u_{k_j} \rightarrow u$ f.ü. in $\Omega \Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \exists$ meßbare Menge $R_\varepsilon \subset \Omega$ mit $|\Omega - R_\varepsilon| \leq \varepsilon$ und

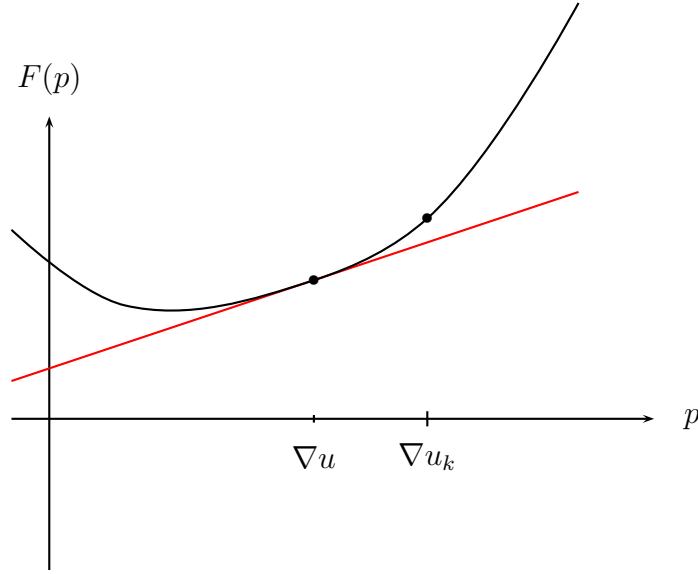
$$u_{k_j} \rightarrow u \text{ glm. auf } R_\varepsilon \quad (5.5)$$

- def. $S_\varepsilon := \{x \in \Omega \mid |u(x)| + |\nabla u(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon}\}$

$$\Rightarrow |\Omega - S_\varepsilon| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

- def. $T_\varepsilon := R_\varepsilon \cap S_\varepsilon \Rightarrow |\Omega - T_\varepsilon| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$

3. da F nach unten beschränkt, sei oBdA $F \geq 0$ (andernfalls betrachte $\tilde{F} = F + \beta \geq 0$)



$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \mathcal{F}(u_k) &= \int_{\Omega} F(x, u_k, \nabla u_k) dx \stackrel{F \geq 0}{\geq} \int_{T_\varepsilon} F(x, u_k, \nabla u_k) dx \\
 &\stackrel{F \text{ konvex}}{\geq} \int_{T_\varepsilon} \underbrace{F(x, u_k, \overbrace{\nabla u}^{|\cdot| \leq \frac{1}{\varepsilon}})}_{\text{konv. glm. auf } T_\varepsilon} dx + \int_{T_\varepsilon} \underbrace{\nabla_p F(x, u_k, \nabla u)}_{\text{konv. glm. auf } T_\varepsilon} \cdot (\nabla u_k - \nabla u) dx \\
 k = k_j &\rightarrow \infty \quad \quad \quad \downarrow \text{ wegen (5.5) } \quad \downarrow \\
 \Rightarrow l = \lim \mathcal{F}(u_k) &\geq \int_{T_\varepsilon} F(x, u, \nabla u) dx + 0
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

da: $\nabla_p F(x, u_k, \nabla u) \rightarrow \nabla_p F(x, u, \nabla u)$ glm. auf T_ε , also in $L^q(T_\varepsilon)$; und $\nabla u_k \rightharpoonup \nabla u$ in $L^q(T_\varepsilon)$.

Trick:

- $F(x, u_k, \nabla u_k)$ ist *nichtlinear* in ∇u_k mit $\nabla u_k \rightharpoonup \nabla u$ in $L^q \Rightarrow$ keine Konvergenzinformation.
- (5.6) (=Tangente an der Stelle ∇u liegt „unter“ F , da F konvex) ist *linear* in $\nabla u_k \Rightarrow$ Grenzübergang in linearer unterer Schranke möglich.

also $\forall \varepsilon > 0: l \geq \int_{T_\varepsilon} F(x, u, \nabla u) dx = \int_{\Omega} F_\varepsilon(x, u, \nabla u) dx$.

- mit monotoner Konvergenz für $F_\varepsilon(x) := F(x, u, \nabla u) \chi_{T_\varepsilon}(x) \geq 0$, da $T_\varepsilon \nearrow \Omega$:

$$l \geq \int_{\Omega} F(x, u, \nabla u) dx = \mathcal{F}(u).$$

■

Bemerkung 5.8. 1. Satz 5.7 gilt analog für $N > 1$: [Ev1] §8.2.4

2. Umkehrung von Satz 5.7: Sei $n = 1$ (also $\Omega = I$) und $N \in \mathbb{N}$. Sei $\mathcal{F}$ SUHS auf $W^{1,q}(I)$ für ein $q \in (1, \infty)$.
 $\Rightarrow F(x, z, \cdot) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ist konvex $\forall (x, z) \in \bar{I} \times \mathbb{R}^N$ (Beweis: [vdM] §4).

Satz 5.9. (*Existenz von Minimierern*)

Sei F glatt, koerziv (d.h. (A2)) und konvex in p und $U \neq \{\}$.

$\Rightarrow \exists u \in U$ mit $\mathcal{F}(u) = \min_{w \in U} \mathcal{F}(w)$.

Beweis.

1. def. $m := \inf_{w \in U} \mathcal{F}(w) < \infty$ (sonst Aussage trivial).
 Sei $\{u_k\} \subset U$ Minimalfolge:

$$\mathcal{F}(u_k) \rightarrow m. \quad (5.7)$$

2. Beschränktheit von $\{u_k\}$:

oBdA sei $\beta = 0$ in (A2), sonst betrachte $\tilde{F} = F + \beta$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(w) \geq \alpha \|\nabla w\|_{L^q(\Omega)}^q$$

Mit (5.7) folgt:

$$\sup_k \|\nabla u_k\|_{L^q(\Omega)} < \infty \quad (5.8)$$

- wähle $w \in U$ beliebig $\Rightarrow u_k - w \in W_0^{1,q}(\Omega)$

$\Rightarrow$ (mit Poincaré-Ungleichung):

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{L^q} &\leq \|u_k - w\|_{L^q} + \|w\|_{L^q} \\ &\leq c \|\nabla u_k - \nabla w\|_{L^q} + c \stackrel{(5.8)}{\leq} c \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \{u_k\}$ beschränkt in $W^{1,q}(\Omega)$

3. Laut Satz von Alaoglu: $\exists$ Teilfolge mit $u_{k_j} \rightharpoonup u$ in $W^{1,q}(\Omega)$.

z.z.: $u \in U$, d.h. $u|_{\partial\Omega} = g$.

$u_{k_j} - w \in W_0^{1,q}(\Omega)$... abgeschlossener Teilraum von $W^{1,q}(\Omega)$, und auch *schwach abgeschlossen* (da laut Satz von Mazur: Eine konvexe, abgeschlossene Teilmenge vom BR X ist *schwach abgeschlossen*.)

$$\Rightarrow u - w \in W_0^{1,q}(\Omega) \Rightarrow u|_{\partial\Omega} = w|_{\partial\Omega} = g$$

4. Laut Satz 5.7: $\mathcal{F}$ ist SUHS, d.h. $\mathcal{F}(u) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_{k_j}) = m$
 • Da $u \in U : \mathcal{F}(u) = m = \min_{w \in U} \mathcal{F}(w)$.

■

Eindeutigkeit des Minimierers, falls F (nur) *strikt konvex* in p (aber nicht notwendigerweise glm. konvex, d.h. $\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \geq \Theta > 0$) ist:

Satz 5.10. F sei stetig und erfülle $\forall x \in \Omega :$

$$F(x, (1-\lambda)z_1 + \lambda z_2, (1-\lambda)p_1 + \lambda p_2) < (1-\lambda)F(x, z_1, p_1) + \lambda F(x, z_2, p_2) \quad (5.9)$$

$$\forall \lambda \in (0, 1); \forall (z_1, p_1), (z_2, p_2) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ mit } p_1 \neq p_2.$$

$\Rightarrow$ Ein Minimierer $u \in U = \{u \in W^{1,q}(\Omega) \mid u|_{\partial\Omega} = g\}$ von $\mathcal{F}$ ist *eindeutig*.

Beweis. Seien $u_1 \neq u_2 \in U$ Minimierer mit $\mathcal{F}(u_1) = \mathcal{F}(u_2) = m$.

$\Rightarrow \exists \Omega_1 \subset \Omega$ mit $\mu(\Omega_1) > 0$, so dass $\nabla u_1(x) \neq \nabla u_2(x)$ für f.a. $x \in \Omega_1$ (andernfalls wäre $u_1 = u_2$ wegen $u_1|_{\partial\Omega} = u_2|_{\partial\Omega}$).

Auf Ω_1 gilt in (5.9) f.ü. die strikte Ungleichung, auf $\Omega_2 := \Omega \setminus \Omega_1$ aber nur “ $\leq$ ”:

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}((1-\lambda)u_1 + \lambda u_2) \\ &= \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} F(x, (1-\lambda)u_1(x) + \lambda u_2(x), (1-\lambda)\nabla u_1(x) + \lambda \nabla u_2(x)) dx \\ &< (1-\lambda) \int_{\Omega} F(x, u_1(x), \nabla u_1(x)) dx + \lambda \int_{\Omega} F(x, u_2(x), \nabla u_2(x)) dx = m \end{aligned}$$

Widerspruch zu “ $u_{1,2}$ sind Minimierer,” da $(1-\lambda)u_1 + \lambda u_2 \in U$.

■

Beispiel 5.11.

$$\mathcal{F}(u) := \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + fu \, dx \xrightarrow{!} \min \text{ in } H_0^1(\Omega) \quad \text{mit } f \in L^2(\Omega) \text{ geg.}$$

[vgl. (4.19) für stationäres Stokes-Problem; dort $u \in \mathbb{R}^3$]

$$\mathcal{F}(u) \stackrel{\text{Poincaré}}{\geq} C \|u\|_{H_0^1}^2 - \|f\|_{L^2} \|u\|_{H_0^1} \geq -\frac{\|f\|_{L^2}^2}{4C},$$

also $\mathcal{F}$ nach unten beschränkt; Minimalfolge beschränkt in $H_0^1(\Omega) \Rightarrow u_{k_j} \rightharpoonup u$ in $H_0^1(\Omega)$.
 $F(x, z, p) = |p|^2 + f(x)z$ erfüllt VSen von Satz 5.7 *nicht* (da $f(x)z$ nicht nach unten beschränkt);

aber $\mathcal{F}(u)$ SUHS, da $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$ SUHS laut Satz 5.7 (bzw. $= \|u\|_{H_0^1}^2$) und $\int_{\Omega} fu \, dx$ schwach stetig.

Eindeutigkeit des Minimierers laut Satz 5.10.

□

Beispiel 5.12. $F(p) := |p|^q$ ($q > 1$ fest) ist strikt konvex im Sinn von (5.9), erfüllt Koerzitivität (A2). $\Rightarrow \mathcal{F}$ hat eindeutigen Minimierer in $U = \{u \in W^{1,q}(\Omega) \mid u|_{\partial\Omega} = g\}$ falls $U \neq \{\}$.

zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\begin{cases} -\operatorname{div} a(\nabla u) = 0 & , \quad x \in \Omega \\ u = g & , \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (5.10)$$

mit $a(p) := \nabla F(p) = q|p|^{q-2}p$.

(5.10) ist degenerierte elliptische Gleichung für $q > 2$.

Während in §2 die Euler-Lagrange-Gleichung für ein gegebenes Variationsproblem hergeleitet wurde, kann auch die umgekehrte Perspektive relevant sein: Zur Existenzanalyse der nichtlinearen PDE (5.10) bietet sich die Umformulierung als Variationsproblem an. $\square$

Referenzen: [Ev1] §8.2, [St] §I.1, [Gr] §3, [vdM] §4-5, [Jo] §II.4.1-2

5.3 Minimalflächenproblem

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt, $\partial\Omega$ glatt. Minimiere

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} \, dx \quad (5.11)$$

mit $u|_{\partial\Omega} = g$.

Probleme:

- $\mathcal{F}$ nicht koerziv in $W^{1,q}(\Omega)$, $1 < q < \infty$, da $F(p) = \sqrt{1 + |p|^2}$ nur linear in $|p|$ wächst.
- $\mathcal{F}$ ist koerziv in $W^{1,1}(\Omega)$, aber $W^{1,1}(\Omega)$ ist nicht reflexiv (nicht einmal ein Dualraum) $\rightarrow$ Satz 5.4 von Alaoglu nicht anwendbar
- für Ω nicht konvex hat (5.11) nicht immer eine klassische Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.
- Problem: Minimalflächengleichung (1.1) zwar glm. elliptisch, aber Koeffizientenmatrix des Hauptteils

$$A = \begin{pmatrix} 1 + u_{x_2}^2 & -u_{x_1}u_{x_2} \\ -u_{x_1}u_{x_2} & 1 + u_{x_1}^2 \end{pmatrix} \geq I$$

kann unbeschränkt sein (z.B. bei Ω mit einspringender Ecke)

Bem: Für Ω konvex und g mit „beschränkter Steigung“ (in geeignetem Sinn) kann man zeigen ([Ze] §52):

(5.11) hat einen Minimierer $u \in W^{1,\infty}(\Omega) = C^{0,1}(\bar{\Omega}) \Rightarrow$ betrachte folgendes leicht *modifiziertes Problem*:

Satz 5.13. *Sei (für $R > 0$ fest)*

$$\tilde{U} := \{u \in W^{1,\infty}(\Omega) \mid \|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq R; u = g \text{ auf } \partial\Omega\} \neq \{\}$$

$$\Rightarrow \exists u_R \in \tilde{U} \text{ mit } \mathcal{F}(u_R) = \min_{w \in \tilde{U}} \mathcal{F}(w)$$

Beweis. 1. da $\mathcal{F}(u) \geq 0$: wähle Minimalfolge $\{u_k\} \subset \tilde{U}$, also $\mathcal{F}(u_k) \rightarrow m$. Das alleine impliziert aber nicht die Beschränktheit von $\{u_k\}$!

- laut Problemmodifikation:

$$\|u_k\|_{C^{0,1}(\Omega)} := \max_{x \in \bar{\Omega}} |u_k(x)| + \text{Lip}(u_k) = \|u_k\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq R,$$

$\{u_k\}$ also *gleichgradig stetig* auf $\bar{\Omega}$.

- laut *Satz von Arzelà-Ascoli*:

$\exists$ Teilfolge $\{u_{k_j}\}$, die auf $\bar{\Omega}$ gleichmäßig gegen ein $u_R \in \tilde{U}$ konvergiert (wegen der Gleichmäßigkeit erfüllt u_R auch die RB $u_R = g$).

2. $\|u_k\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|u_k\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq CR \quad \forall k \in \mathbb{N}$,
 $\Rightarrow \exists$ (weitere) Teilfolge mit $u_{k_j} \rightharpoonup u_R$ in $H^1(\Omega)$.

$$F(p) = \sqrt{1 + |p|^2} \geq 0, \text{ konvex}$$

- lt. Satz 5.7 (Tonelli):

$$\mathcal{F}(u_R) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_{k_j}) = m$$

$\Rightarrow u_R$ ist Minimalstelle.

■

Bem:

1. Die Lösung des modifizierten Problems in $\tilde{U}$ ist laut Satz 5.10 eindeutig.
2. Man kann zeigen [Hu]: Falls $\|u_R\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} < R$, dann ist u_R sogar Minimalstelle auf $U := \{u \in W^{1,\infty}(\Omega) \mid u = g \text{ auf } \partial\Omega\}$.

Existenzresultat für allgemeinere Ω (also nicht notwendigerweise konvex) [Hu]:

Satz 5.14. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^2$, und $\partial\Omega$ habe nicht negative mittlere Krümmung. Sei $g \in C^2(\bar{\Omega})$. $\Rightarrow \exists$ schwache Lösung $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ der Euler-Lagrange Gleichung

$$\int_{\Omega} \frac{\nabla u \cdot \nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} dx = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega) \quad (5.12)$$

mit $u = g$ auf $\partial\Omega$.

Bem: Die Krümmungsbedingung ist hinreichend und notwendig dafür, dass (5.12) $\forall g \in C^2(\bar{\Omega})$ lösbar ist.

Beispiel 5.15. Sei $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} < |x| < 1\}$; an $|x| = \frac{1}{2}$ ist also die Krümmung negativ. Sei

$$g(x) = \begin{cases} -\alpha < 0, & |x| = \frac{1}{2} \\ 0, & |x| = 1. \end{cases}$$

Beh: Für α hinreichend groß gibt es keine Minimalstelle.

Bew, dass es keine Minimalstelle $u = u(r)$ gibt:

Die radialsymmetrische EL-Gleichung

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r u'(r)}{\sqrt{1 + u'(r)^2}} \right) = 0, \quad \frac{1}{2} < r < 1$$

liefert

$$\frac{r u'(r)}{\sqrt{1 + u'(r)^2}} = c.$$

Es gilt $c > 0$, da $u'(r_0) > 0$ für ein r_0 , und damit auch $u'(r) > 0$ auf $(\frac{1}{2}, 1)$.

$$r u'(r) = c \sqrt{1 + u'(r)^2} > c u'(r)$$

impliziert $r > c \quad \forall r \in (\frac{1}{2}, 1) \Rightarrow 0 < c \leq \frac{1}{2}$. Auflösen nach u' liefert

$$u' = \frac{c}{\sqrt{r^2 - c^2}} \quad \text{mit der Randbedingung } u(1) = 0.$$

$$\Rightarrow u_c(r) = c \ln \frac{r + \sqrt{r^2 - c^2}}{1 + \sqrt{1 - c^2}}$$

$$\Rightarrow 0 > u_c\left(\frac{1}{2}\right) \geq u_{0.5}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2 + \sqrt{3}} =: -\alpha_0$$

Die RB an $r = \frac{1}{2}$ kann also für α groß nicht erfüllt werden.

anschauliche Begründung: $u'_{0.5}(\frac{1}{2}) = \infty \Rightarrow$ Für $\alpha > \alpha_0$ verläuft die “Lösungsfläche” zunächst vertikal entlang des Zylinders $r = \frac{1}{2}$ bis zur Höhe $u = -\alpha_0$. u ist dann aber keine Funktion mehr. $\square$

Referenzen: [Ze] Problem 52.1; [Hu]

5.4 Polykonvexität

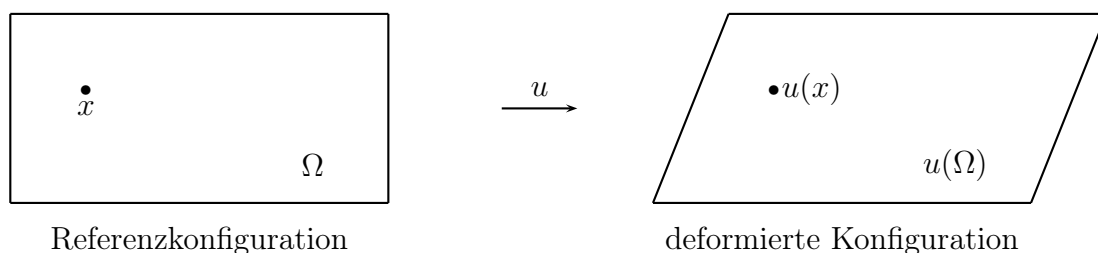
- LHB (3.5) ist notwendige Bedingung für Minimum an u (Lemma 3.8b + Satz 3.9);
- $N = 1$ oder $n = 1$: notwendige LHB $\Leftrightarrow F$ ist an u konvex in p (Bem. 3.10);
- $N > 1$ und $n > 1$: notwendige LHB viel schwächer als Konvexität von F in p ; diese war VS für Satz von Tonelli.
 $\Rightarrow$ SUHS von $\mathcal{F}$ für $N > 1$ auch unter schwächeren Bed. als p -Konvexität möglich.

Anwendung: nichtlin. Elastizität

$\Omega \subset \mathbb{R}^3 \dots$ (beschränktes) Gebiet des unverzerrten Körpers, “Referenzkonfiguration”

$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \dots$ *Deformationsfeld* beschreibt Auslenkung jedes inneren Körperpunktes $x \in \Omega$ zur neuen Position $u(x)$. u muss injektiv sein; werden wir aber nicht benutzen.

Randbedingung: $u|_{\partial\Omega} = g \dots$ geg.: Deformation der Oberfläche bewirkt Deformation des Inneren.



- Jacobi-Determinante $\det \underbrace{Du(x)}_{\in \mathbb{R}^{3 \times 3}}$ gibt *lokale Volumensänderung* an; $\det = 1$: keine Änderung.

Annahme: $\det Du(x) > 0$, d.h. keine Spiegelungsdeformation (da physikalisch sinnlos)

- lineare Elastizitätstheorie: Spannung(stensor) hängt linear vom Deformationsgradienten Du ab (vgl. Hooksches Gesetz); Deformationsenergie quadratisch in Du .
- (nichtlineare) *hyperelastische Materiale*: $\exists$ Funktion $F = F(x, Du(x))$ zur Beschreibung der *gespeicherten Energiedichte*

$\rightarrow$ Gleichgewichtszustand ist Minimum des Energiefunktional

$$\mathcal{F}(u) := \int_{\Omega} F(x, Du(x)) dx, \quad u \in U.$$

(Annahme: keine thermischen oder “Memory-Effekte” der Deformation)

- Extrem große/kleine Volumsverzerrungen benötigen ∞ viel Energie $\Rightarrow$

$$F \rightarrow \infty \quad \text{für } \det Du \rightarrow 0 \text{ oder } \det Du \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow F$ ist *nicht* konvex in Du ($\rightarrow$ Übung), aber *polykonvex* (geeignete VS für viele elastische Anwendungen).

Definition 5.16. Sei $n = N$ und $F = F(x, z, p, \det p) : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ glatt mit:

$$\text{die Abbildung } (p, r) \mapsto F(x, z, p, r) \text{ ist konvex } \forall x \in \Omega, \forall z \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{A4})$$

Dann heißt F polykonvex. [Das ist ein schwächerer Begriff als p -konvex.]

Lemma 5.17 (schwache Stetigkeit von Determinanten). Sei $n < q < \infty$ und $u_k \rightharpoonup u$ in $W^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt.

$$\Rightarrow \det Du_k \rightharpoonup \det Du \quad \text{in } L^{\frac{q}{n}}(\Omega).$$

Dieses Resultat ist bemerkenswert, da $\det$ ja n -fache Produkte enthält, Nichtlinearitäten aber i.A. nicht stetig bez. schwacher Konvergenz sind.

Beweis. Schritt 1:

Notation: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die *Cofaktor-Matrix* $\text{cof } A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat die Elemente

$$(\text{cof } A)_{ij} := (-1)^{i+j} \det(A^{ij}),$$

wobei $A^{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ durch Streichen der i -ten Zeile und j -ten Spalte von A entsteht. Es gilt

$$(\det A)I = A(\text{cof } A)^T. \quad (5.13)$$

Sei $w \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Da

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (\text{cof } Dw)_{ij} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (\rightarrow \text{Übung}) \quad , \quad (5.14)$$

gilt $\forall i = 1, \dots, n$:

$$\det Dw \stackrel{(5.13)}{=} \sum_{j=1}^n \frac{\partial w_i}{\partial x_j} (\text{cof } Dw)_{ij} \stackrel{(5.14)}{=} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} [w_i (\text{cof } Dw)_{ij}]. \quad (5.15)$$

→ Jacobi-Determinante $\det Dw$ hat Divergenz-Struktur! In der Anwendung $w := u_k$ gilt:
 Der 1. Faktor des Vektorfeldes $[w_i(\operatorname{cof} Dw)_{ij}]$ hat keine Ableitung (→ starke Konvergenz),
 der 2. Faktor ist ein $(n-1)$ -faches Produkt mit Determinanten-Struktur.

Für $v \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt:

$$\int_{\Omega} v \det Dw \, dx = - \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_j} [w_i(\operatorname{cof} Dw)_{ij}] \, dx \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (5.16)$$

Schritt 2:

lt. VS: $u_k \rightharpoonup u$ in $W^{1,q} \hookrightarrow L^q \hookrightarrow L^s$,

$$s := \frac{q}{1+q-n} < q.$$

⇒ $u_k \rightarrow u$ in $L^s(\Omega)$

Schritt 3:

Induktion für schwache Konvergenz der $m \times m$ -Subdeterminanten:

- $m=1$: lt. VS gilt ja: $(Du_k)_{ij} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (Du)_{ij}$ in $L^q(\Omega) \quad \forall 1 \leq i, j \leq n. \quad \checkmark$
- z.B. Schritt $m = n-1 \rightarrow n$:

Also gelte $\forall m \times m$ -Subdeterminanten M_k von Du_k :

$$M_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} M \text{ in } L^{\frac{q}{m}}(\Omega),$$

$$\text{also: } \operatorname{cof} Du_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \operatorname{cof} Du \text{ in } L^{s'}(\Omega), s' = \frac{q}{n-1}$$

- Sei $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Durch Standardapproximation von u_k durch $w \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ in (5.16) gilt $\forall i = 1, \dots, n; k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v \det Du_k \, dx &\stackrel{(5.16)}{=} - \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x_j} (u_k)_i}_{\rightarrow v_{x_j} u_i \text{ in } L^s} \underbrace{(\operatorname{cof} Du_k)_{ij}}_{\rightarrow \operatorname{cof} Du \text{ in } L^{s'}} \, dx \\ &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} - \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_j} u_i (\operatorname{cof} Du)_{ij} \, dx \\ &\stackrel{(5.16)}{=} \int_{\Omega} v \det Du \, dx \end{aligned}$$

$$\text{also: } \det Du_k \rightarrow \det Du \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega) \quad (5.17)$$

- Laut VS: $\det Du \in L^{\frac{q}{n}}(\Omega)$; $\{Du_k\}$ glm. beschränkt in $L^q(\Omega)$, da schwach konvergent $\Rightarrow \{\det Du_k\}$ glm. beschränkt in $L^{\frac{q}{n}}(\Omega) \Rightarrow \exists$ schwach konvergente Teilfolge (aber ev. mit “falschem” Limes).
Wegen (5.17): $\det Du_k \rightharpoonup \det Du$ in $L^{\frac{q}{n}}(\Omega)$. ■

Bemerkung 5.18. Lemma 5.17 liefert schwache Konvergenz von nicht-linearen Termen (n -fache Produkte in $\det Du$), ermöglicht durch die Divergenz-Struktur von $\det Du$. Das ist Anwendung der *kompensierten Kompaktheits-Methode* von Murat, Tartar [Ta].

Satz 5.19. Sei $n < q < \infty$. Sei F glatt, nach unten beschränkt und polykonvex. $\Rightarrow \mathcal{F}$ ist SUHS in $W^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Beweis. Idee:

Sei $u_k \rightharpoonup u$ in $W^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Lt. Lemma 5.17:

$$\det Du_k \rightharpoonup \det Du \text{ in } L^{\frac{q}{n}}(\Omega).$$

analog zu Satz 5.7 (von Tonelli):

Sei oBdA $F \geq 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u_k) &= \int_{\Omega} F(x, u_k, Du_k, \det Du_k) dx \stackrel{F \geq 0}{\geq} \int_{T_\varepsilon} F(x, u_k, Du_k, \det Du_k) dx \\ &\stackrel{F \text{ polykonvex}}{\geq} \int_{T_\varepsilon} F(x, u_k, Du, \det Du) dx \\ &\quad + \int_{T_\varepsilon} \underbrace{\frac{\partial F}{\partial p}(x, u_k, Du, \det Du)}_{\text{konv. glm. auf } T_\varepsilon} : \underbrace{(Du_k - Du)}_{\rightarrow 0 \text{ in } L^q} dx \\ &\quad + \int_{T_\varepsilon} \underbrace{\frac{\partial F}{\partial r}(x, u_k, Du, \det Du)}_{\text{konv. glm. auf } T_\varepsilon} \underbrace{(\det Du_k - \det Du)}_{\rightarrow 0 \text{ in } L^{q/n}} dx. \end{aligned}$$

Letzte 2 Integrale $\rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. ■

Folgerung 5.20. Sei $n < q < \infty$. F erfülle die Koerzivitätsungleichung (A2) und sei polykonvex, glatt. Sei $\{\cdot\} \neq U \subset W^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

$$\Rightarrow \exists u \in U \text{ mit } \mathcal{F}(u) = \min_{w \in U} \mathcal{F}(w).$$

Referenzen: [St] §I.3, [Ev1] §8.2.4, [RR] §10.2.1, [Ev2]

5.5 Hindernisprobleme / Variationsungleichungen

Beispiel 5.21. Variationsungleichung für skalare Funktion:

ges: Minima der glatten Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

→ 3 Möglichkeiten:

- (i) $f'(x_0) = 0$, für $x_0 \in (a, b)$;
- (ii) $f'(x_0) \geq 0$, für $x_0 = a$;
- (iii) $f'(x_0) \leq 0$, für $x_0 = b$.

Zusammenfassung:

$$f'(x_0)(x - x_0) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad (5.18)$$

Beachte: Für *innere Punkte* $x_0 \in (a, b)$ gilt: $(x - x_0)$ kann beide Vorzeichen haben, und daher: (5.18) $\Rightarrow f'(x_0) = 0$. $\square$

- Sei $f \in L^2(\Omega)$. Lt. PDGL-VL (+ Bsp. 5.11): $u \in H_0^1(\Omega)$ ist (eindeutiger) Minimierer von

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - f(x)u \, dx$$

$\Leftrightarrow u \in H_0^1(\Omega)$ ist (eindeutige) Lösung der *Variationsgleichung*

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (5.19)$$

also schwache Lösung der Euler-Lagrange Gleichung:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & , \quad \Omega \\ u = 0 & , \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

- Wir betrachten nun ein konkretes Beispiel für ein *Hindernisproblem*:

$$\mathcal{F}(u) := \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - f u \, dx \xrightarrow{!} \min \quad (5.20)$$

in $U := \{u \in H_0^1(\Omega) \mid u \geq h \text{ f.ü. in } \Omega\}$, mit gegebenem, glatten *Hindernis* $h : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei beschränkt mit $\partial\Omega$ glatt. U ist dann konvex und (schwach) abgeschlossen.

Satz 5.22. Sei $f \in L^2(\Omega)$ und $U \neq \{\}$ $\Rightarrow$

1. (5.20) hat eine eindeutige Lösung $u \in U$,

2. u erfüllt die Variationsungleichung

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (w - u) \, dx \geq \int_{\Omega} f(w - u) \, dx \quad \forall w \in U. \quad (5.21)$$

3. (5.21) hat eine eindeutige Lösung $u \in U$. Die Abbildung $f \mapsto u$ ist Lipschitz, d.h. $\exists c > 0$ mit

$$\|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c \|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)}. \quad (5.22)$$

Bem: vgl. (5.22) mit Lösungsabschätzung für $-\Delta u = f$ (siehe PDGL-VL).

Beweis.

1. Existenz und Eindeutigkeit ist analog zu Bsp. 5.11 (dort ohne Hindernis).
Schwache Abgeschlossenheit von U :

$$u_k \rightharpoonup u \text{ in } H_0^1(\Omega) \Rightarrow u_k \rightarrow u \text{ in } L^2(\Omega);$$

$$u_k \geq h \text{ f.ü.} \Rightarrow u \geq h \text{ f.ü.} \Rightarrow u \in U.$$

2. a) sei $w \in U$ beliebig
 $\Rightarrow u + \tau(w - u) \in U \quad \forall 0 \leq \tau \leq 1$ (da U konvex)

Für $\phi(\tau) := \mathcal{F}(u + \tau(w - u))$ gilt:

$$\phi(0) \leq \phi(\tau) \quad \forall 0 \leq \tau \leq 1; \text{ also } \phi'(0) \geq 0$$

Bem: Wegen der NB $u \geq h$ wurden hier nur *einseitige Variationen* von u verwendet!

b) sei nun $0 < \tau \leq 1$:

$$\frac{\phi(\tau) - \phi(0)}{\tau} = \dots = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (w - u) + \frac{\tau}{2} |\nabla (w - u)|^2 - f(w - u) \, dx.$$

Mit $\tau \rightarrow 0$ folgt:

$$0 \leq \phi'(0) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (w - u) - f(w - u) \, dx$$

3. Seien $(u_i, f_i); i = 1, 2$ Lösungen von (5.21).

Wähle $w = u_2$ für u_1 -Ungleichung:

$$\int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla (u_2 - u_1) \, dx \geq \int_{\Omega} f_1(u_2 - u_1) \, dx$$

Index-Vertauschung, addieren

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{c} \|u_1 - u_2\|_{H_0^1}^2 &\stackrel{\text{Poincaré}}{\leq} \int_{\Omega} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} (f_1 - f_2)(u_1 - u_2) dx \\ &\leq \|f_1 - f_2\|_{L^2} \|u_1 - u_2\|_{H_0^1} \end{aligned}$$

■

Bemerkung 5.23.

1. Typischerweise gibt es eine (relativ abgeschlossene) *Übereinstimmungsmenge* $C := \{x \in \Omega \mid u(x) = h(x)\}$ mit dem *freien Rand* $\partial C \cap \Omega$.

2. (5.21) ist schwache Formulierung von $u \geq h$, $-\Delta u \geq f$, f.ü. in Ω ; $u = 0$ auf $\partial\Omega$.

Begründung: Sei $v \in C_0^\infty(\Omega)$, $v \geq 0$, $0 < \tau \leq 1$. Verwende $w := u + \tau v \in U$ in (5.21).

3. Auf der (offenen) Menge $O := \{x \in \Omega \mid u(x) > h(x)\}^3$ gilt $-\Delta u = f$, f.ü.; d.h. die Nebenbedingung $u \geq h$ „wirkt“ auf O nicht.

Begründung: Für $\partial\Omega$ glatt gilt $u \in H^2(\Omega)$, siehe [KS]. Sei $v \in C_0^\infty(O)$ fest.

$$\Rightarrow \text{für } |\tau| \text{ klein gilt: } w := u + \tau v \geq h; \text{ also } w \in U$$

$$(5.21) \Rightarrow \tau \int_O (\nabla u \cdot \nabla v - f v) dx \geq 0, \text{ für } \tau \text{ pos. und neg.}!$$

$$\Rightarrow \int_O \nabla u \cdot \nabla v - f v dx = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(O).$$

„Penalty“-Methode für Hindernisprobleme:

Problemstellung: Während die Variationsgleichung (5.19) ein geeigneter Ausgangspunkt für eine numerische Lösung (z.B. mittels FEM) ist, trifft das auf die Variationsungleichung (5.21) nicht zu.

Ziel: Approximation der Lösung $u \in U := \{H_0^1(\Omega) \mid u \geq 0\}$ von (5.20) durch nichtlineare elliptische Probleme ($\varepsilon > 0$, $H \dots$ Heaviside Fkt.):

$$\begin{aligned} -\Delta u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon H(-u_\varepsilon) &= f, & \Omega \\ u_\varepsilon &= 0, & \partial\Omega \end{aligned} \tag{5.23}$$

Der Term $\frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon H(-u_\varepsilon)$ „bestraft“ das lokale Verhalten $u_\varepsilon(x) < 0$.

³Die Ungleichung $u(x) > h(x)$ „im H^1 -Sinn“ ist in [KS, Def II.6.7] durch lokale Gleichmäßigkeit (also um jedes $x \in O$) definiert. Diese Gleichmäßigkeit gilt wegen der endlichen Teilüberdeckbarkeit (Satz von Heine-Borel) auch $\forall K \subset\subset O$.

Satz 5.24. Sei $f \in L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit glattem Rand. Sei $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ die (eindeutige) schwache Lösung von (5.23).⁴

$\Rightarrow u_\varepsilon \rightharpoonup u$ in $H_0^1(\Omega)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$, wobei u die Lösung von (5.21) ist.

Beweis.

1. a-priori Abschätzungen:

multipliziere (5.23) mit u_ε ; $\int_\Omega \dots dx$

$$\Rightarrow \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon^-} u_\varepsilon^2 dx = \int_\Omega f u_\varepsilon dx \quad (5.24)$$

mit $\Omega_\varepsilon^- := \{x \in \Omega \mid u_\varepsilon(x) \leq 0\}$

a)

$$\Rightarrow \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \stackrel{\text{Poincaré}}{\leq} C \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_\Omega f u_\varepsilon dx \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\text{aus (5.24): } \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall \varepsilon > 0$$

also: $\{u_\varepsilon\}$ glm. beschränkt in $H_0^1(\Omega)$.

$\Rightarrow$ (mit Satz von Alaoglu): $\exists$ Teilfolge mit $u_\varepsilon \rightharpoonup w$ in $H_0^1(\Omega)$ und $u_\varepsilon \rightarrow w$ in $L^2(\Omega)$.

b) aus (5.24):

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon^-} u_\varepsilon^2 dx \leq \int_\Omega f u_\varepsilon dx \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow u_\varepsilon^- \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \text{ in } L^2(\Omega); \text{ mit Konvergenzordnung } \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow w \geq 0 \text{ f.ü. in } \Omega; \text{ also } w \in U.$$

2. Identifikation des Limes:

u_ε erfüllt laut Def. (5.23):

$$\int_\Omega \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v + \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon H(-u_\varepsilon) v dx = \int_\Omega f v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (5.25)$$

⁴Die Existenz folgt z.B. mit dem Fixpunktsatz von Schaefer in $L^2(\Omega)$ [Ev1]; die Eindeutigkeit aus der Monotonie von $b(u) := uH(-u)$.

speziell für $v = u_\varepsilon$:

$$\int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon^2 H(-u_\varepsilon) dx = \int_{\Omega} f u_\varepsilon dx . \quad (5.26)$$

(5.25) minus (5.26); speziell gilt $\forall v \in U \subset H_0^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla (v - u_\varepsilon) + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon H(-u_\varepsilon)}_{\leq 0} (\underbrace{v}_{\geq 0} \underbrace{-u_\varepsilon}_{\geq 0 \text{ auf } \Omega_\varepsilon^-}) dx = \int_{\Omega} f(v - u_\varepsilon) dx \quad (5.27)$$

• wegen schwacher Konvergenz in $H_0^1(\Omega)$ gilt ($\|\nabla \cdot\|_{L^2}$ ist Norm in $H_0^1(\Omega)$ und SUHS)
 — ev. für weitere Teilfolge von $\{u_\varepsilon\}$:

$$-\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2$$

aus (5.27):

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} (|\nabla u_\varepsilon|^2 - \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v) dx &\geq \int_{\Omega} f(v - u_\varepsilon) dx \\ \downarrow \varepsilon \rightarrow 0 &\qquad \qquad \qquad \downarrow \varepsilon \rightarrow 0 \\ - \int_{\Omega} (|\nabla w|^2 - \nabla w \cdot \nabla v) dx &\geq \int_{\Omega} f(v - w) dx \quad \forall v \in U \quad [= (5.21)] \end{aligned}$$

lt. Satz 5.22: $w = u \in U$ ist *eindeutige* Lösung von (5.20).

3. Konvergenz der ganzen Folge:
 folgt aus Eindeutigkeit des Limes (generelles Prinzip!):

Annahme: *nicht* die ganze Folge konvergiert

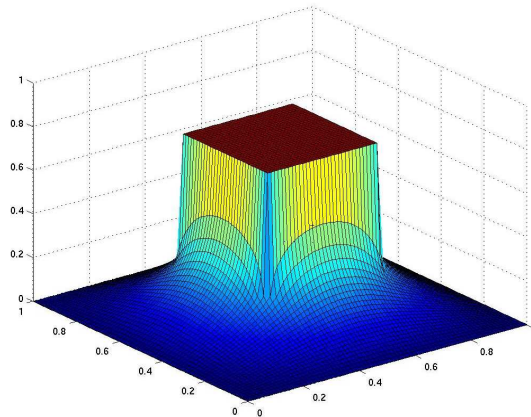
$\Rightarrow \exists 2$ Häufungspunkte, da $\{u_\varepsilon\}$ beschränkt.
 $\Rightarrow$ Widerspruch zur Eindeutigkeit des Limes.

■

Anwendungen:

1. Membran oberhalb des „Hindernisses“ $\{(x, x_{n+1}) | x_{n+1} = h(x), x \in \Omega\}$:

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx \xrightarrow{!} \min \quad \text{in } U = \{u \in H_0^1(\Omega) | u \geq h\}$$



Minimalfläche über Quaderhindernis

2. Biegung eines Stabes (vgl. Splines):

a) ohne Hindernis: betrachte RWP [wobei f proportional zum Biegemoment ist.]

$$\begin{cases} -u'' = f(x) & := 1, 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Variationsgleichung:

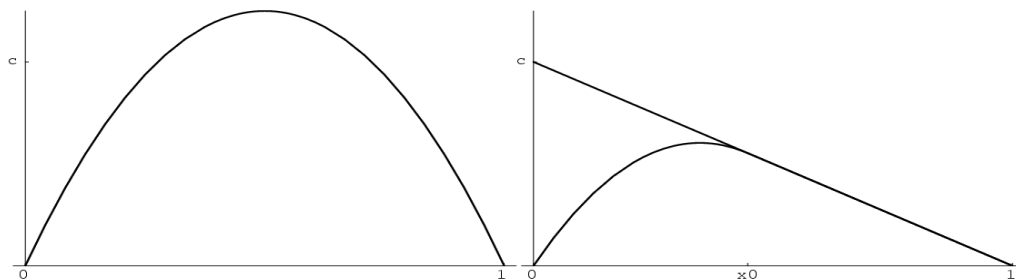
ges: $u \in H_0^1(0, 1)$ mit

$$\int_0^1 (u'v' - fv) dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(0, 1).$$

Lösung:

$$u(x) = \frac{x(1-x)}{2}$$

b) Stab soll unter dem *Hindernis* $h(x) := c(1-x)$, $c \geq 0$ liegen, also $u(x) \leq h(x)$.
Länge des Stabs nicht vorgegeben; Realisierung z.B. durch eine Öse an $x = 0$.



Elastischer Stab ohne und mit Hindernis

Hindernis-Problem:

$$\begin{cases} -u'' &= 1, \quad x \in (0, x_0) = O \\ u(0) &= u(1) = 0 \\ u(x) &= h(x), \quad x \in [x_0, 1) = C \quad \dots \text{Übereinstimmungsmenge} \end{cases}$$

x_0 ... *freier Rand*, durch $u \in H^2(0, 1) \hookrightarrow C^1[0, 1]$ bestimmt (Regularität von u in [KS]).

Variationsungleichung (analog zu (5.21)):

ges: $u \in U := \{u \in H_0^1(0, 1) \mid u \leq h\}$ mit

$$\int_0^1 u'(w' - u') \, dx \geq \int_0^1 f(w - u) \, dx \quad \forall w \in U$$

Lösung:

$$u(x) = \begin{cases} c(1-x) - \frac{1}{2}(x-x_0)^2 & , \quad 0 \leq x \leq x_0 \\ c(1-x) = h(x) & , \quad x_0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$x_0 = \sqrt{2c}$$

Bem: C muss die Form $[x_0, 1)$ haben; andernfalls würde die Bedingung $u|_O$ konkav die Erfüllung der RB $u(1) = 0$ unmöglich machen.

Referenzen: [DL6] §XIX.1.2, [Ev1] §8.4, [GH] §I.2, [KS] §II.6

6 Nichtkonvexe Probleme

Beispiel 6.1. (vgl. Bsp. 1.6; dort ohne u^2)

$$\mathcal{F}(u) := \int_0^1 u(x)^2 + (u'(x)^2 - 1)^2 dx \stackrel{!}{\rightarrow} \min \quad (6.1)$$

mit der Randbedingung $u(0) = u(1) = 0$.

mögliche Anwendung: Aufkreuzen gegen Wind in Fluß mit quadratischem Strömungsprofil (Abb. 6.1), Ferromagnetismus, Materialwissenschaften ($\rightarrow$ Mikrostrukturen [Mü])

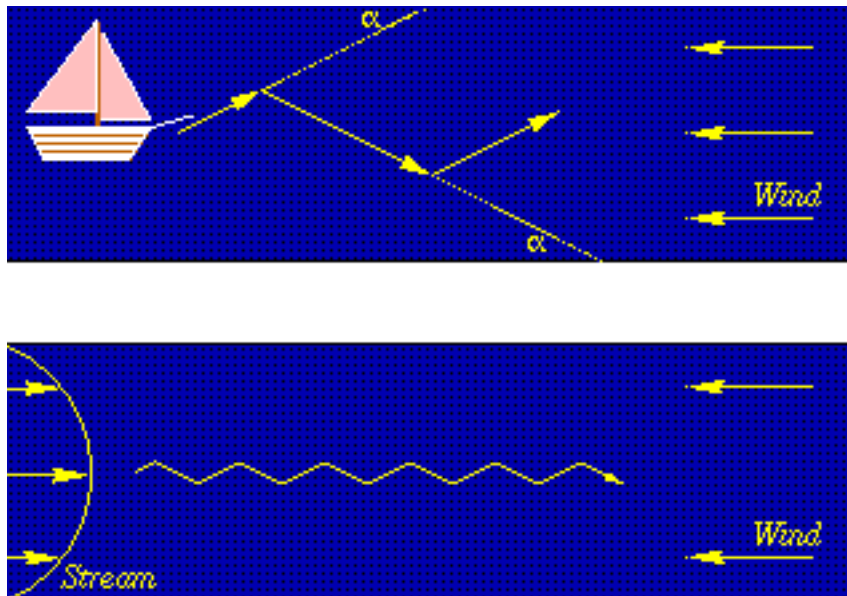


Abbildung 6.1:

Minimalfolge (Zick-Zack-Funktionen mit $u'_n = \pm 1$):

$$u_n(x) = \begin{cases} x - \frac{i}{n}, & \frac{i}{n} \leq x \leq \frac{i+\frac{1}{2}}{n}; \\ \frac{i+\frac{1}{2}}{n} - x, & \frac{i+\frac{1}{2}}{n} \leq x \leq \frac{i+1}{n} \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (6.2)$$

$$0 \leq u_n(x) \leq \frac{1}{2n}$$

$$\mathcal{F}(u_n) = \int_0^1 u_n^2 dx = \frac{1}{12n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = \inf_{u \in \text{Lip}[0,1]} \mathcal{F}(u), \quad \text{da } \mathcal{F}(u) \geq 0.$$

Obwohl $u_n \rightarrow 0$ (glm. auf $[0, 1]$), gilt

$$\mathcal{F}(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n) = \mathcal{F}(0) = 1 \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_n) = 0$$

Also: $\mathcal{F}$ ist unstetig, *nicht* unterhalbstetig [im Gegensatz zum Längenfunktional in Bsp. 5.5]

Grund: $F(z, p)$ *nicht* konvex in p

Minimum u von $\mathcal{F}$ müsste erfüllen:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet u = 0 \\ \bullet u' = \pm 1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{unmöglich!}$$

$\Rightarrow$ Problem 6.1 unlösbar; $\nexists$ Minimierer

□

mögliche Auswege:

- 1) Finde (modifiziertes!) Problem bzw. Funktional, das durch Grenzwert(e) der Minimalfolgen (des Originalproblems) erfüllt/minimiert wird ($\rightarrow$ *relaxierte Funktionale*).
- 2) Verallgemeinere den Lösungsbegriff; definiere z.B. eine “Funktion”, die 0 ist aber mit “Ableitungen” ± 1 ($\rightarrow$ *Young Maße*).

6.1 Relaxierte Funktionale

Definition 6.2. Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{F} : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Die unterhalbstetige (UHS) Einhüllende oder das relaxierte Funktional $sc^- \mathcal{F}$ von $\mathcal{F}$ ist $\forall u \in X$ definiert durch:

$$(sc^- \mathcal{F})(u) := \sup\{\Phi(u) \mid \Phi : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ ist UHS und } \Phi(v) \leq \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in X\} \quad (6.3)$$

Das ist wohldefiniert, da $\Phi \equiv \inf \mathcal{F}$ immer in obiger Menge liegt.

Es gilt: $sc^- \mathcal{F}$ ist UHS, und zwar das größte UHS Funktional “unterhalb” von $\mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ ist UHS $\Leftrightarrow \mathcal{F} = sc^- \mathcal{F}$.

Definition 6.3. $\mathcal{F} : X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt koerziv, falls jede Folge $\{u_n\} \subset X$ mit $\mathcal{F}(u_n) \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (also Folge in einem Sub-Level-Set) einen Häufungspunkt (HP) hat.

Satz 6.4. Sei X topologischer Raum, $\mathcal{F} : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

$\Rightarrow$

- a) Jeder HP einer Minimalfolge von $\mathcal{F}$ ist Minimalstelle von $sc^- \mathcal{F}$.
- b) Für $\mathcal{F}$ koerziv gilt: $sc^- \mathcal{F}$ nimmt sein Minimum an:

$$\min_X sc^- \mathcal{F} = \inf_X \mathcal{F}$$

Beweis. a) Sei $\{u_n\} \subset X$ Minimalfolge mit HP u_0 , und $\{u_{n_j}\}$ Teilfolge mit $u_{n_j} \rightarrow u_0$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow (sc^- \mathcal{F})(u_0) &\stackrel{sc^- \mathcal{F} \dots \text{UHS}}{\leq} \liminf_{j \rightarrow \infty} (sc^- \mathcal{F})(u_{n_j}) \\ &\stackrel{sc^- \mathcal{F} \leq \mathcal{F}}{\leq} \liminf_{j \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_{n_j}) \\ &\stackrel{\{u_{n_j}\} \text{ Min.folge}}{=} \inf_{v \in X} \mathcal{F}(v) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Sei $\Phi(u) := \inf_{v \in X} \mathcal{F}(v)$ konst. Funktional; es ist UHS, $\leq \mathcal{F}$.

$$\Rightarrow \Phi(u) = \inf_{v \in X} \mathcal{F}(v) \stackrel{(6.3)}{\leq} (sc^- \mathcal{F})(u) \quad \forall u \in X \quad (6.5)$$

$$\Rightarrow (sc^- \mathcal{F})(u_0) \stackrel{(6.4)}{\leq} \inf_{v \in X} \mathcal{F}(v) \stackrel{(6.5)}{\leq} (sc^- \mathcal{F})(u) \quad \forall u \in X.$$

Also ist u_0 Minimalstelle von $sc^- \mathcal{F}$.

- b) $\mathcal{F}$ koerziv $\Rightarrow$ Minimalfolge von $\mathcal{F}$ hat HP; der ist laut (a) Minimalstelle von $sc^- \mathcal{F}$. ■

Idee: Falls $\mathcal{F}$ nicht minimierbar (da nicht UHS), ist Minimierung von $sc^- \mathcal{F}$ bestmögliche Alternative.

In Anwendungen entspricht das oft dem Übergang zur Modellierung von effektiven / gemittelten / makroskopischen Größen. Die (infinitesimale) Mikrostruktur wird dann ev. nicht mehr aufgelöst.

Darstellung des relaxierten Funktional mit konvexer Einhüllender:

Definition 6.5. Die konvexe Einhüllende einer reellen skalaren Fkt. f ,

$$Cf(p) := \sup\{g(p) \mid g \text{ ist konvex, } g \leq f\},$$

ist die "größte" konvexe Fkt. $\leq f$.

Satz 6.6. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u_0 \in W^{1,q}(\Omega)$ für ein $q \in (1, \infty)$, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit

$$c_0|p|^q \leq F(p) \leq c_1|p|^q + c_2 \quad \forall p \in \mathbb{R}^n. \quad (6.6)$$

$$\mathcal{F}(u) := \int_{\Omega} F(\nabla u(x)) dx$$

für skalares $u \in U := \{u \in W^{1,q}(\Omega) \mid u - u_0 \in W_0^{1,q}(\Omega)\}$

$\Rightarrow$ relaxiertes Funktional von $\mathcal{F}$ bez. der schwachen $W^{1,q}$ -Topologie ist:

$$(sc^- \mathcal{F})(u) = \int_{\Omega} (CF)(\nabla u(x)) dx.$$

Beweis. sehr lang: [Jo] §II.5.2

Beispiel 6.1 (Fortsetzung).

$$\mathcal{F}(u) := \underbrace{\int_0^1 u^2}_{=\mathcal{F}_1(u)} + \underbrace{(u'^2 - 1)^2}_{=\mathcal{F}_2(u)} dx \quad \text{auf } W_0^{1,4}(0,1)$$

$\mathcal{F}_1(u)$ ist stetig bez. starker L^2 -Konvergenz, also auch bez. schwacher $W^{1,4}$ -Konvergenz (wegen kompakter Einbettung $W^{1,4}(0,1) \hookrightarrow L^4(0,1) \hookrightarrow L^2(0,1)$).

Satz 6.6 für $\mathcal{F}_2$ ((6.6) impliziert die Wahl $q = 4$) liefert mit

$$G(p) := CF_2(p) = \begin{cases} (p^2 - 1)^2 & , \quad |p| \geq 1 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

$$(sc^- \mathcal{F})(u) = \int_0^1 u^2 + G(u') dx$$

$u \equiv 0$ (= Limes der Minimalfolge (6.2)) minimiert $sc^- \mathcal{F}$ (laut Satz 6.4 (a)). □

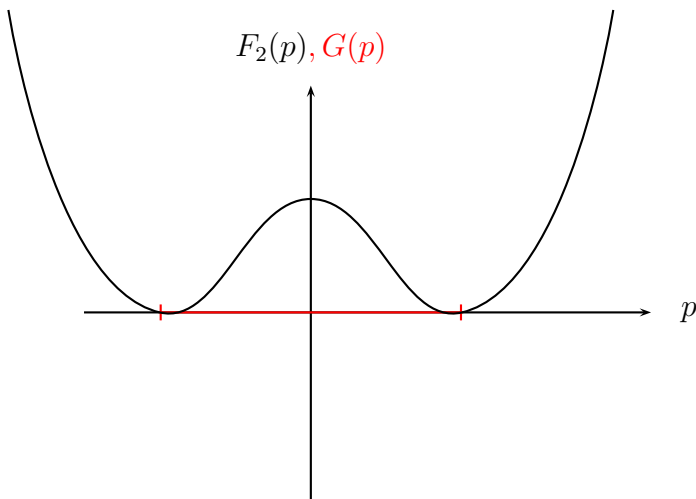
Beispiel 6.7 (Anwendung in nichtlinearer Elastizitätstheorie).

$\Omega = \Omega' \times (0, L); \Omega' \subset \mathbb{R}^2 \dots$ Referenzkonfiguration (vgl. §5.4)

$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \dots$ Deformationsfeld

Betrachte Scher-Deformation

$$u(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3 + \varphi(x_1, x_2))^T,$$



mit $Du = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & 1 \end{pmatrix}$; mit Randbedingung $\varphi = \varphi_0$ auf $\partial\Omega'$.

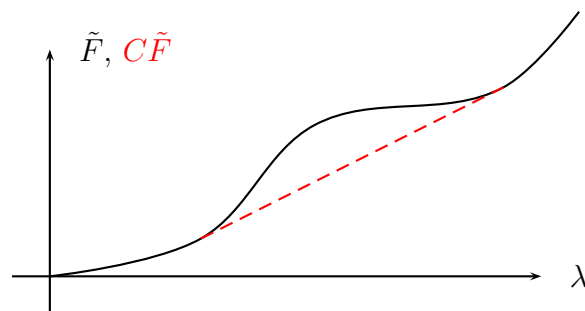
$\det Du = 1$ zeigt Inkompressibilität.

Betrachte hyperelastisches Material mit Energiedichte der Form

$$F(Du) = F_1(\text{sp}[Du \cdot Du^T]) = \tilde{F}(|\nabla \varphi(x)|),$$

$$\text{sp}(Du \cdot Du^T) = 3 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^2 = 3 + |\nabla \varphi|^2$$

In Anwendung: $\tilde{F}(0) = 0$, $\tilde{F}'(\lambda) \geq 0$ aber $\tilde{F}$ nicht konvex, z.B.:



relaxiertes Problem:

$$(sc^- \mathcal{F})(u) = \int_{\Omega'} C \tilde{F}(|\nabla \varphi(x)|) dx \xrightarrow{!} \min$$

Referenzen: [RR] §10.2.2, [Gr] §3.4, [Jo] §II.5, [Da] §A.2.1

6.2 Γ -Konvergenz

[von De Giorgi, 1975]

Ziel: Einführung eines “nützlichen” Konvergenzbegriffs für eine Folge von Funktionalen.

Frage: Es gelte $\mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}$ in geeignetem Sinn.

Welcher Konvergenzbegriff “ $\mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}$ ” impliziert Konvergenz der Infima $m_n := \inf_{u \in X} \mathcal{F}_n(u) \rightarrow m := \inf_{u \in X} \mathcal{F}(u)$ bzw. der Minimalstellen $u_n \rightarrow u$ (falls existent) ?

2 mögliche Antworten:

- $\mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}$ glm. auf $X \Rightarrow m_n \rightarrow m$.
- Sei $\mathcal{F}_n = \int_{\Omega} F_n(x, \nabla u(x)) dx$; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt; für f.a. $x \in \Omega$: $F_n(x, \cdot)$ konvex auf $\mathbb{R}^n$. $\forall p \in \mathbb{R}^n$ gelte: $F_n(\cdot, p) \rightarrow F(\cdot, p)$ punktweise f.ü. in Ω (+ technische Bed.)
 $\Rightarrow u_n \rightarrow u, m_n \rightarrow m$ (Details: Th. 5.14, [DM]).

Beide Konvergenzbegriffe für viele Anwendungen zu stark, trotzdem $m_n \rightarrow m$ möglich:

Beispiel 6.8. $\Omega = (0, 1)$, $F_n(x, p) = (2 + \sin nx)p^2 \rightarrow F(p) = 2p^2$, $U := \{u \in H^1(0, 1) \mid u(0) = 0, u(1) = 1\}$.

Aus expliziter Lösung der EL-Gleichungen:

$m_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{3}$ aber $m = \mathcal{F}(u \equiv x) = 2 \int_0^1 (u')^2 dx = 2$.

Richtiger “Variationslimes” des Homogenisierungsproblems $\{\mathcal{F}_n\}$ berechenbar (Details: Ex. 25.4, [DM]; vgl. Satz 6.20):

$\tilde{\mathcal{F}}(u) = \sqrt{3} \int_0^1 (u')^2 dx \Rightarrow$ Konvergenz der Minima und Minimalstellen. □

Definition 6.9. Sei X topologischer Raum, der das 1. Abzählbarkeitsaxiom¹ (AA) erfüllt. Sei $\mathcal{F}_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, $(n \in \mathbb{N})$ eine Folge von Funktionalen. $\mathcal{F}_n$ heißt Γ -konvergent gegen $\mathcal{F}$,

$$\mathcal{F} = \Gamma - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n,$$

wenn

(i) $\forall$ Folgen $\{u_n\}$ mit $u_n \rightarrow u \in X$:

$$\mathcal{F}(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(u_n);$$

(ii) $\forall u \in X : \exists$ Folge $u_n \rightarrow u$ mit

$$\mathcal{F}(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(u_n) \quad (\text{“recovery sequence”}).$$

¹ $\forall x \in X : \exists$ abzählbare Umgebungsbasis, d.h. $\exists$ Folge $U_j, j \in \mathbb{N}$ von offenen Umgebungen, sodass $\forall$ offenen Umgebungen U mit $x \in U$ gilt: $U_j \subset U$ für einen Index $j \in \mathbb{N}$.

Bem: Laut (i) ist $\mathcal{F}$ eine “gemeinsame asymptotische untere Schranke” für die $\mathcal{F}_n$; (ii) garantiert deren Optimalität.

Lemma 6.10. *Der Γ -Limes ist (falls existent) eindeutig.*

Beweis. Seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 2 Γ -Limiten von $\{\mathcal{F}_n\}$ mit $\mathcal{F}(u) < \mathcal{G}(u)$ für ein $u \in X$.

Laut (ii): $\exists$ Folge $u_n \rightarrow u$ mit

$$\mathcal{F}(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(u_n) < \mathcal{G}(u) \stackrel{(i)}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(u_n)$$

Widerspruch. ■

Bemerkung 6.11. Die schwache Topologie *auf beschränkten Mengen* von $L^p(\Omega)$, $W^{k,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$ erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom. Aber: ∞ -dimensionale Banachräume (mit der schwachen Topologie) erfüllen es *nicht* (siehe §1 in [DF], §8 in [DM]; §II.6.1 in [Jo]).

Beispiel 6.12. $\mathcal{F}_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}_n(x) := \begin{cases} 1 & , \quad x \geq \frac{1}{n} \\ nx & , \quad -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ -1 & , \quad x \leq -\frac{1}{n} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(x) = (\Gamma - \lim \mathcal{F}_n)(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \\ -1 & , \quad x \leq 0 \end{cases} ;$$

da $x_n := -\frac{1}{n} \rightarrow 0 =: x$, $\lim \mathcal{F}_n(-\frac{1}{n}) = -1 = \mathcal{F}(0)$. Man beachte den Symmetriebruch, schon in Def. 6.9

Aber punktweiser Limes: $\tilde{\mathcal{F}}(x) = \text{sgn}(x)$. □

Beispiel 6.13. $\mathcal{F}_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_n(x) = \sin nx \Rightarrow (\Gamma - \lim \mathcal{F}_n)(x) = -1$; aber $\mathcal{F}_n$ konvergiert *nicht* punktweise; schwacher Limes = 0.

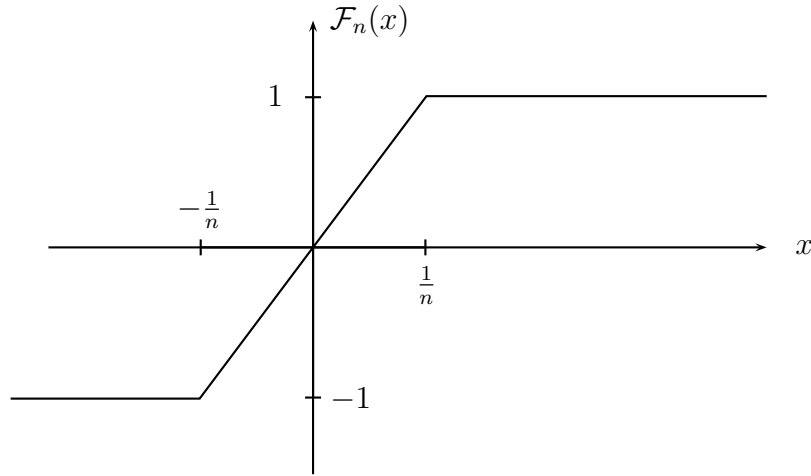
lt. Def.

$$(i) \quad \mathcal{F}(x) = -1 \leq \underbrace{\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(x_n)}_{\geq -1} \quad \checkmark$$

$$(ii) \quad \mathcal{F}_n(\underbrace{\frac{3+4k}{2n}\pi}_{=: x_{k,n}}) = -1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Jedes $x \in \mathbb{R}$ kann in $\{x_{k,n}\}$ bel. gut approximiert werden; also

$$\mathcal{F}(x) = -1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(x_n) \quad \text{für geeignete Folge } x_n \rightarrow x. \quad \square$$



Beispiel 6.14. X erfülle das 1. Abzählbarkeitsaxiom. Sei

$$\mathcal{F}_n \equiv \mathcal{F} : X \rightarrow \mathbb{R}$$

eine konst. Folge $\Rightarrow \Gamma - \lim \mathcal{F}_n = sc^- \mathcal{F}$, die relaxierte Fkt., also ev. anders als $\mathcal{F}$!
(siehe Satz 6.19) □

Definition 6.15. Sei $\mathcal{F} : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $\inf_{v \in X} \mathcal{F}(v) > -\infty$.

Sei $\varepsilon > 0$ fest. $u \in X$ heißt (ein) ε -Minimierer von $\mathcal{F}$, falls

$$\mathcal{F}(u) < \inf_{v \in X} \mathcal{F}(v) + \varepsilon$$

Bemerkung 6.16. ε -Minimierer $\exists$ immer. u ist Minimierer $\Leftrightarrow u$ ist ε -Minimierer $\forall \varepsilon > 0$.

Satz 6.17. X erfülle das 1. Abzählbarkeitsaxiom. Seien

$$\mathcal{F}, \mathcal{F}_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \quad \text{und} \quad \mathcal{F} = \Gamma - \lim \mathcal{F}_n.$$

Sei weiters $\inf_{v \in X} \mathcal{F}_n(v) > -\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Sei u_n ein ε_n -Minimierer von $\mathcal{F}_n$, mit $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $u_n \rightarrow u \in X$. Dann gilt:

1. u ist Minimalstelle von $\mathcal{F}$,
2. $\mathcal{F}(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(u_n)$.

Beweis. (1) Sei $v \in X$ beliebig. Nach Definition (ii) der Γ -Konvergenz existiert eine Folge $\{v_n\}$ mit $v_n \rightarrow v$ und $\mathcal{F}(v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(v_n)$. Da u_n ein ε_n -Minimierer von $\mathcal{F}_n$ ist, gilt $\mathcal{F}_n(v_n) > \mathcal{F}_n(u_n) - \varepsilon_n$ und damit

$$\mathcal{F}(v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(v_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(v_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{F}_n(u_n) - \varepsilon_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(u_n).$$

Andererseits gilt wegen Definition (i) der Γ -Konvergenz, dass $\mathcal{F}(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(u_n) \leq \mathcal{F}(v)$. Also ist u Minimalstelle von $\mathcal{F}$.

(2) Nach Definition (ii) der Γ -Konvergenz existiert eine Folge $\{v_n\} \subset X$ mit $v_n \rightarrow u$ und

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(v_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(v_n) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{F}_n(u_n) - \varepsilon_n) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(u_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(u_n) \geq \mathcal{F}(u) \quad (\text{lt. (i) von Def. 6.9}). \\ &\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(u_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(u_n) = \mathcal{F}(u), \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. ■

Korollar 6.18. X erfülle das 1. Abzählbarkeitsaxiom. Seien $\mathcal{F}, \mathcal{F}_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und $\mathcal{F} = \Gamma - \lim \mathcal{F}_n$. Sei u_n Minimierer von $\mathcal{F}_n$.

Falls $u_n \rightarrow u \Rightarrow u$ minimiert $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(u_n)$.

Satz 6.19. X erfülle das 1. Abzählbarkeitsaxiom. Seien

$$\mathcal{F}, \mathcal{F}_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \quad \text{und} \quad \mathcal{F} = \Gamma - \lim \mathcal{F}_n.$$

$\Rightarrow \mathcal{F}$ ist UHS.

Beweis. Andernfalls $\exists u \in X$ und eine Folge $u_m \rightarrow u$ mit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_m) < \mathcal{F}(u). \quad (6.7)$$

Wegen Γ -Konvergenz: $\forall m$ gilt: $\exists$ Folge $u_{m,n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u_m$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(u_{m,n}) = \mathcal{F}(u_m).$$

Der Einfachheit halber sei $-\infty < \lim \mathcal{F}(u_m), \mathcal{F}(u) < \infty$.

Sei $\delta := \frac{1}{4}(\mathcal{F}(u) - \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_m)) \stackrel{(6.7)}{>} 0$

$\forall m \in \mathbb{N} : \exists n_m$ mit

$$\mathcal{F}_{n_m}(u_{m,n_m}) - \mathcal{F}(u_m) < \delta, \quad (6.8)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u_{m,n_m} = u, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} n_m = \infty.$$

$\Rightarrow$ Wegen Γ -Konvergenz von $\{\mathcal{F}_{n_m}\}$:

$$\mathcal{F}(u) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{n_m}(u_{m,n_m}) \quad (6.9)$$

Aus (6.7): wähle $\tilde{m}$ so groß, dass

$$\mathcal{F}(u_{\tilde{m}}) < \mathcal{F}(u) - 3\delta, \quad (6.10)$$

und aus (6.9):

$$\mathcal{F}_{n_{\tilde{m}}}(u_{\tilde{m}, n_{\tilde{m}}}) > \mathcal{F}(u) - \delta. \quad (6.11)$$

(6.8), (6.10), (6.11) liefern Widerspruch:

$$\mathcal{F}(u) \stackrel{(6.11)}{<} \mathcal{F}_{n_{\tilde{m}}}(u_{\tilde{m}, n_{\tilde{m}}}) + \delta \stackrel{(6.8)}{<} \mathcal{F}(u_{\tilde{m}}) + 2\delta \stackrel{(6.10)}{<} \mathcal{F}(u) - \delta$$

$\Rightarrow \mathcal{F}$ ist UHS. ■

Referenzen: [Jo] §II.6.1, [DM]

6.3 Anwendung der Γ -Konvergenz: Homogenisierung

Ziel: Variationsproblem auf (perforiertem) Gebiet mit vielen kleinen Löchern durch Homogenisierung (d.h. $\varepsilon \rightarrow 0$) lösen (z.B. poröses Medium)

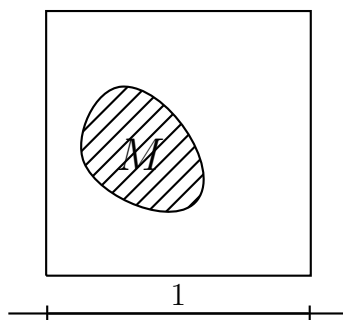


Abbildung 6.2: Loch $M \subset (0, 1)^d$ auf Längenskala 1

sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$; $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus (M_\varepsilon \cap \Omega) \dots$ beschränktes Gebiet mit vielen kleinen Löchern
sei

$$\alpha(x) := \begin{cases} 0 & , \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus M_1 \\ \infty & , \quad x \in M_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha(\frac{x}{\varepsilon}) \dots$ "charakteristische" Funktion von $\mathbb{R}^d \setminus M_\varepsilon$

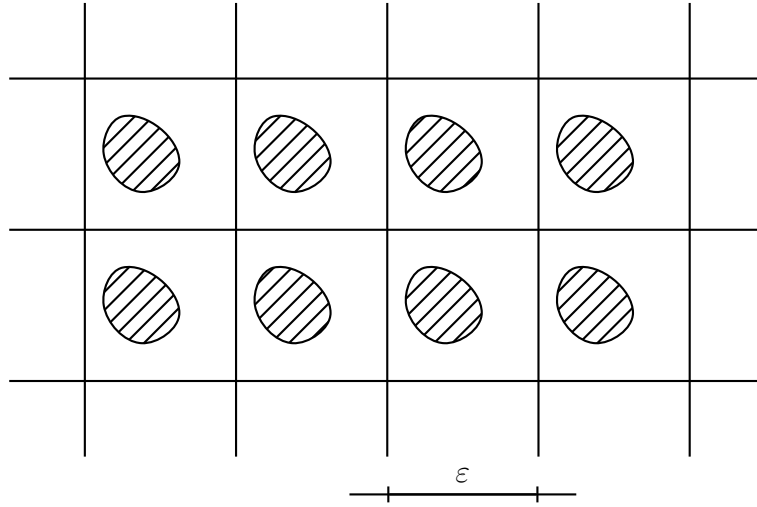


Abbildung 6.3: $M_\varepsilon := \bigcup_{m \in \mathbb{Z}^d} \varepsilon(M + m)$... periodisches Gitter von Löchern der Skala ε

$$\mathcal{F}_\varepsilon(u) := \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + \int_{\Omega} \alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u^2(x) dx, \quad u \in H_0^1(\Omega)$$

Bem: Die Skalierung ε^2 des ersten Terms wird erst a-posteriori dadurch gerechtfertigt, dass diese einen nicht-trivialen Limes liefert. Der einzige Zweck des zweiten Terms ist, $u = 0$ f.ü. auf den Löchern M_ε zu erzwingen.

Sei $f \in L^2(\Omega)$ geg. $\Rightarrow$

Die Minimierer u_ε von

$$\mathcal{G}_\varepsilon(u) := \mathcal{F}_\varepsilon(u) - \int_{\Omega} f u dx$$

erfüllen die Poisson Gleichung auf perforiertem Gebiet:

$$\begin{cases} \Delta u_\varepsilon = -\frac{f}{\varepsilon^2} & , \quad \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0 & , \quad \partial\Omega_\varepsilon . \end{cases} \quad (6.12)$$

Dabei ist $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup (\partial M_\varepsilon \cap \Omega)$. Aus (6.12) folgt

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq c_p^2(\Omega_\varepsilon) \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq \frac{c_p^2(\Omega_\varepsilon)}{\varepsilon^2} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} . \quad (6.13)$$

Mit $c_p(\Omega_\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ folgt die gleichmäßige Beschränktheit von u_ε in $L^2(\Omega)$. Daher kann im folgenden Satz eine beschränkte Teilmenge von $L^2(\Omega)$ als topologischer Raum zugrunde gelegt werden, der das 1. AA erfüllt (siehe Bemerkung 6.11).

Die RB auf $\partial\Omega$ folgt aus $u \in H_0^1(\Omega)$, die RB auf ∂M_ε wird durch $\alpha(\frac{x}{\varepsilon})u^2(x)$ im Funktional erzwungen.

Satz 6.20. *Bez. der schwachen $L^2(\Omega)$ -Konvergenz gilt*

$$\Gamma - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon = \mathcal{F},$$

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2\mu(M)} \int_{\Omega} u^2(x) dx,$$

$$\text{mit } \mu(M) := \int_{(0,1)^d} \eta(x) dx \stackrel{\text{part. Int., (6.14)}}{=} \int_{(0,1)^d \setminus M} |\nabla \eta(x)|^2 dx > 0.$$

$\eta \geq 0$ löst:

$$\begin{cases} -\Delta \eta = 1 & , \quad (0,1)^d \setminus M \\ \eta = 0 & , \quad M \\ \text{periodische RBen auf } \partial(0,1)^d \end{cases} \quad (6.14)$$

η wird $\mathbb{Z}^d$ -periodisch auf $\mathbb{R}^d$ fortgesetzt, $\eta \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Beweisidee.

$$\eta_\varepsilon(x) := \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\eta} \equiv \int_{(0,1)^d} \eta(x) dx = \mu(M) \text{ in } L^2(\Omega) \quad (\text{detaillierter Bew.: §II.5.2, [Jo]})$$

Teil (ii) der Γ -Konvergenz-Def:

Sei $u \in L^2(\Omega) =: X$.

zz: $\exists$ Folge $w_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u$ in $L^2(\Omega)$ mit $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(w_\varepsilon) = \mathcal{F}(u)$.

Durch Approximation sei sogar $u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

$$w_\varepsilon := \frac{1}{\mu(M)} \eta_\varepsilon u \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u \text{ in } L^2(\Omega)$$

und $w_\varepsilon = 0$ auf M_ε .

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\varepsilon(w_\varepsilon) &= \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla w_\varepsilon|^2 dx \\ &= \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{1}{\mu(M)^2} \int_{\Omega_\varepsilon} (u^2 |\nabla \eta_\varepsilon|^2 + 2u \eta_\varepsilon \nabla u \cdot \nabla \eta_\varepsilon + \eta_\varepsilon^2 |\nabla u|^2) dx \end{aligned}$$

Limes vom 1. Term:

Sei $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ offen:

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla \eta_\varepsilon|^2 dx &\stackrel{\varepsilon \text{ klein, } \eta_\varepsilon \dots \text{period.}}{\sim} \frac{\text{vol}(\tilde{\Omega})}{\varepsilon^d} \int_{(0,\varepsilon)^d \setminus M_\varepsilon} |\nabla \eta_\varepsilon|^2 dx \stackrel{\frac{x}{\varepsilon} - \text{Subst.}}{=} \frac{\text{vol}(\tilde{\Omega})}{\varepsilon^2} \int_{(0,1)^d \setminus M} |\nabla \eta|^2 dx \\ \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla \eta_\varepsilon|^2 dx &= \text{vol}(\tilde{\Omega}) \int_{(0,1)^d \setminus M} |\nabla \eta|^2 dx = \text{vol}(\tilde{\Omega}) \mu(M) \end{aligned} \quad (6.15)$$

Sei u (lt. AN stetig) durch Stufenfunktion approximiert (u jeweils const. auf Mengen $\tilde{\Omega}_j$).

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \int_{\Omega_\varepsilon} u^2 |\nabla \eta_\varepsilon|^2 dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \sum_j u_j^2 \int_{\tilde{\Omega}_j} |\nabla \eta_\varepsilon|^2 dx = \mu(M) \sum_j \text{vol}(\tilde{\Omega}_j) u_j^2 = \mu(M) \int_{\Omega} u^2 dx \quad (6.16)$$

Limes vom 3. Term:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \int_{\Omega_\varepsilon} \eta_\varepsilon^2 |\nabla u|^2 dx = 0, \quad (6.17)$$

da $\eta_\varepsilon \in L^\infty$ (glm. in ε).

Limes vom 2. Term:

Mit Cauchy-Schwarz und (6.16), (6.17):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \int_{\Omega_\varepsilon} u \nabla \eta_\varepsilon \cdot \nabla u \eta_\varepsilon dx = 0$$

insges:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(w_\varepsilon) = \frac{1}{2\mu(M)} \int_{\Omega} u^2 dx = \mathcal{F}(u) \quad (6.18)$$

Teil (i) der Γ -Konvergenz-Def:

Sei Folge v_ε so, dass $v_\varepsilon|_{M_\varepsilon} \equiv 0$ und $v_\varepsilon \rightharpoonup u$ in $L^2(\Omega)$ ($v_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ ist hier nicht vorausgesetzt).

z.z.:

$$\frac{1}{2\mu(M)} \int_{\Omega} u^2 dx = \mathcal{F}(u) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(v_\varepsilon) \quad (6.19)$$

Durch Approximation sei sogar $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Sei (wie oben) $w_\varepsilon := \frac{1}{\mu(M)}\eta_\varepsilon u$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underbrace{\mathcal{F}_\varepsilon(v_\varepsilon)}_{\in [0, \infty]} + \mathcal{F}_\varepsilon(w_\varepsilon) &= \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla v_\varepsilon|^2 dx + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla w_\varepsilon|^2 dx \geq \varepsilon^2 \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla w_\varepsilon dx \\ &= \frac{\varepsilon^2}{\mu(M)} \underbrace{\int_{\Omega_\varepsilon} (\eta_\varepsilon \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla u + u \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla \eta_\varepsilon) dx}_{(*) \rightarrow 0} \end{aligned}$$

Mit (6.18) für $\mathcal{F}_\varepsilon(w_\varepsilon)$:

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(v_\varepsilon) + \frac{1}{2\mu(M)} \int_{\Omega} u^2 dx \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^2}{\mu(M)} \int_{\Omega_\varepsilon} u \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla \eta_\varepsilon dx, \quad (6.20)$$

da (*) gegen 0 geht, weil:

$$(*) \stackrel{\text{part. Int.}}{=} - \underbrace{\frac{\varepsilon^2}{\mu(M)} \int_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon [\nabla \eta_\varepsilon \cdot \nabla u + \eta_\varepsilon \Delta u] dx}_{(**)}$$

Für (**) gilt mit Cauchy-Schwarz und (6.15) [mit $\tilde{\Omega} = \Omega$]:

$$\left| \varepsilon^2 \int_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon \nabla u \cdot \nabla \eta_\varepsilon dx \right| \leq \varepsilon \left(\int_{\Omega_\varepsilon} \underbrace{|\nabla u|^2}_{\in L^\infty} \underbrace{v_\varepsilon^2}_{\substack{\text{glm. beschr.} \\ \text{in } L^1}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\underbrace{\varepsilon^2 \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \eta_\varepsilon|^2 dx}_{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \leq \text{vol}(\Omega) \mu(M)} \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \quad (6.21)$$

Für den 2. Term von (*) gilt:

$$\varepsilon^2 \int_{\Omega_\varepsilon} \underbrace{v_\varepsilon}_{\substack{\text{glm. beschr.} \\ \text{in } L^2}} \underbrace{\eta_\varepsilon}_{\substack{\text{glm. beschr.} \\ \text{in } L^\infty}} \underbrace{\Delta u}_{\in L^2} dx \rightarrow 0.$$

Aus (6.14) folgt

$$-\varepsilon^2 \Delta \eta_\varepsilon = 1 \text{ in } \Omega_\varepsilon. \quad (6.22)$$

Partielle Integration in (6.20) liefert:

$$\begin{aligned}
 \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(v_\varepsilon) + \underbrace{\frac{1}{2\mu(M)} \int u^2 dx}_{=\mathcal{F}(u)} &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{\varepsilon^2}{\mu(M)} \int_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon (\nabla u \cdot \nabla \eta_\varepsilon + u \Delta \eta_\varepsilon) dx \right) \\
 &\stackrel{(6.21), (6.22)}{=} \frac{1}{\mu(M)} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon u dx \\
 &\stackrel{v_\varepsilon \rightharpoonup u}{=} \frac{1}{\mu(M)} \int_{\Omega} u^2 dx = 2\mathcal{F}(u)
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ (6.19) folgt. ■

Bem: $\int f u dx$ ist schwach stetig. Daher darf der konstante Term von $\lim \mathcal{F}_\varepsilon$ abgezogen werden (vgl. Bsp. 6.14). $\Rightarrow \mathcal{G}_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{G}$ mit

$$\mathcal{G}(u) := \mathcal{F}(u) - \int_{\Omega} f u dx = \frac{1}{2\mu(M)} \int_{\Omega} [u - \mu(M)f]^2 dx - \frac{\mu(M)}{2} \int_{\Omega} f^2 dx \xrightarrow{!} \min$$

$\mathcal{G}$ lässt sich in $L^2(\Omega)$ minimieren (aber i.A. nicht in $H_0^1(\Omega)$): $u_{\min}(x) = \mu(M)f(x)$.

Korollar 6.21. Sei $f \in L^2(\Omega)$. Unter den Voraussetzungen von Satz 6.20 gilt für die Minimierer von $\mathcal{G}_\varepsilon$ und $\mathcal{G}$:

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_{\min} \text{ in } L^2(\Omega), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{G}_\varepsilon(u_\varepsilon) = \mathcal{G}(u_{\min}). \quad (6.23)$$

Beweis. Aus (6.13) folgt für eine Teilfolge $u_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{u} \in L^2(\Omega)$. Aus Satz 6.20 und Korollar 6.18 folgen: $\tilde{u} = u_{\min}$, (schwache) Konvergenz der ganzen Folge (da Limes $u_{\min}$ eindeutig), und (6.23). □

Referenzen: [Jo] §II.6.2, [Bra] §6.1

6.4 Young Maße

Anwendungen: Phasenübergänge und Mikrostrukturen in Kristallen [Mü]; Wirtschaftswissenschaften (Nash Equilibria); Strömungsmechanik (Turbulenzmodelle)

Ziel: beschreibe makroskopische Limes-Eigenschaften von Minimalfolgen $w_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, aber ohne “unnötige (mikroskopische) Details”, bzw. makroskopische (durchschnittliche) Eigenschaften oder Verhalten von Systemen mit Feinstrukturen, die aber nicht im Detail modelliert werden sollen.

Forderung an “Grenzobjekt” ($\rightarrow$ Young Maß): richtige Darstellung der Limiten von

$$\int_{\tilde{\Omega}} f(w_n) dx \quad \forall \text{ stetigen } f, \forall \text{ messbaren } \tilde{\Omega} \subset \Omega.$$

Motivation: Seien $\{w_n\} \subset L^\infty(\Omega)$ beschränkt und $f \in C(\mathbb{R})$. Dann ist auch $\{f(w_n)\} \subset L^\infty(\Omega)$ beschränkt und $\exists$ TF $\{w_{n_k}\}$:

$$w_{n_k} \xrightarrow{*} w, \quad f(w_{n_k}) \xrightarrow{*} \bar{f} \quad \text{in } L^\infty(\Omega). \quad (6.24)$$

Problem: I.A. gilt *nicht* $\bar{f} = f(w)$.

Ausweg: Verallgemeinere “ $f(w)$ ”, so dass $\bar{f} = f(w)$ gilt ($\rightarrow$ Young Maß).

Bem: Wenn $\{w_n\} \subset L^\infty(\Omega)$, $f \in C(\mathbb{R})$ und $w_n \rightarrow w$ f.ü., dann gilt $f(w_n) \rightarrow f(w)$ f.ü. und damit wegen $f(w_{n_k}) \xrightarrow{*} \bar{f}$ in $L^\infty(\Omega)$: $\bar{f} = f(w)$.

Wir haben jedoch nur $w_{n_k} \xrightarrow{*} w$, was schwächer als $w_n \rightarrow w$ f.ü. ist.

Notationen:

$C_0(\mathbb{R})$... stetige Funktionen mit kompaktem Träger (Alternative: deren L^∞ -Abschluss);
 $\mathcal{M}(\mathbb{R})$... signierte Radon Maße ² mit endlicher Masse; können mit $C_0(\mathbb{R})'$ identifiziert werden - mit Dualitätsklammer $\langle \mu, f \rangle = \int_{\mathbb{R}} f d\mu$ (siehe [Bre], Kommentare zu §IV).

Definition 6.22. Die Abbildung $\mu : \Omega \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R})$ heißt schwach* messbar, wenn $x \mapsto \langle \mu(x), f \rangle$ messbar ist $\forall f \in C_0(\mathbb{R})$.

Satz 6.23 (Fundamentalsatz für Young Maße). Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $K \subset \mathbb{R}$ beschränkt und offen, sei $w_n : \Omega \rightarrow K$ eine Folge von $L^\infty(\Omega)$ -Funktionen.

$\Rightarrow \exists$ Teilfolge w_{n_k} , $\exists$ schwach* messbare Abbildung ν (das Young Maß): $\Omega \rightarrow \mathcal{M}(\bar{K})$ mit

$$i) \quad \nu(x) \geq 0, \quad \int_{\bar{K}} d\nu(x) = 1 \quad \text{für f.a. } x \in \Omega \quad (\text{also Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen})$$

$$ii) \quad \forall f \in C(\bar{K}) \subset C_0(\mathbb{R}) \text{ gilt:}$$

$$f(w_{n_k}) \xrightarrow{*} \bar{f} \text{ in } L^\infty(\Omega) \text{ mit } \bar{f}(x) := \langle \nu(x), f \rangle = \int_{\bar{K}} f d\nu(x), \quad \text{für f.a. } x \in \Omega \quad (6.25)$$

$$d.h. \quad \forall g \in L^1(\Omega) : \quad \int_{\Omega} g(x) f(w_{n_k}(x)) dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g(x) \bar{f}(x) dx$$

²Ein Maß μ auf einer σ -Algebra von Borel Mengen eines topologischen Hausdorff Raumes ist *Radon Maß*, wenn es *innen regulär* (d.h. $\forall$ Borel Mengen B gilt: $\mu(B) = \sup_{K \subset B, K \text{ kompakt}} \mu(K)$) und *lokal endlich* ist (d.h. jeder Punkt hat eine Umgebung mit endlichem Maß).

Ein *signiertes Maß* kann auch negative Werte annehmen.

- Bemerkung 6.24.** 1) Die Abbildung $\nu : \Omega \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R})$ heißt das durch $\{w_{n_k}\}$ erzeugte Young Maß. Das ist ein parametrisiertes Maß (mit Parameter $x \in \Omega$).
- 2) TF $\{w_{n_k}\}$ und “Limes” ν i.A. *nicht* eindeutig.
- 3) Die Funktionen w_n haben Werte in $\mathbb{R}$, deren “Limes” aber in $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ - also nur Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Werten.
- 4) $\nu(x_0) \dots$ Wahrscheinlichkeit(sverteilung), bestimmte Werte in der Folge $w_{n_k}(x)$, $x \in B_r(x_0)$ zu finden, im Limes $k \rightarrow \infty, r \rightarrow 0$.
- 5) In (6.25): Durch ein (einziges) ν kann der richtige Limes von allen nichtlinearen Funktionen f einer oszillatorischen/schwach konvergenten Folge $\{w_{n_k}\}$, also von $\{f(w_{n_k})\}$, dargestellt werden – im Gegensatz zu (6.24). Das ist hier möglich, da der “Limes” ν in einem “höher dimensionalten Raum” liegt als $\{w_{n_k}\}$. ν hat also mehr Information als w , der schwach Limes von $\{w_{n_k}\}$.
- 6) $\bar{f}$ in (6.25) hängt von der (nichtlinearen) Funktion f ab.

Beweis-Idee von Satz 6.23: Definiere $W_n(x) := \delta_{w_n(x)} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, für f.a. $x \in \Omega$. Das ist eine Einbettung von einwertigen Funktionen in Maße.

$$\Rightarrow \|W_n(x)\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} dW_n(x) = 1, \quad x \in \Omega \text{ fest} \quad (6.26)$$

$$x \in \Omega \text{ fest: } \langle W_n(x), f \rangle := \int_{\mathbb{R}} f dW_n(x) = f(w_n(x)) \quad \dots \text{ messbar auf } \Omega \quad \forall f \in C_0(\mathbb{R}) \quad (6.27)$$

Also: $\{W_n\} \subset L_w^\infty(\Omega; \mathcal{M}(\mathbb{R}))$... schwach* messbare Abbildungen, die (essentiell) beschränkt sind.

Es gilt: $L_w^\infty(\Omega; \mathcal{M}(\mathbb{R})) = L^1(\Omega; C_0(\mathbb{R}))'$ mit Dualität

$$\langle \langle \mu, \varphi \rangle \rangle = \int_{\Omega} \langle \mu(x), \varphi(x) \rangle dx.$$

It. Satz von Alaoglu in $L_w^\infty(\Omega; \mathcal{M}(\mathbb{R}))$: wegen (6.26) $\exists$ Teilfolge

$$W_{n_k} = \delta_{w_{n_k}(\cdot)} \xrightarrow{*} \nu \text{ in } L_w^\infty(\Omega; \mathcal{M}(\mathbb{R})) . \quad (6.28)$$

Norm ist schwach* UHS $\Rightarrow \|\nu(x)\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R})} \leq 1$ für f.a. $x \in \Omega$.

Es gilt sogar $\|\nu(x)\|_{\mathcal{M}(\bar{K})} = 1$ (siehe Ref. in [Mü] Th. 3.1, [RR] §10.2).

Konkretisierung der schwach-* Konvergenz: Seien $g \in L^1(\Omega)$, $f \in C_0(\mathbb{R})$.

Bezeichne³ $g \otimes f \in L^1(\Omega; C_0(\mathbb{R}))$, mit $x \mapsto g(x) f$.

$$\int_{\Omega} g(x) f(w_{n_k}(x)) dx \stackrel{(6.27)}{=} \langle W_{n_k}, g \otimes f \rangle \stackrel{(6.28)}{\longrightarrow} \int_{\Omega} g(x) \underbrace{\langle \nu(x), f \rangle}_{=: \bar{f}(x)} dx, \quad (6.29)$$

also gilt (ii).

Betrachte (6.29) $\forall f \geq 0, g \geq 0$: Linke Seite ist ≥ 0 , und damit auch der Limes rechts. $\Rightarrow \nu(x) \geq 0$ f.ü. (aus Variante des Fundamentallemmas der Variationsrechnung). ■

Bem.: Lineare Hülle von $g \otimes f$ mit $g \in L^1(\Omega), f \in C_0(\mathbb{R})$ ist dicht in $L^1(\Omega; C_0(\mathbb{R})) \Rightarrow$ (6.29) ist äquivalent zu $W_{n_k} \xrightarrow{*} \nu$ in $L_w^\infty(\Omega; \mathcal{M}(\mathbb{R}))$.

Korollar 6.25. Die Folge $\{w_n\} \subset L^\infty(\Omega), w_n : \Omega \rightarrow K$ erzeuge das Young Maß $\nu : \Omega \rightarrow \mathcal{M}(\bar{K})$. $w : \Omega \rightarrow \bar{K}$ sei eine Funktion. Dann gilt:

$$w_n \rightarrow w \text{ im Maß}^4 \Leftrightarrow \nu(x) = \delta_{w(x)} \quad \text{f.ü.}$$

[Die Idee ist also, dass $\{w_n\}$ dann ein ein-punktiges Young Maß $\nu(x)$ generiert.]

Beweis. $\Rightarrow$: Sei $w_n \rightarrow w$ im Maß $\Rightarrow f(w_n) \rightarrow f(w)$ im Maß $\forall f \in C_0(\mathbb{R})$ (da jedes f glm. stetig auf $\text{supp } f$).

Andererseits liefert (6.25): $f(w_{n_k}) \xrightarrow{*} \langle \nu(\cdot), f \rangle$ in $L^\infty(\Omega)$.

Gleichheit der Limiten ergibt $\forall f \in C_0(\mathbb{R}) : \langle \nu(x), f \rangle = f(w(x))$ f.ü. in $\Omega \Rightarrow \nu(x) = \delta_{w(x)}$.

$\Leftarrow$: [Mü] Cor. 3.2 ■

Bemerkung 6.26. 1) Sei $\{w_n\} \subset L^\infty(\Omega; K)$ und zusätzlich $w_n \rightarrow w$ im Maß. Dann: $\nu(x) = \delta_{w(x)}$ (also ein *triviales* Young Maß) und für $f \in C(\bar{K})$:

$$f(w_{n_k}) \xrightarrow{*} \bar{f} \text{ in } L^\infty(\Omega) \quad \text{mit} \quad \bar{f}(x) := \int_{\bar{K}} f d\nu(x) = \int_{\bar{K}} f d\delta_{w(x)} = f(w(x)).$$

Das obige Ziel, $\bar{f}$ mit $f(w)$ zu identifizieren, ist also (trivialerweise) erreicht.

2) Sei $\{w_n\} \subset L^\infty(\Omega; K)$. Dann: $w_{n_k} \xrightarrow{*} w$ in $L^\infty(\Omega)$ und nach dem Fundamentalsatz für $f := \text{id}$:

$$w_{n_k} = f(w_{n_k}) \xrightarrow{*} \bar{f} = \bar{\text{id}}, \quad \bar{\text{id}}(x) := \int_{\bar{K}} \text{id} d\nu(x) = \int_{\bar{K}} p d\nu_x(p),$$

³Für Tensorprodukte, zumindest von Hilberträumen, siehe [RS1, §II.4]

⁴ $w_n \rightarrow w$ im Maß: $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \text{vol } \{x \in \Omega \mid |w_n(x) - w(x)| \geq \varepsilon\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

wobei $\nu_x = \nu(x) \in \mathcal{M}(\overline{K})$. $\Rightarrow$ Limes $w(x) = \int_{\overline{K}} p d\nu_x(p)$.
 Andererseits für $f \in C(\overline{K})$:

$$f(w_{n_k}) \xrightarrow{*} \bar{f}, \quad \bar{f}(x) := \int_{\overline{K}} f d\nu(x) = \int_{\overline{K}} f(p) d\nu_x(p).$$

In diesem Sinne *definieren* wir

$$f(w(x)) := \int_{\overline{K}} f(p) d\nu_x(p), \quad \text{motiviert durch } w(x) = \int_{\overline{K}} p d\nu_x(p).$$

Also: $f(w_{n_k}) \xrightarrow{*} f(w)$ in $L^\infty(\Omega)$, aber “ $f(w)$ ” geeignet definiert (nicht punktweise) !

Beispiel 6.1 (Fortsetzung).

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 u^2 + (u'^2 - 1)^2 dx$$

Sei $\{u_n\}$ beliebige Minimalfolge mit:

$$\mathcal{F}(u_n) \rightarrow 0, u_n(0) = u_n(1) = 0. \quad (6.30)$$

Ziel: identifiziere Young Maß (für die Ableitung)

Sei $w_n := u'_n \Rightarrow \{w_n\}$ glm. beschränkt in $L^4(0, 1)$.

Sei zusätzlich $\{u_n\}$ so, dass $\{w_n\}$ glm. beschränkt in $L^\infty(0, 1)$; zB Zick-Zack-Funktionen (6.2) mit $K = (-2, 2)$. [Deren schwacher Limes $w \equiv 0$ beinhaltet aber keine Information.]

Diese Annahme kann durch Verallgemeinerung von Satz 6.23 (für messbare $\{w_n\}$) entfernt werden (siehe [Mü]).

$\Rightarrow \exists$ TF $\{w_{n_k}\}$, die ein Young Maß ν erzeugt.

Sei $f(p) := (p^2 - 1)^2$; also $f \in C(\overline{K}) \Rightarrow$

$$\underbrace{\mathcal{F}(u_n)}_{\rightarrow 0} = \int_0^1 u_n^2 + (w_n^2 - 1)^2 dx \geq \int_0^1 \underbrace{f(w_n)}_{\geq 0} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (6.31)$$

Andererseits aus Satz 6.23: $f(w_{n_k}) \xrightarrow{*} \bar{f} \geq 0$ in $L^\infty(0, 1)$, also speziell mit $g \equiv 1$:

$$\int_0^1 f(w_{n_k}(x)) dx \rightarrow \int_0^1 \bar{f}(x) dx \stackrel{(6.31)}{=} 0. \quad (6.32)$$

$\Rightarrow$ Für f.a. $x \in (0, 1)$: $0 = \bar{f}(x) = \langle \nu(x), f \rangle = \int_{\bar{K}} f d\nu(x)$.

Da $f(p) > 0$ für $|p| \neq 1$: $\text{supp } \nu(x) \subset \{-1, 1\}$ für f.a. x .

$$\Rightarrow \nu(x) = \lambda(x)\delta_{-1} + (1 - \lambda(x))\delta_1 \quad \text{f.ü.}$$

Identifikation von λ :

wähle $\tilde{f}(p) := p$ in Satz 6.23:

$$\tilde{f}(w_{n_k}) = w_{n_k} \xrightarrow{*} \langle \nu(x), \tilde{f} \rangle = \int_{\bar{K}} \tilde{f} d\nu(x) = 1 - 2\lambda(x),$$

also speziell mit $g \equiv \chi_{(0,a)} \in L^1(0, 1)$, $a \in (0, 1)$ beliebig:

$$\int_0^a 1 \cdot w_{n_k} dx = u_{n_k}(a) \rightarrow \int_0^a 1 \cdot (1 - 2\lambda(x)) dx$$

Aus (6.30): $u_n \rightarrow 0 := u$ in $L^2(0, 1)$ und TF $u_{n_k} \rightarrow 0$ f.ü. $\Rightarrow \lambda(x) = \frac{1}{2}$ f.ü.

$\Rightarrow \{w_{n_k}\}$ erzeugt das eindeutige (homogene) Young Maß

$$\nu(x) = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1.$$

Wegen Eindeutigkeit des Limes (hier möglich, da $\{u_n\}$ Min.Folge von $\mathcal{F}$) $\Rightarrow$ ganze Folge $\{w_n\}$ erzeugt ν .

Bem: ν beschreibt eine wesentliche Eigenschaft der Minimalfolgen: deren Ableitungen sind (nahe bei) ± 1 , zu gleichen Teilen, in immer feinerer Mischung.

Das Paar (u, ν) kann als verallgemeinerte Lösung von $\mathcal{F}(u) \rightarrow \min$ gesehen werden; (u, ν) kann aber nicht direkt in $\mathcal{F}$ eingesetzt werden. Mit $f(p) := (p^2 - 1)^2$ erhält man aber

$$\int_0^1 u(x)^2 + \underbrace{\langle \nu(x), f \rangle}_{=\bar{f}(x)=0} dx = 0 = \inf \mathcal{F}(u), \quad (6.33)$$

wobei $u'(x)$ durch das Wahrscheinlichkeitsmaß $\nu(x)$ ersetzt wird, und $f(u')$ durch $\langle \nu(x), f \rangle$. Die Kopplung von ν an u erfolgt via

$$u'(x) = \langle \nu_x, id \rangle, \quad (6.34)$$

mit der Notation $\nu_x = \nu(x)$ (siehe Satz 6.26). $\langle \nu_x, id \rangle$ ist der Massenschwerpunkt von ν_x . $\square$

Anwendung: Längenberechnung eines Funktionsgraphen (vgl. Bsp. 5.5):

$$\mathcal{L}(u) := \int_0^1 \sqrt{1 + (u'(x))^2} dx \quad ; \quad \text{also } f(p) = \sqrt{1 + p^2}$$

Für Zick-Zack-Folge (6.2): $\mathcal{L}(u_n) = \sqrt{2}, n \in \mathbb{N}$; aber für glm. Limesfunktion: $\mathcal{L}(0) = 1$.

Sei nun $w_n := u'_n$ und $\mathcal{L}(u_n) = \int_0^1 g(x) f(w_n) dx$ mit $g \equiv 1$.

Ziel: Die richtige Länge des infinitesimalen Zick-Zack-Limes soll mit Young Maß erhalten werden. Wie in Bsp. 6.1: $\nu(x) = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$ und $f(w_n) \xrightarrow{*} \bar{f}$ in $L^\infty(0, 1)$ mit

$$\bar{f}(x) = \int_{\bar{K}} \sqrt{1 + p^2} d\nu_x(p) = \sqrt{2}, \quad x \in (0, 1)$$

Erweiterung des Funktional $\mathcal{L}$ für Young Maße liefert (wie in (6.33)):

$$“\mathcal{L}(u, \nu)” = \int_0^1 \underbrace{g(x)}_{\equiv 1} \underbrace{\bar{f}(x)}_{=\langle \nu_x, f \rangle} dx = \sqrt{2} \quad \checkmark \quad \square$$

Für eine vektorwertige Verallgemeinerung von Satz 6.23 betrachten wir

$$\mathcal{F}(u) := \int_{\Omega} (f_1(\nabla u) + f_2(u)) dx, \quad u \in W^{1,\infty}(\Omega), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

Sei $\{u_m\} \subset W^{1,\infty}$ eine Minimalfolge mit $u_m \xrightarrow{*} u$ in $W^{1,\infty}(\Omega)$. Dann generiert $\{\nabla u_m\}$ das *Gradienten Young Maß* $\nu: \Omega \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

$\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ kann wieder mit dem Dualraum der *skalaren* Funktionen von $C_0(\mathbb{R}^n)$ identifiziert werden. Mit einem kleinen Missbrauch der Notation werden wir die Dualitätsklammer aber auch für *vektorwertige* Funktionen $f = (f_1, \dots, f_n)^T \in (C_0(\mathbb{R}^n))^n$ verwenden, mit:

$$\langle \nu_x, f \rangle := (\langle \nu_x, f_1 \rangle, \dots, \langle \nu_x, f_n \rangle)^T.$$

Frage: Gibt es einen Zusammenhang zwischen ∇u und ν ?

Ja (siehe [Ca], Th. 2.5; [Mü], § 4):

Satz 6.26. Seien (1) $u_m \xrightarrow{*} u$ in $W^{1,\infty}(\Omega)$ (für $m \rightarrow \infty$),

(2) $\nabla u_m \rightarrow M$ im Maß, mit $M \subset \mathbb{R}^n$ kompakt,

d.h.: $\forall U \supset M$ offen: $\text{vol} \{x \in \Omega \mid \nabla u_m(x) \notin U\} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$.

[Idee: $\text{vol} \{\nabla u_m(x) \in M^c\} \rightarrow 0$; M umfasst die Wertemenge $\nabla u_m(\Omega)$ im Limes.]

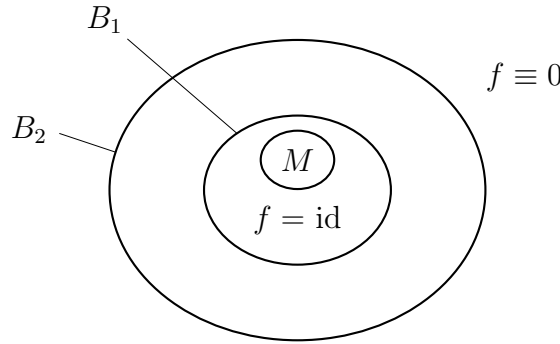
$$\Rightarrow \text{supp } \nu_x \subset M, \quad \nabla u(x) = \langle \nu_x, \text{id} \rangle \quad \text{für f.a. } x \in \Omega.$$

Bem.: Letzte Formel ist mehrdimensionales Analogon von (6.34).

Beweis. (1) analog zu Korollar 6.25 (Dort ist der Limes einpunktig und $\nu(x) = \delta_{w(x)} \cdot$): $\nabla u_m \rightarrow M$ im Maß $\Rightarrow \text{supp } \nu_x \subset M$ (M , als Menge im Wertebereich von ∇u_m , kann auch “zu groß” gewählt sein).

(2) Seien $B_1 \subset B_2$ offene Kugeln in $\mathbb{R}^n$ mit $M \subset B_1 \subset \bar{B}_1 \subset B_2$. Sei $f \in C_0(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $f = \text{id}$ in B_1 , $f \equiv 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus B_2$ und

$$|f(p) - p| \leq |p| \quad \forall p \in \mathbb{R}^n \quad (6.35)$$



Sei $\omega \subset \Omega$ messbar, $\omega_m := \{x \in \omega \mid \nabla u_m(x) \notin B_1\}$. Aus (2) folgt $\text{vol } \omega_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$.

Laut (vektorwertigem Analogon von) Satz 6.23 (da $\nabla u_m \xrightarrow{*} \nabla u$ in $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ und daher beschränkt in $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$):

$f(\nabla u_m) \xrightarrow{*} \bar{f}$ in $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ mit $\bar{f}_j(x) := \langle \nu_x, f_j \rangle; j = 1, \dots, n$ [Konvergenz für jede Komponente]

also mit skalarer Testfunktion $g := \chi_\omega \in L^1(\Omega)$:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\omega} f(\nabla u_m) \, dx = \int_{\omega} \langle \nu_x, f \rangle \, dx. \quad (6.36)$$

Es gilt: $\nabla u_m = f(\nabla u_m)$ in $\omega \setminus \omega_m$; denn dort ist $\nabla u_m \in B_1$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \int_{\omega} (\nabla u_m - f(\nabla u_m)) \, dx \right| &\leq \int_{\omega_m} |\nabla u_m - f(\nabla u_m)| \, dx \\ &\stackrel{(6.35)}{\leq} \int_{\omega_m} |\nabla u_m| \, dx \leq \text{vol}(\omega_m) \underbrace{\|\nabla u_m\|_{L^\infty(\Omega)}}_{\text{beschr.}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\omega} \langle \nu_x, f \rangle \, dx &\stackrel{(6.36)}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\omega} ([f(\nabla u_m) - \nabla u_m] + \nabla u_m) \, dx \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\omega} \nabla u_m \, dx = \int_{\omega} \nabla u \, dx \quad \text{mit } g = \chi_\omega. \end{aligned}$$

Da ω beliebig $\Rightarrow \langle \nu_x, f \rangle = \nabla u(x)$. Da $\text{supp } \nu_x \subset M \subset B_1 \Rightarrow \langle \nu_x, \text{id} \rangle = \nabla u(x)$. ■

Referenzen: [Mü] §3.1-2, [RR] §10.2, [Ev2] §1.5.3

7 Sattelpunktprobleme

Sattelpunktprobleme in Anwendungen:

- instabile Equilibria in physikalischen Systemen
- Variationsformulierung der stationären Stokes Gleichung (§4.3)
- periodische Trajektorien von Hamiltonschen Systemen als SPP des Wirkungsfunktionals (z.B. wenn *nicht* nach unten beschränkt) [St]

generelle Annahmen für §7:

Sei H Hilbertraum mit innerem Produkt $(\cdot, \cdot)$, $\mathcal{F} : H \rightarrow \mathbb{R}$ nichtlineares Funktional.

Sei $\mathcal{F} \in C^1(H, \mathbb{R})$, d.h. $\forall u \in H : \mathcal{F}$ ist Fréchet differenzierbar an u (siehe Def. 2.11) und $D\mathcal{F} : H \rightarrow H$ (mit Riesz-Identifikation des lin. Funktionals) ist stetig.

Notation:

1. $\mathcal{C} := C_{loc}^{1,1}(H, \mathbb{R})$, also $D\mathcal{F}$ lokal Lipschitz stetig
2. Sei $c \in \mathbb{R}$:

$$A_c := \{u \in H \mid \mathcal{F}(u) \leq c\} \quad \dots \quad \text{sub-Niveaumenge (sub level set),}$$

$$K_c := \{u \in H \mid \mathcal{F}(u) = c, D\mathcal{F}(u) = 0\}$$

Definition 7.1. (a) $u_0 \in H$ heißt kritischer Punkt von $\mathcal{F}$, wenn $D\mathcal{F}(u_0) = 0$.

(b) $c \in \mathbb{R}$ heißt kritischer Wert von $\mathcal{F}$, wenn $\exists u_0 \in H$ mit $D\mathcal{F}(u_0) = 0$ und $\mathcal{F}(u_0) = c$ (also $K_c \neq \{\}$).

(c) $u_0 \in H$ heißt Sattelpunkt, wenn $D\mathcal{F}(u_0) = 0$ und für jede Umgebung $U(u_0)$ gilt: $\exists u_{1,2} \in U(u_0)$, sodass $\mathcal{F}(u_1) < \mathcal{F}(u_0) < \mathcal{F}(u_2)$.

kritische Punkte: lokale Extrema oder Sattelpunkte.

7.1 “Mountain-Pass” Theorem

Satz 7.2 (endlich-dim. MPT). Sei $\mathcal{F} \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ koerziv (im Sinn von Def. 6.3: jede Folge in A_c hat HP). $\mathcal{F}$ habe 2 strikte lokale Minimalstellen $x_1 \neq x_2$.

$\Rightarrow \mathcal{F}$ hat einen 3. kritischen Punkt x_3 , der keine lokale Minimalstelle ist und durch das Minimax Prinzip charakterisiert ist:

$$\mathcal{F}(x_3) = \inf_{g \in \Gamma} \max_{x \in g} \mathcal{F}(x)$$

mit

$$\Gamma = \{g \subset \mathbb{R}^n \mid x_1, x_2 \in g; g \text{ ist kompakt, zusammenhängend}\}$$

die Menge der Pfade von x_1 nach x_2 .

Beweis. [St] §II.1; Spezialfall von Satz 7.8 ■

- MPT ist eines der wenigen Ergebnisse über Existenz von Sattelpunkten.
- Startpunkt für robusten numerischen Algorithmus (“Mountain-Pass Algorithmus”)

Beispiel 7.3. $\mathcal{F}(x, y) := e^{-y} - x^2$. $A_0 := \{(x, y) \mid \mathcal{F}(x, y) \leq 0\}$ nicht zusammenhängend. $\exists$ Pfadfolge g_m , die beide Komponenten von A_0 verbindet, und fallendem Max: $\max_{z \in g_m} \mathcal{F}(z) = \mathcal{F}(z_m)$, $z_m = (0, m)$,

$$\mathcal{F}(z_m) = e^{-m} \rightarrow 0, \quad D\mathcal{F}(z_m) = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^{-m} \end{pmatrix} \rightarrow 0$$

Also ist $\{z_m\}$ *kritische Folge* (d.h. $|\mathcal{F}(z_m)| < C$, $D\mathcal{F}(z_m) \rightarrow 0$), aber $\nexists$ “Mountain Pass” der minimalen Höhe 0.

Grund: fehlende Kompaktheit von $\{z_m\}$ bzw. fehlende Koerzivität von $\mathcal{F}$. □

Kompaktheitsbedingung für kritische Folgen für $\dim H = \infty$:

Definition 7.4. $\mathcal{F} \in C^1(H, \mathbb{R})$ erfüllt die Palais-Smale Kompaktheitsbedingung (PS), falls jede Folge $\{u_n\} \subset H$ mit

- (i) $\{\mathcal{F}(u_n)\}$ beschränkt und
- (ii) $D\mathcal{F}(u_n) \rightarrow 0$ in H

in H präkompakt ist (also eine konvergente Teilfolge enthält).

Bemerkung 7.5. 1. Sei u_0 Limes solch einer TF $\Rightarrow D\mathcal{F}(u_0) = 0$ (also kritischer Punkt), wegen Stetigkeit von $D\mathcal{F}$.
 2. (PS) viel schwächer als Koerzivität: Präkompaktheit wird nur für viel speziellere “Palais-Smale Folgen” gefordert.

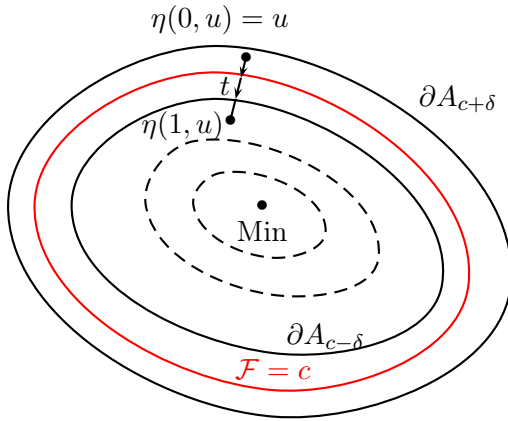
Lemma 7.6. $\mathcal{F} \in C^1(H, \mathbb{R})$ erfülle (PS). $\Rightarrow \forall c \in \mathbb{R}$ gilt: $K_c = \{\mathcal{F}(u) = c, D\mathcal{F}(u) = 0\}$ ist kompakt.

Beweis. trivial aus Def. 7.4 ■

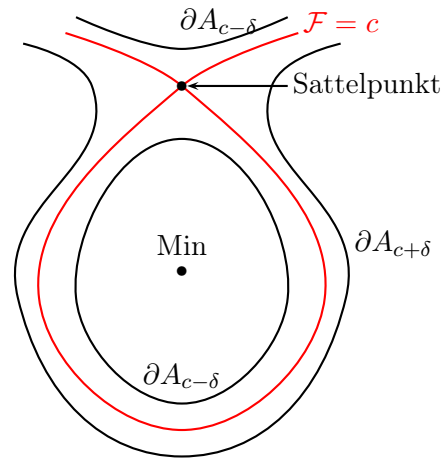
Idee vom Deformationssatz:

Falls c kein kritischer Wert von $\mathcal{F}$ ist, kann die Sub-Niveaumenge $A_{c+\delta}$ stetig in $A_{c-\delta}$ deformiert werden.

Niveaulinien von $\mathcal{F}$:



$K_c = \{\}$: $\exists$ stetige Deformation
von $A_{c+\delta}$ in $A_{c-\delta}$



$K_c \neq \{\}$: $\nexists$ stetige Deformation

Deformationsabbildung: $\eta(t, u), t \in [0, 1] : \eta(0, u) = u$.

Deformation jeweils in Gradientenrichtung $-D\mathcal{F}(\eta(t))$

$\Rightarrow$ Pfade mit steilstem Abstieg

Satz 7.7 (Deformationssatz). $\mathcal{F} \in \mathcal{C} := C_{\text{loc}}^{1,1}(H, \mathbb{R})$ erfülle (PS). Sei $K_c = \{\}$. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ hinreichend klein: $\exists 0 < \delta < \varepsilon, \exists$ Fkt. $\eta = \eta(t, u), \eta \in C([0, 1] \times H, H)$ mit

- (i) $\eta(0, u) = u \quad \forall u \in H$,
- (ii) $\eta(1, u) = u \quad \forall u \in H \setminus \mathcal{F}^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$,
- (iii) $\mathcal{F}(\eta(t, u)) \leq \mathcal{F}(u) \quad \forall u \in H, 0 \leq t \leq 1$,
- (iv) $\eta(1, A_{c+\delta}) \subset A_{c-\delta}$.

Beweis. Schritt 1:

Beh: Da $K_c = \{\}$, $\exists \sigma > 0$ und $\varepsilon \in (0, 1)$ mit

$$\|D\mathcal{F}(u)\| \geq \sigma \quad \forall u \in A_{c+\varepsilon} \setminus A_{c-\varepsilon} \quad (\text{gleichmäßige untere Schranke an } D\mathcal{F}) \quad (7.1)$$

Gegenannahme: $\exists$ Folgen $\sigma_k \rightarrow 0$, $\varepsilon_k \rightarrow 0$ und $\underbrace{u_k \in A_{c+\varepsilon_k} \setminus A_{c-\varepsilon_k}}_{\text{VS für (PS)}}$ mit $\|D\mathcal{F}(u_k)\| \leq \sigma_k$.

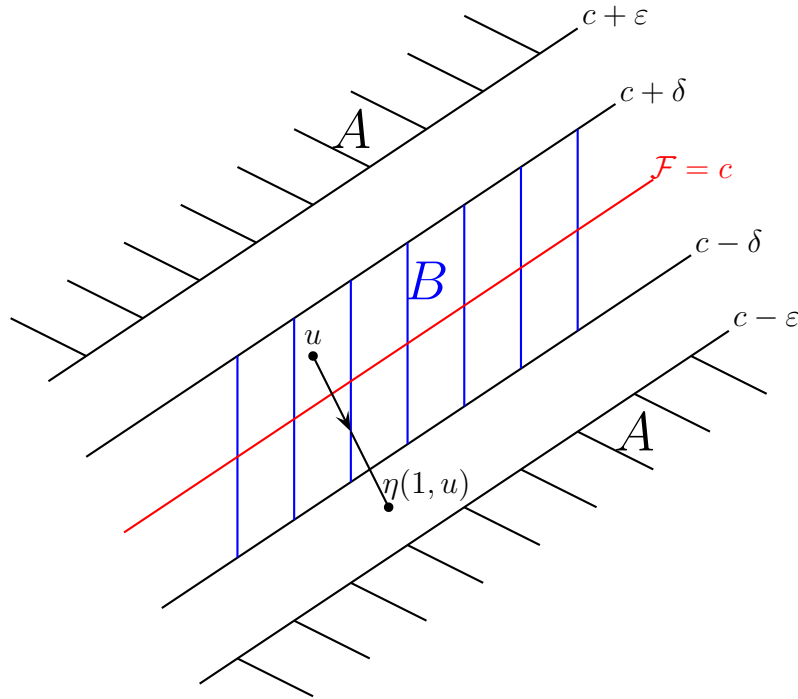
Laut (PS): $\exists u \in H, \exists$ Teilfolge $u_{k_j} \rightarrow u$ in H .

Da $\mathcal{F} \in C^1(H, \mathbb{R}) : \mathcal{F}(u) = c, D\mathcal{F}(u) = 0 \Rightarrow K_c \neq \{\} \Rightarrow \text{Wid.}$

Schritt 2: Wähle $\delta \in (0, \varepsilon)$, sodass $\delta \leq \frac{\sigma^2}{2}$.

$$A := \{u \in H \mid \mathcal{F}(u) \leq c - \varepsilon \text{ oder } \mathcal{F}(u) \geq c + \varepsilon\},$$

$$B := \{u \in H \mid c - \delta \leq \mathcal{F}(u) \leq c + \delta\}$$



Da $D\mathcal{F}$ beschränkt auf beschr. Mengen: Abb. $u \mapsto \text{dist}(u, A) + \text{dist}(u, B)$ nach unten beschr. durch pos. Konst. $\forall$ beschr. Menge von H .

$$g(u) := \frac{\text{dist}(u, A)}{\text{dist}(u, A) + \text{dist}(u, B)} \quad \forall u \in H$$

erfüllt: $0 \leq g \leq 1, g \equiv 0$ auf $A, g \equiv 1$ auf B

Sei

$$h(\tau) := \begin{cases} 1, & 0 \leq \tau \leq 1 \\ \frac{1}{\tau}, & \tau \geq 1 \end{cases} \quad (7.2)$$

def. Vektorfeld in Abstiegsrichtung, $V : H \rightarrow H$,

$$V(u) := - \underbrace{g(u)h(\|D\mathcal{F}(u)\|)}_{\leq 1} D\mathcal{F}(u) \quad , \quad \forall u \in H.$$

$V \dots$ nichtlin. beschränkte Abb. (da $D\mathcal{F}$ beschr. auf beschr. Mengen)

Schritt 3: Konstruktion von $\eta(t) = \eta(t, u)$: Betrachte $\forall u \in H$ die GDGl:

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{dt}(t) = V(\eta(t)) & , \quad t > 0 \\ \eta(0) = u. \end{cases}$$

da V beschr, Lip.-stetig auf beschr. Mengen (da $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$): $\exists!$ Lösung $\forall t > 0$.

$\eta \in C([0, 1] \times H, H)$ erfüllt (i), (ii), da $V \equiv 0$ auf A (da $g|_A \equiv 0$).

Schritt 4: Mit $\eta = \eta(t, u)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{F}(\eta) &= \left(D\mathcal{F}(\eta), \frac{d}{dt}\eta \right) \\ &= (D\mathcal{F}(\eta), V(\eta)) \\ &= - \underbrace{g(\eta)h(\|D\mathcal{F}(\eta)\|)}_{\geq 0} \|D\mathcal{F}(\eta)\|^2 \leq 0, 0 \leq t \leq 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ (iii) $\checkmark$.

Schritt 5: für (iv) wähle $u \in A_{c+\delta}$ fest.

z.z: $\eta(1, u) \in A_{c-\delta}$, also $\mathcal{F}(\eta(1, u)) \leq c - \delta$.

Sei $u \in B \subset A_{c+\delta}$, sonst nichts z.z.

AN: Sei ganze Trajektorie in B (also insbes. $\mathcal{F}(\eta(1, u)) \geq c - \delta$), sonst nichts mehr z.z.
Dort ist $g \equiv 1$, also

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(\eta) = -h(\|D\mathcal{F}(\eta)\|)\|D\mathcal{F}(\eta)\|^2, \quad 0 < t < 1. \quad (7.3)$$

(a) für jene η auf Trajektorie, mit $\|D\mathcal{F}(\eta)\| \geq 1$ gilt:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(\eta) \stackrel{(7.2)}{=} -\|D\mathcal{F}(\eta)\|^2 \stackrel{(7.1)}{\leq} -\sigma \stackrel{\sigma \leq 1}{\leq} -\sigma^2 \quad (7.4)$$

(b) für jene η auf Trajektorie, mit $\|D\mathcal{F}(\eta)\| \leq 1$ gilt:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(\eta) \stackrel{(7.2)}{=} -\|D\mathcal{F}(\eta)\|^2 \leq -\sigma^2 \quad (7.5)$$

aus (7.3)-(7.5):

$$\mathcal{F}(\eta(1, u)) \leq \mathcal{F}(u) - \sigma^2 \leq c + \delta - \sigma^2 \stackrel{\delta \leq \frac{\sigma^2}{2}}{\leq} c - \delta \quad \checkmark \quad \blacksquare$$

Satz 7.8 (Mountain-Pass Theorem; Ambrosetti-Rabinowitz 1973). $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ erfülle (PS). Weiters gelte

- (i) $\mathcal{F}(0) = 0$,
- (ii) $\exists$ Konstanten $r, a > 0$ mit $\mathcal{F}(u) \geq a$ für $\|u\| = r$,
- (iii) $\exists u_1 \in H$ mit $\|u_1\| > r, \mathcal{F}(u_1) \leq 0$.

$$\Rightarrow c := \inf_{g \in \Gamma} \max_{0 \leq s \leq 1} \mathcal{F}(g(s)) \geq a > 0$$

ist kritischer Wert, mit der Menge der Pfade von 0 nach u_1 :

$$\Gamma := \{g \in C([0, 1], H) \mid g(0) = 0, g(1) = u_1\}.$$

Bemerkung 7.9. MPT liefert nur einen kritischen Punkt mit Funktionalwert c ; muss nicht notwendigerweise Sattelpunkt sein.

Beweis. Klarerweise $c \geq a$.

AN: Sei c kein kritischer Wert von $\mathcal{F}$, also $K_c = \{\}$. Wähle $0 < \varepsilon < \frac{a}{2}$ hinreichend klein.

Laut Satz 7.7: $\exists 0 < \delta < \varepsilon$ und eine stetige Abbildung $\eta = \eta(t = 1, \cdot) : H \rightarrow H$ mit $\eta(A_{c+\delta}) \subset A_{c-\delta}$ und

$$\eta(u) = u \quad \forall u \in H \setminus \mathcal{F}^{-1}(\underbrace{[c - \varepsilon, c + \varepsilon]}_{>0}). \quad (7.6)$$

Wähle einen Pfad $g \in \Gamma$ mit

$$\max_{0 \leq s \leq 1} \mathcal{F}(g(s)) \leq c + \delta. \quad (7.7)$$

Für folgenden weiteren Pfad gilt: $\hat{g} := \eta \circ g \in \Gamma$, da $\eta(g(0)) = \eta(0) = 0$ und $\mathcal{F}(0) = 0$, $\eta(g(1)) = \eta(u_1) = u_1$ wegen $\mathcal{F}(u_1) \leq 0$, (7.6).

Aus (7.7) folgt $g \subset A_{c+\delta}$. Wegen $\eta(A_{c+\delta}) \subset A_{c-\delta}$ gilt $\hat{g} \subset A_{c-\delta}$; also

$$\max_{0 \leq s \leq 1} \mathcal{F}(\hat{g}(s)) \leq c - \delta.$$

Daher: $c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{0 \leq s \leq 1} \mathcal{F}(g(s)) \leq c - \delta \dots$ Widerspruch. ■

Referenzen: [Ev1] §8.5, [St] II.1-2, II.6, [Gr] §4

7.2 Anwendung des MPT: semilineare elliptische PDGI

Wir suchen nichttriviale Lösungen von

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{m-2}u =: f(u), & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega \end{cases} \quad (7.8)$$

mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, und $2 < m < \frac{2n}{n-2} =: 2^*$ (bzw. $2 < m < \infty$ falls $n = 1, 2$).

Bem: Für $m = 2$: $\exists$ nicht-triviale Lösung $\Leftrightarrow 1$ ist Eigenwert von $-\Delta$ auf $H_0^1(\Omega)$.

Diese Lösung $u \not\equiv 0$ wird erhalten als kritischer Punkt (via MPT) von

$$\mathcal{F}(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{m} \int_{\Omega} |u|^m dx =: \underbrace{\mathcal{F}_1(u)}_{\geq 0} - \underbrace{\mathcal{F}_2(u)}_{\geq 0}, \quad u \in H_0^1(\Omega) \quad (7.9)$$

(wohldefiniert wegen Sobolev Einbettung (5.1): $|\mathcal{F}(u)| < \infty$). (7.8) ist zugehörige EL-Gl.

Bemerkung 7.10.

$$\inf_{H_0^1} \mathcal{F} = -\infty, \quad \sup_{H_0^1} \mathcal{F} = \infty, \quad (\text{durch Skalierung; verschiedene Homogenitäten})$$

also kann $\mathcal{F}$ auf H_0^1 nicht minimiert werden.

Satz 7.11. $\exists$ schwache Lösung $0 \not\equiv u \in H_0^1(\Omega)$ von (7.8) (und damit auch $-u$).

Beweis. Sei $H = H_0^1(\Omega)$ mit $\|u\|_H^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$ und

$$(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx. \quad H' =: H^{-1}(\Omega).$$

Schritt 1: z.z: $\mathcal{F} \in \mathcal{C} := C_{loc}^{1,1}(H, \mathbb{R})$.

Zunächst gilt $D\mathcal{F}(\cdot) : H \rightarrow H'$. Mit der Riesz-Identifikation gilt aber auch $D\mathcal{F}(\cdot) : H \rightarrow H$, und damit kann einfacher gerechnet werden.

$$D\mathcal{F}_1(u)(v) = (u, v) \quad \forall v \in H \quad \left(= - \int \Delta u v dx \quad \text{falls } u \in H_0^1 \cap H^2 \right).$$

Also: $D\mathcal{F}_1(u) = u \in H$ (mit Riesz-Identifikation bez. $(\cdot, \cdot)$). $\Rightarrow \mathcal{F}_1 \in \mathcal{C}$.

$\mathcal{F}_2$ ist Fréchet differenzierbar, und $D\mathcal{F}_2(\cdot) : H \rightarrow H'$ hat die Darstellung

$$D\mathcal{F}_2(u)(v) = \int \underbrace{|u|^{m-2}u}_{=f(u)} v dx \quad \forall v \in H \hookrightarrow L^{2^*} \quad (\text{zunächst nur formale Rechnung}). \quad (7.10)$$

nun Rechtfertigung:

$\forall u \in H \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, wobei $2^* = \frac{2n}{n-2}$ der *kritischer Sobolev Exponent* ist.

$$\Rightarrow \text{Wegen} \quad (m-1) \frac{2n}{n+2} < \frac{n+2}{n-2} \cdot \frac{2n}{n+2} = 2^* \quad (7.11)$$

gilt: $|f(u)| = |u|^{m-1} \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega) = L^{(2^*)'}(\Omega)$. Die rechte Seite von (7.10) ist also wohldefiniert (mit Hölder), und $D\mathcal{F}_2(u) \in H'$.

Die Inklusion $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ impliziert für die Dualräume:

$$f(u) \in L^{(2^*)'}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega). \quad (7.12)$$

Wir definieren die Abbildung $K : H^{-1}(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$, $H^{-1}(\Omega) \ni v^* \mapsto v = Kv^* \in H$ als eindeutige schwache Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta v = v^*, & \Omega \\ v = 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Es gilt also $(v, w) = \langle v^*, w \rangle_{H^{-1}} \forall w \in H_0^1$, und mit Riesz ist K eine Isometrie.

Also $D\mathcal{F}_2 : H \rightarrow H$ mit $D\mathcal{F}_2(u) = K(|u|^{m-2}u) \in H$ (mit Riesz-Identifikation), da:

$$(K \underbrace{f(u)}_{\in H^{-1}}, v) := \int \nabla(Kf(u)) \cdot \nabla v dx = - \int \Delta(Kf(u)) v dx = \int \underbrace{f(u)}_{\in L^{\frac{2n}{n+2}}} v dx = D\mathcal{F}_2(u)(v).$$

$$\begin{aligned} \|D\mathcal{F}_2(u)\|_H &\stackrel{K \text{ Isometrie}}{=} \|f(u)\|_{H^{-1}} \stackrel{(7.12)}{\leq} C \|f(u)\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}} \\ &\stackrel{(7.11)}{\leq} C \|u\|_{L^{2^*}}^{m-1} \stackrel{\text{Sobolev}}{\leq} C \|u\|_{H_0^1}^{m-1}; \end{aligned}$$

also ist $D\mathcal{F}_2$ eine beschränkte (nichtlineare) Abbildung (d.h. beschränkte Mengen werden auf beschränkte Mengen abgebildet).

Analog: $D\mathcal{F}_2 : H \rightarrow H$ ist lokal Lipschitz.

Schritt 2: zz: $\mathcal{F}$ erfüllt (PS).

Sei $\{u_k\} \subset H_0^1(\Omega)$ eine kritische Folge, d.h. $\{\mathcal{F}(u_k)\}$ beschränkt und

$$D\mathcal{F}(u_k) \rightarrow 0 \quad \text{in } H_0^1(\Omega). \quad (7.13)$$

Es ist also zu zeigen, dass $\{u_k\}$ präkompakt ist.

Aus (7.13):

$$D\mathcal{F}_1(u_k) - D\mathcal{F}_2(u_k) = u_k - K(f(u_k)) \rightarrow 0 \text{ in } H. \quad (7.14)$$

Durch Anwenden von $(\cdot, v)$ gilt $\forall \varepsilon > 0$:

$$\left| \int_{\Omega} \nabla u_k \cdot \nabla v - f(u_k) v dx \right| = |(D\mathcal{F}(u_k), v)| \stackrel{(7.13)}{\leq} \varepsilon \|v\|_H$$

für k groß genug (glm. in $v \in H$).

Setze $v = u_k$. $\Rightarrow$

$$\left| \int_{\Omega} |\nabla u_k|^2 - f(u_k) u_k dx \right| \leq \varepsilon \|u_k\|_H, \quad k \text{ groß.}$$

Sei speziell $\varepsilon = 1$:

$$\int_{\Omega} \underbrace{f(u_k) u_k}_{=|u_k|^m} dx \leq \|u_k\|_H^2 + \|u_k\|_H, \quad k \text{ groß.} \quad (7.15)$$

Lt. VS gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u_k) &= \frac{1}{2} \|u_k\|_H^2 - \frac{1}{m} \int_{\Omega} |u_k|^m dx \leq \frac{C}{2} < \infty \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \|u_k\|_H^2 &\leq C + \frac{2}{m} \int_{\Omega} |u_k|^m dx \stackrel{(7.15)}{\leq} C + \frac{2}{m} (\|u_k\|_H^2 + \|u_k\|_H) \end{aligned}$$

Da $\frac{2}{m} < 1$: $\{u_k\}$ beschränkt in H .

Lt. Alaoglu: $\exists$ TF $\{u_{k_j}\}$ mit $u_{k_j} \rightharpoonup u \in H$.

Lt. Rellich-Kondrachov (5.3): $u_{k_j} \rightarrow u$ in $L^m(\Omega)$, da $m < 2^*$.

$\Rightarrow$ (mit (7.11), (7.12)): $f(u_{k_j}) \rightarrow f(u)$ in $L^{\frac{2n}{n+2}} \subset H^{-1}(\Omega)$,

$K(f(u_{k_j})) \rightarrow K(f(u))$ in $H_0^1(\Omega)$

$\Rightarrow$ (mit (7.14)): $u_{k_j} \rightarrow K(f(u))$ in $H_0^1(\Omega)$,

also (PS) $\checkmark$

Bem: Es folgt auch $K(f(u)) = u \in H$, was unserem Ergebnis in Schritt 4 gleicht. Die Existenz einer kritischen Folge mit Limes $u \neq 0$ ist aber offen!

Schritt 3: weitere VSen für MPT:

$$\mathcal{F}(0) = 0 \quad \checkmark$$

Sei $u \in H$ mit $\|u\|_H = r > 0$; r wird unten gewählt.

$$\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}_1(u) - \mathcal{F}_2(u) = \frac{r^2}{2} - \mathcal{F}_2(u).$$

$$|\mathcal{F}_2(u)| = \frac{1}{m} \|u\|_{L^m}^m \stackrel{m < 2^*, \text{ Sobolev}}{\leq} C \|u\|_{H_0^1}^m = Cr^m$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(u) \geq \frac{r^2}{2} - Cr^m \stackrel{2 < m}{\geq} \frac{r^2}{4} =: a > 0 \text{ für } r \text{ klein genug und } \forall u \text{ mit } \|u\|_H = r.$$

Wähle ein $0 \neq u \in H$. Sei $u_1 := tu$, $t > 0$.

$$\Rightarrow \mathcal{F}(u_1) = t^2 \mathcal{F}_1(u) - \frac{t^m}{m} \int_{\Omega} |u|^m dx < 0 \quad \text{und} \quad \|u_1\|_H > r \quad \text{für } t \text{ groß, da } 2 < m.$$

Schritt 4: Lt. MPT (Satz 7.8): $\exists$ kritischer Wert $c \geq a > 0$, also $\exists 0 \neq u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$D\mathcal{F}(u) = u - K(f(u)) = 0, d.h.$$

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f(u) v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Also, $u \neq 0$ ist schwache Lösung von (7.8). ■

Bemerkung 7.12. Für $m = \frac{2n}{n-2} = 2^*$ erfüllt $\mathcal{F}$ (PS) *nicht*. Folgt aus nächstem Satz mit $\lambda = 0$ (sonst gäbe es auch für $m = \frac{2n}{n-2}$ nicht-triviale Lösung von (7.8)).

Satz 7.13. Sei $\lambda \geq 0$; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) beschränkt, sternförmig bez. $0 \in \mathbb{R}^n$ (d.h. $x \cdot \nu(x) > 0$, $\forall x \in \partial\Omega$) mit $\partial\Omega$ glatt. $\Rightarrow$

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u &= |u|^{\frac{4}{n-2}} u, & \Omega \\ u &= 0, & \partial\Omega \end{cases} \quad (7.16)$$

hat nur die schwache Lösung $u \equiv 0$.

Beweis. aus elliptischer Regularität: u ist glatt auf $\bar{\Omega}$; das rechtfertigt folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} 0 &= (\Delta u - \lambda u + |u|^{\frac{4}{n-2}} u) x \cdot \nabla u \\ &= \operatorname{div} \left[\nabla u (x \cdot \nabla u) - \frac{x}{2} |\nabla u|^2 - \underbrace{\frac{\lambda}{2} x |u|^2 + \frac{n-2}{2n} x |u|^{\frac{2n}{n-2}}}_{=0, \partial\Omega} \right] \\ &\quad + \frac{n-2}{2} |\nabla u|^2 + \frac{\lambda n}{2} |u|^2 - \frac{n-2}{2} |u|^{\frac{2n}{n-2}} \quad \left| \int_{\Omega} dx \right. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{n-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{\lambda n}{2} \int_{\Omega} |u|^2 \, dx - \frac{n-2}{2} \int_{\Omega} |u|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 x \cdot \nu \, dS}_{\text{Randterm zu ersten beiden Termen innerhalb von div}} = 0. \quad (7.17)$$

Das gilt, da $u|_{\partial\Omega} = 0$ (also $\partial\Omega$ Niveaufläche von u); $\nabla u \parallel \nu$, $|\nabla u| = \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|$ auf $\partial\Omega$.

$$\Rightarrow x \cdot \nabla u = x \cdot \nu \frac{\partial u}{\partial \nu} \Rightarrow \left[\nabla u (x \cdot \nabla u) - \frac{x}{2} |\nabla u|^2 \right] \cdot \nu = \frac{1}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 x \cdot \nu \text{ auf } \partial\Omega.$$

Multipliziere (7.16) mit u :

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \lambda \int_{\Omega} |u|^2 \, dx - \int_{\Omega} |u|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx = 0. \quad (7.18)$$

Linearkombination von (7.17), (7.18):

$$2\lambda \int_{\Omega} |u|^2 \, dx + \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 \underbrace{x \cdot \nu}_{>0} \, dS = 0.$$

Falls $\lambda > 0 \Rightarrow u \equiv 0$.

Falls $\lambda = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} \equiv 0$. Mit $u|_{\partial\Omega} \equiv 0$ lässt sich $u \equiv 0$ zeigen.

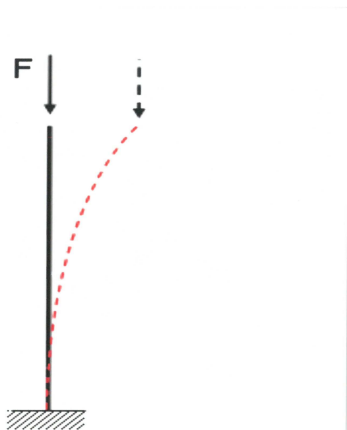
Details: [Jo] Th. II.9.3.4, [St] §III.1 ■

Referenzen: [Ev1] §8.5.2, [Gr] §4, [St] §II.6

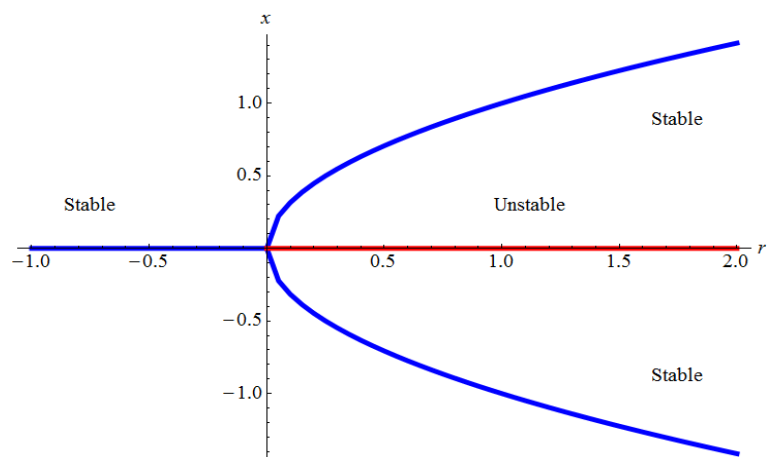
8 Parameter-abhängige Variationsprobleme, Verzweigungstheorie

Inhalt: parameter-abhängige Euler-Lagrange Gleichungen; Verzweigungstheorie
Frage: Ausgehend von einem parameter-abhängigen Variationsproblem studieren wir die Struktur der Lösungen für die Euler-Lagrange Gleichungen.

Bsp: Eulerscher Knickstab



vertikale Kraft $\lambda = F$;
Stab knickt für $\lambda > \lambda_0$



Heugabelverzweigung mit Parameter $r := \lambda - \lambda_0$

Für $\lambda < \lambda_0$ ist die vertikale Position des Stabs stabil, für $\lambda > \lambda_0$ die nach links bzw. rechts ausgelenkte Position.

8.1 Verzweigungsprobleme in der Variationsrechnung

Definiere das Variationsintegral

$$\mathcal{F} : U \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(u, \lambda) \mapsto \mathcal{F}(u, \lambda) := \int_a^b F(x, u(x), u'(x), \lambda) \, dx,$$

welches nun vom Parameter $\lambda \in \Lambda$ abhängt.

Generelle Annahmen für §8.1:

- Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall; $u \in X := C^1([a, b], \mathbb{R}^N)$ und

$$1 - \text{Graph}(u) := \{(x, u(x), u'(x)) \mid x \in [a, b]\} \dots \text{kompakt.}$$

- Seien $V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ und $\Lambda \subset \mathbb{R}^l$ offene Teilmengen. Die Lagrange Funktion erfülle $F \in C^1(V \times \Lambda, \mathbb{R})$ und $U := \{u \in X \mid 1 - \text{Graph}(u) \subset V\}$.

Satz 8.1. *Zusätzlich zu den generellen Annahmen sei $\frac{\partial F}{\partial p_i} \in C^1(V \times \Lambda)$, $i = 1, \dots, N$. Sei $\lambda_0 \in \Lambda$ und $u_0 \in C^2((a, b), \mathbb{R}^N) \cap C^1([a, b], \mathbb{R}^N)$ eine Funktion, sodass*

$$\delta \mathcal{F}(u_0, \lambda_0, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in C_0^\infty((a, b), \mathbb{R}^N).$$

- (i) *Dann erfüllt der stationäre Punkt u_0 die Euler-Lagrange Gleichungen (EL-Gl.) von $\mathcal{F}$:*

$$L_F(u_0, \lambda_0) = 0 \tag{8.1}$$

mit dem Euler-Operator $L_F(\cdot, \lambda_0) : C^s((a, b), \mathbb{R}^N) \rightarrow C^{s-2}((a, b), \mathbb{R}^N)$, $s \geq 2$:

$$(L_F(u, \lambda_0))_i(x) = \frac{\partial F}{\partial z_i}(x, u(x), u'(x), \lambda_0) - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial p_i}(x, u(x), u'(x), \lambda_0) \right], \quad i = 1, \dots, N.$$

- (ii) *Im Falle $\det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j}(x, u(x), u'(x), \lambda_0) \right) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$ kann die EL-Gleichung nach $u''(x)$ aufgelöst werden:*

$$\begin{aligned} u_j''(x) &= - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial p} \right)^{-1}_{ji} \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial z_k \partial p_i} u_k' + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial z_i} \right\}(x, u(x), u'(x), \lambda_0) \\ &=: f_j(x, u(x), u'(x), \lambda_0). \end{aligned} \tag{8.2}$$

Beweis. siehe Satz 2.23 und die nachfolgende Zusammenfassung. ■

Ziele: Studiere die Parameterabhängigkeit der Lösungen von (8.1) mittels Verzweigungstheorie.

Identifiziere Verzweigungspunkte von λ , d.h. Werte für λ , für die sich die Struktur der Lösungsmenge ändert und studiere diese Struktur (z.B. Anzahl der stationären Punkte).

Zusammenhang zwischen Verzweigungstheorie und Jacobi-Theorie aus §3.3:

Sei $\lambda_0 \in \Lambda$ und u_0 ein stationärer Punkt von $\mathcal{F}(u, \lambda_0)$, sodass die strikte Legendre-Hadamard Bedingung (sLHB) gilt:

$$\exists \kappa > 0 : \quad \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_k}(x, u_0(x), u'_0(x), \lambda_0) \geq \kappa I \quad \forall x \in [a, b]. \quad (8.3)$$

Laut Satz 3.25¹ entscheidet die strikte Jacobi-Bedingung (sJB) über die Minimierungseigenschaft von u_0 .

Unter der Annahme der sLHB (8.3) ist die sJB äquivalent zur positiven Definitheit der zweiten Variation, d.h. $\delta^2 \mathcal{F}(u_0, \lambda_0, \xi) > 0$ für alle $0 \neq \xi \in X_0$ (Satz 3.26).

Wir definieren analog zu den Definitionen 3.16 und 3.17:

Definition 8.2. Sei $\lambda_0 \in \Lambda$ und u_0 ein stationärer Punkt von $\mathcal{F}(u, \lambda_0)$.

1. Das akzessorische Integral von $\mathcal{F}$ bezüglich u_0 ist für $\xi \in X_0 := \{v \in X \mid v(a) = v(b) = 0\}$ definiert als

$$\mathcal{Q}(\xi) := \delta^2 \mathcal{F}(u_0, \xi) \stackrel{(3.3)}{=} \int_a^b Q(x, \xi(x), \xi'(x)) dx$$

mit der akzessorischen Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} Q(x, z, p) &= z^T \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(x, u_0(x), u'_0(x), \lambda_0) z \\ &\quad + 2z^T \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial p}(x, u_0(x), u'_0(x), \lambda_0) p + p^T \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(x, u_0(x), u'_0(x), \lambda_0) p. \end{aligned}$$

2. Eine Fkt. $\varphi \in X$ heißt Jacobi-Feld längs u_0 , wenn φ die Jacobi-Gleichung von $\mathcal{F}$ bez. u_0 erfüllt, d.h.

$$0 = -\frac{1}{2} L_Q(u_0, \lambda_0) \varphi = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial Q}{\partial p}(x, \varphi, \varphi') \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial z}(x, \varphi, \varphi'). \quad (8.4)$$

Bemerkung 8.3. Der (lineare) *Jacobi-Operator* L_Q ist die Linearisierung des (i.A. nicht-linearen) Euler-Operators L_F an u_0 , d.h. $L_Q(u_0, \lambda_0) \varphi = D_u L_F(u_0, \lambda_0) \varphi = \frac{d}{ds} L_F(u_0 + s\varphi, \lambda_0)|_{s=0}$. Er hilft daher bei der Analyse von stationären Punkten von $\mathcal{F}$ in Umgebung von (u_0, λ_0) .

- Rolle von Jacobi-Feldern $\varphi \neq 0$ für die Analyse des Bifurkationsproblems:

In endlich-dimensionalen Problemen deutet die Existenz einer nicht-trivialen Lösung von der Linearisierung einer parameter-abhängigen Gleichung $L(u, \lambda_0) = 0$ entweder

¹ $\delta \mathcal{F}(u_0, \xi) = 0 \quad \forall \xi, \text{ sLHB, sJB} \Rightarrow u_0$ ist strikte schwache lokale Minimalstelle.

- a) auf die Existenz einer parameterisierbaren Familie von Lösungen für $L(u, \lambda_0) = 0$ (für Umkehrung siehe Lemma 8.4) oder
- b) auf ein *Verzweigungsphänomen* in Umgebung von λ_0 hin.

Unter bestimmten Bedingungen bleibt dieser Zusammenhang im unendlich-dimensionalen Kontext bestehen. Das Verzweigungsproblem wird in diesem Fall durch eine *Lyapunov-Schmidt Reduktion*² auf ein endlich-dimensionales Problem zurückgeführt (möglich wegen Lemma 8.11).

Lemma 8.4. *Sei $u(x, \tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, eine differenzierbare Familie von Lösungen für (8.1), mit λ_0 fest. Dann ist die Funktion $\frac{\partial u}{\partial \tau}(\tau_0)$ ein Jacobi-Feld längs $u(x, \tau_0)$, $\forall \tau_0 \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Die Funktionen $u(x, \tau)$ erfüllen die EL-Gleichung $L_F(u(x, \tau)) = 0$. Die Ableitung der EL-Gleichung nach τ liefert

$$0 = \frac{\partial}{\partial \tau} L_F(u(x, \tau)) = D_u L_F(u(x, \tau)) \frac{\partial u}{\partial \tau} \stackrel{\text{Bem. 8.3}}{=} L_Q(u(x, \tau)) \frac{\partial u}{\partial \tau}.$$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \tau}$ ist Jacobi-Feld. ■

Referenzen: [Jo] §II.8.1

8.2 Funktionalanalytischer Zugang zur Verzweigungstheorie

Definition 8.5. *Sei Z ein Vektorraum. Wir bezeichnen Z als die direkte Summe, $Z = Z_0 \oplus Z_1$, der abgeschlossenen Teilräume $Z_0 \subset Z$ und $Z_1 \subset Z$, falls für jedes $z \in Z$ eindeutige $z_0 \in Z_0$ und $z_1 \in Z_1$ existieren, sodass $z = z_0 + z_1$.*

Definition 8.6. *Sei Z ein Vektorraum und Y ein Teilraum von Z . Der Quotientenraum Z/Y ist definiert als die Menge der Äquivalenzklassen $Z/\sim$ mit der Äquivalenzrelation $\sim$ auf Z , sodass für $x, y \in Z$ gilt $x \sim y$, falls $x - y \in Y$.*

Äquivalenzklassen für $x \in Z$ werden durch $[x] = \{x + y \mid y \in Y\}$ oder $[x] = x + Y$ bezeichnet.

Lemma 8.7. *Sei Z ein Banachraum und Y ein abgeschlossener Teilraum von Z . Dann ist der Quotientenraum Z/Y mit der Norm $\|[x]\|_{Z/Y} = \inf_{y \in Y} \|x + y\|_Z$ ein Banachraum.*

²Entspricht einer Erweiterung des Satzes über implizite Funktionen zur Lösung von nichtlinearen Gleichungen.

Definition 8.8. Seien Z, W Banachräume. Ein stetiger linearer Operator $T : Z \rightarrow W$ heißt Fredholm Operator, falls

$$(i) \dim(\ker(T)) =: n_K < \infty$$

$$(ii) \operatorname{codim}(\operatorname{ran}(T)) = \dim(W/\operatorname{ran}(T)) =: n_{coK} < \infty \quad [\Rightarrow \operatorname{ran}(T) \text{ ist abgeschlossen.}]$$

Der Index des Fredholm Operators ist als Differenz $n_K - n_{coK}$ definiert.

Beispiel 8.9. $l_2 = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ ist ein Hilbertraum mit Norm $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2)^{1/2}$. Der Shift-Operator $T : l_2 \rightarrow l_2, x = (x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots)$ ist eine surjektive Abbildung mit ein-dimensionalem $\ker(T) = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid x_1 \in \mathbb{R}; x_{j+1} = 0, j \in \mathbb{N}\}$.
 $\Rightarrow$ Der Shift-Operator T ist ein Fredholm Operator mit Index 1.

Satz 8.10. Seien Z, W Banachräume und $T : Z \rightarrow W$ ein Fredholm Operator.
 $\Rightarrow$ Zu den abgeschlossenen Teilräumen $Z_0 := \ker(T) \subset Z$ bzw. $W_1 := \operatorname{ran}(T) \subset W$ existieren abgeschlossene Komplemente $Z_1 \subset Z$ bzw. $W_0 \subset W$, sodass die Zerlegungen

$$Z = Z_0 \oplus Z_1 \quad \text{bzw.} \quad W = W_0 \oplus W_1$$

gelten.

Der eingeschränkte Operator $T : Z_1 \rightarrow W_1$ ist ein Isomorphismus, d.h. der inverse Operator T^{-1} ist ein stetiger linearer Operator.

Lemma 8.11. Sei $F \in C^2(V \times \Lambda, \mathbb{R})$, $\lambda_0 \in \Lambda$, u_0 ein stationärer Punkt von $\mathcal{F}(u, \lambda_0)$, und es gelte die sLHB (8.3). Dann bilden die Jacobi-Felder längs u_0 einen endlich-dimensionalen Vektorraum.

Beweis. Die Jacobi-Gleichung $L_Q(u_0, \lambda_0) \varphi = 0$ ist eine lineare Differentialgleichung für φ .

Aus den Annahmen (8.3) und $F \in C^2(V \times \Lambda, \mathbb{R}) \Rightarrow$ Jacobi-Gleichung nach φ'' auflösbar, ist also äquivalent zu

$$\varphi'' - g(x, u_0, u'_0, \varphi, \varphi', \lambda_0) = 0, \quad (8.5)$$

mit g linear in φ und φ' und stetig in jeder Variable. $\Rightarrow$ Lösungen bilden einen 2D-Vektorraum. ■

In der folgenden Analysis werden wir annehmen, dass der Jacobi-Operator ein Fredholm Operator mit Index Null ist. Das erste Resultat bezieht sich auf Jacobi-Operatoren mit trivialem Kern:

Satz 8.12. Sei $F \in C^2(V \times \Lambda)$, $\lambda_0 \in \Lambda$, $u_0 \in Z := C^2[a, b]$ ein stationärer Punkt von $\mathcal{F}(u, \lambda_0)$ und es gelte die sLHB (8.3). Der Jacobi-Operator $L_Q(u_0, \lambda_0) : Z \rightarrow W := C[a, b]$ sei ein Fredholm Operator mit Index 0 und $\ker(L_Q(u_0, \lambda_0)) = \{0\}$.³

³Beschränktheit von $L_Q(u_0, \lambda_0)$ folgt aus der Wahl von Z, W .

$\Rightarrow \exists$ Umgebungen $U(\lambda_0)$ von λ_0 in Λ und $U(u_0)$ von u_0 in Z , sodass für alle $\lambda \in U(\lambda_0)$ eine eindeutige Lösung $u(\lambda) \in U(u_0)$ von $L_F(u, \lambda) = 0$ existiert.

Also: λ_0 ist kein Verzweigungspunkt.

Beweis. Die Abbildung $L_F : Z \times \Lambda \rightarrow W$, $(u, \lambda) \mapsto L_F(u, \lambda)$ erfüllt $L_F(u_0, \lambda_0) = 0$ und $D_u L_F(u, \lambda_0)|_{u=u_0} = L_Q(u_0, \lambda_0)$.

Laut Annahme an $L_Q(u_0, \lambda_0)$: $n_K = n_{coK} = 0$. $\xRightarrow{\text{Satz 8.10}} L_Q(u_0, \lambda_0)$ ist ein Isomorphismus. Laut Satz über implizite Funktionen (Banachraum Version, [De] Th. 15.1, [Jo] Th. II.2.4.1): $\exists$ Umgebungen $U(\lambda_0) \subset \Lambda$ und $U(u_0) \subset Z$ und eine eindeutige Lösung $u : U(\lambda_0) \rightarrow U(u_0)$, $\lambda \mapsto u(\lambda)$ für $L_F(u, \lambda) = 0$ mit $u(\lambda_0) = u_0$. ■

Im nächsten Schritt betrachten wir für $\lambda_0 \in \Lambda$ einen stationären Punkt $u_0 \in Z$, wobei der Jacobi-Operator ein Fredholm Operator mit Index 0 und $\dim(\ker(L_Q(u_0, \lambda_0))) = 1$ ist (das ist die typische Situation bei Variationsproblemen).

Satz 8.13. Sei $F \in C^2(V \times \Lambda)$, $\lambda_0 \in \Lambda$, $u_0 \in Z$ ein stationärer Punkt von $\mathcal{F}(u, \lambda_0)$ und es gelte die sLHB (8.3). Der Jacobi-Operator $L_Q(u_0, \lambda_0) : Z \rightarrow W$ sei ein Fredholm Operator mit Index 0.

Es soll existieren: Zerlegungen

$$Z = K \oplus Z_1 \quad \text{mit} \quad K := \ker(L_Q(u_0, \lambda_0)) \quad \text{und} \quad Z_1 \subset Z$$

bzw.

$$W = W_0 \oplus W_1 \quad \text{mit} \quad W_1 := \text{ran}(L_Q(u_0, \lambda_0)) \quad \text{und} \quad W_0 = \text{span}[\tilde{w}_0] \subset W$$

für ein $\tilde{w}_0 \neq 0$. Wir definieren die Projektionen

$$\Pi : Z = K \oplus Z_1 \rightarrow K, \quad z = z_0 + z_1 \mapsto z_0$$

bzw.

$$\Pi_W : W = W_0 \oplus W_1 \rightarrow W_0, \quad w = w_0 + w_1 \mapsto w_0.$$

Sei $\dim K = 1$ und $W_0 \cong K$, dann ist $\Pi_W \circ \Pi : Z \rightarrow K$ eine wohldefinierte Projektion. Weiters soll existieren: $0 \neq \xi_0 \in K$ mit

$$-\Pi_W \left(\frac{d^2}{ds^2} L_F(u_0 + s \xi_0, \lambda_0) \Big|_{s=0} \right) =: a_1 \tilde{w}_0 \quad \text{und} \quad 0 \neq a_1 \in \mathbb{R}, \quad (8.6)$$

sowie $\exists \bar{\mu} \in \mathbb{R}^l$, sodass $\lambda_0 + \bar{\mu} \in \Lambda$ und

$$-\Pi_W \left(\frac{d}{ds} L_F(u_0, \lambda_0 + s \bar{\mu}) \Big|_{s=0} \right) =: a_0 \tilde{w}_0 \quad \text{mit} \quad 0 \neq a_0 \in \mathbb{R}. \quad (8.7)$$

$\Rightarrow$ Für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein und $0 < t < \varepsilon$ existieren Umgebungen $U_t(u_0)$ von u_0 in Z , sodass die Anzahl der Lösungen $u \in U_t(u_0)$ von $L_F(u, \lambda_0 + t\bar{\mu}) = 0$ der Anzahl der reellen Lösungen der quadratischen Gleichung $a_0 + a_1\tau^2 = 0$ entspricht (also 0 oder 2 Lösungen).

Also: An λ_0 gibt es eine Verzweigung, da $\bar{\mu} \mapsto -\bar{\mu}$ das Vorzeichen von a_0 umdreht.

Beweis. Es sei oBdA $u_0 \equiv 0$, ansonsten betrachte $\tilde{L}(\tilde{u}, \lambda) := L(u_0 - \tilde{u}, \lambda)$ mit $\tilde{L}(0, \lambda_0) = L(u_0, \lambda_0) = 0$.

1. Reduktion der EL-Gleichungen auf ein endlich-dimensionales Problem:

Lemma 8.14. Die Abbildung $A_{\lambda_0} : Z \rightarrow W$, $u \mapsto L_F(u, \lambda_0) + \Pi u$ (mit $K \cong W_0 \subset W$) ist ein lokaler Diffeomorphismus, in Umgebung von $u = 0$.

Beweis. Die Ableitung von A_{λ_0} an $u_0 = 0$ ist ein linearer Operator

$$D_u A_{\lambda_0}(0) : Z \rightarrow W, v \mapsto L_Q(0, \lambda_0)v + \Pi v.$$

Satz 8.10 $\Rightarrow L_Q(0, \lambda_0) : Z_1 \rightarrow W_1$ ist Isomorphismus.

Annahme $W_0 \cong K \Rightarrow$ Projektion $\Pi|_K : K \subset Z \rightarrow K \subset W$ ist Isomorphismus.

$\Rightarrow D_u A_{\lambda_0}(0)$ ist Isomorphismus zwischen Z und W .

$\Rightarrow A_{\lambda_0}(u)$ ist Diffeomorphismus an $u = 0$.

■

Lemma 8.15. Seien Y_1 und Y_2 Banachräume, $T \in L(Y_1, Y_2)$ und bijektiv, und $S \in L(Y_1, Y_2)$ mit $\|T - S\| \leq \frac{1}{\|T^{-1}\|}$. Dann ist S notwendigerweise bijektiv mit stetiger Umkehrabbildung S^{-1} .

Beweis. siehe [Jo, Lemma II.2.3.4].

■

Betrachte Abbildung

$$\begin{aligned} A : Z \times \Lambda &\rightarrow W \\ (u, \lambda) &\mapsto A(u, \lambda) := L_F(u, \lambda) + \Pi u \end{aligned}$$

Aus Lemma 8.14, Lemma 8.15 und der stetigen Abhängigkeit des Operators L_F von λ $\Rightarrow \exists$ hinreichend kleine Umgebung $U(\lambda_0)$ von λ_0 in Λ , sodass $\forall \lambda \in U(\lambda_0)$ die Abbildung $A(u, \lambda)$ lokaler Diffeomorphismus an $u = 0$ ist.

Betrachte implizite Funktion

$$A(u, \lambda) = w \in W \quad \text{mit} \quad A(0, \lambda_0) = 0 \quad \text{und} \quad D_u A(0, \lambda_0) \quad \text{ein Isomorphismus.}$$

$\implies$ Laut Satz über implizite Funktionen:

$\exists$ Umgebungen $U(0)$ von $u = 0$ in Z und $U_W(0)$ von $w = 0$ in W , sodass $\forall \lambda \in U(\lambda_0)$ und $w \in U_W(0)$:

$\exists! u : U_W(0) \times U(\lambda_0) \rightarrow U(0)$, $(w, \lambda) \mapsto u(w, \lambda)$ mit $u(0, \lambda_0) = 0$ und $A(u(w, \lambda), \lambda) = w$.

$$\implies \text{Lösungen } u(w, \lambda) \text{ mit } L_F(u(w, \lambda), \lambda) = 0 \text{ erfüllen } \Pi u(w, \lambda) = w. \quad (8.8)$$

$$\Pi: X \xrightarrow{\implies} K \quad w \in K.$$

Das unendlich-dimensionale Problem

$$\text{“Gegeben } \lambda \in U(\lambda_0), \text{ finde } u \in Z \text{ mit } L_F(u, \lambda) = 0.” \quad (8.9)$$

wurde auf ein endlich-dimensionales Problem

$$\text{“Gegeben } \lambda \in U(\lambda_0), \text{ finde } w \in K \text{ mit } \Pi u(w, \lambda) = w.” \quad (8.10)$$

reduziert.

2. Analyse des reduzierten Problems (8.10):

Annahme $\dim(K) = 1 \Rightarrow \exists w_0 \in K$ mit $K = \text{span}\{w_0\}$

$$\implies \text{Betrachte } w = \alpha w_0 \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R} \text{ und } u(\alpha, \lambda) = u(\alpha w_0, \lambda) = u(w, \lambda).$$

Asymptotische Entwicklung von

$$\Pi u(\alpha w_0, \lambda) = \alpha w_0 \quad (8.11)$$

in hinreichend kleiner Umgebung von $\alpha = 0, \lambda = \lambda_0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} w = \alpha w_0 &= \Pi(u(\alpha w_0, \lambda_0 + t\mu)) \\ &= \underbrace{\Pi(u(0, \lambda_0))}_{=0} + \Pi \frac{\partial u}{\partial \alpha}(0, \lambda_0) \alpha + \Pi \frac{\partial u}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) \mu + \\ &\quad + \frac{1}{2} \Pi \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}(0, \lambda_0) \alpha^2 \right) + \Pi \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \lambda}(0, \lambda_0) \alpha \mu \right) + \frac{1}{2} \Pi \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2}(0, \lambda_0) (\mu, \mu) \right) + \\ &\quad + \text{Terme höherer Ordnung in } \alpha \text{ und } \mu. \end{aligned}$$

- Behauptung:

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}(0, \lambda_0) = w_0$$

Differenziere

$$L_F(u(\alpha w_0, \lambda), \lambda) + \Pi u(\alpha w_0, \lambda) = \alpha w_0$$

nach α an $(\alpha, \lambda) = (0, \lambda_0) \Rightarrow$

$$L_Q(0, \lambda_0) \frac{\partial u}{\partial \alpha}(0, \lambda_0) + \Pi \frac{\partial u}{\partial \alpha}(0, \lambda_0) = w_0.$$

Es gilt auch $\underbrace{L_Q(0, \lambda_0)w_0}_{=0} + \underbrace{\Pi w_0}_{=w_0} = w_0.$

Lemma 8.14 $\Rightarrow L_Q(0, \lambda_0) + \Pi$ ist Isomorphismus $\Rightarrow$ Eindeutigkeit der Lösung $\Rightarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}(0, \lambda_0) = w_0.$$

• Behauptung:

$$\Pi_W \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}(0, \lambda_0) \right) = -\Pi_W (D_u L_Q(0, \lambda_0)(w_0, w_0)) = -\Pi_W \left(\frac{d^2}{d\alpha^2} L_F(\alpha w_0, \lambda_0) \Big|_{\alpha=0} \right)$$

Differenziere

$$L_F(u(\alpha w_0, \lambda), \lambda) + \Pi u(\alpha w_0, \lambda) = \alpha w_0$$

zweimal nach α an $(\alpha, \lambda) = (0, \lambda_0).$

erste Ableitung:

$$L_Q(u, \lambda) \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \Pi \frac{\partial u}{\partial \alpha} = w_0$$

zweite Ableitung ausgewertet an $(\alpha, \lambda) = (0, \lambda_0):$

$$D_u L_Q(0, \lambda_0) \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) (0, \lambda_0) + L_Q(0, \lambda_0) \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}(0, \lambda_0) + \Pi_x \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}(0, \lambda) \right) = 0$$

Wende Projektion $\Pi_W : W \rightarrow K$ mit $\Pi_W \circ \Pi = \Pi$ an

$$\Pi_W D_u L_Q \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) (0, \lambda_0) + \Pi_W L_Q \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}(0, \lambda_0) + \Pi \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}(0, \lambda) = 0$$

$$\begin{array}{c} \Pi_W \circ L_Q(0, \lambda_0) = 0 \\ \xrightarrow{\frac{\partial u}{\partial \alpha}(0, \lambda_0) = w_0} \end{array} -\Pi_W D_u L_Q(0, \lambda_0)(w_0, w_0) = \Pi \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}(0, \lambda_0)$$

Bemerkung 8.16. In der Variationsrechnung leitet sich L_Q von der zweiten Variation und $D_u L_Q$ wiederum von der dritten Variation des Funktional $\mathcal{F}(u, \lambda)$ ab.

Behauptung: Sei $\lambda_0 + \mu \in \Lambda$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \Pi \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) \mu \right) &:= \Pi \left(\frac{d}{dt} u(0, \lambda_0 + t\mu) \Big|_{t=0} \right) = \\ &-\Pi_W (D_\lambda L_F(0, \lambda_0) \mu) := -\Pi_W \left(\frac{d}{dt} L_F(0, \lambda_0 + t\mu) \Big|_{t=0} \right) \end{aligned}$$

Beweis. Menge Λ ist offen $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ hinreichend klein, sodass $\forall 0 < |t| < \varepsilon$

$$\lambda_t := \lambda_0 + t\mu \in \Lambda$$

und

$$L_F(u(w, \lambda_t), \lambda_t) + \Pi u(w, \lambda_t) = w$$

Differenziere bezüglich t an $t = 0, w = 0$

$$\Rightarrow \Pi \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) \mu \right) = -D_u L_F(0, \lambda_0) \frac{\partial u}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) \mu - D_\lambda L_F(0, \lambda_0) \mu$$

Wende die Projektion $\Pi_W : W \rightarrow K$ an

$$\begin{array}{c} D_u L_F = L_Q, \Pi \circ L_Q \equiv 0 \\ \xrightarrow{\Pi_W \circ \Pi = \Pi} \end{array} \Pi \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) \mu \right) = -\Pi_W D_\lambda L_F(0, \lambda_0) \mu$$

■

Die asymptotische Entwicklung von (8.11) vereinfacht sich durch

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}(0, \lambda_0) = w_0 \quad \text{und} \quad \alpha \Pi \frac{\partial u}{\partial \alpha}(0, \lambda_0) = \alpha \Pi w_0 = \alpha w_0 = w$$

zu

$$\begin{aligned} 0 &= \Pi \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) \mu \right) + \frac{1}{2} \Pi \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}(0, \lambda_0) \alpha^2 \right) \\ &\quad + \text{Terme höherer Ordnung in } \alpha \\ &\quad + \Pi \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \lambda}(0, \lambda_0) \alpha \mu \right) \\ &\quad + \text{Terme höherer Ordnung in } \mu \text{ und } \alpha. \end{aligned}$$

Die Annahmen (8.7) und (8.6) stellen mittels der Behauptungen sicher, dass die ersten beiden Koeffizienten der Taylorentwicklung nicht verschwinden.

Die Reskalierung

$$\alpha := t\tau, \mu := t^2 \bar{\mu}, a_0 := \Pi \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) \right) \bar{\mu} \neq 0, a_1 := \frac{1}{2} \Pi \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}(0, \lambda_0) \right) \neq 0$$

führt zu

$$0 = a_0 t^2 + a_1 t^2 \tau^2 + t^2 \Sigma(t, \tau, \bar{\mu}), \quad (8.12)$$

wobei für festes $\tau, \bar{\mu}$ die Funktion $\Sigma(t, \tau, \bar{\mu}) = O(t)$ für $t \rightarrow 0$.

Für $t \neq 0$, ist (8.12) äquivalent zu

$$0 = a_0 + a_1 \tau^2 + \Sigma(t, \tau, \bar{\mu}) \quad (8.13)$$

Es bleibt zu zeigen, dass für hinreichend kleine t die Struktur der Lösungen (Verzweigungsverhalten) der Gleichungen (8.13) und

$$0 = a_0 + a_1 \tau^2 \quad (8.14)$$

gleich sind.

Die Koeffizienten a_0 und a_1 sind laut Annahmen verschieden von Null und es gilt die Fälle $a_0/a_1 > 0$ und $a_0/a_1 < 0$ zu unterscheiden. Die Gleichung (8.14) hat für $a_0/a_1 > 0$ keine reellen Lösungen und für $a_0/a_1 < 0$ genau zwei verschiedene reelle Lösungen.

Wir halten $\bar{\mu} \neq 0$ für den Moment konstant und schreiben (8.13) als

$$0 = a_0 + a_1 \tau^2 + \Sigma(t, \tau, \bar{\mu}) =: \Phi(t, \tau). \quad (8.15)$$

Im Fall $a_0/a_1 < 0$, bezeichnen wir die reellen Lösungen von (8.14) mit $\tau_1 \neq \tau_2$. Aufgrund von $\Sigma(0, \tau, \bar{\mu}) = 0$ gilt

$$\Phi(0, \tau_i) = 0 \quad \text{für } i = 1, 2$$

und aus (8.7), (8.6) und den Eigenschaften von Σ folgt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}(0, \tau_i) \neq 0 \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt die Existenz von $\varepsilon > 0$ und lokal eindeutiger Lösungen

$$\tau_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \rightarrow \tau_i(t) \quad \text{für } i = 1, 2,$$

sodass

$$\Phi(t, \tau_i(t)) = 0, \quad \text{für } 0 < |t| < \varepsilon,$$

und insbesondere $\tau_i(0) = \tau_i$ für $i = 1, 2$.

Damit haben wir zwei Lösungen $\tau_1(t), \tau_2(t)$ für (8.15); somit für (8.12); somit für (8.11); somit für (8.10); somit für (8.9) mit $\lambda_t = \lambda_0 + t^2 \bar{\mu}$ und $0 < |t| < \varepsilon$ gefunden.

Im anderen Fall, $a_0/a_1 > 0$, existieren keine Lösungen für (8.14) und aufgrund von den asymptotischen Eigenschaften von Σ für hinreichend kleine $|t|$ auch keine Lösungen für (8.15) und damit (8.9). Daraus folgt die Behauptung, dass unter den Annahmen die Lösungsstruktur von (8.9) vollständig der Lösungsstruktur von (8.14) entspricht.

Im Fall von $-\bar{\mu}$ ändern sich die Vorzeichen von a_0 bzw. a_0/a_1 , die Schlussfolgerung bleibt davon unberührt. ■

Referenzen: [Jo] §II.8.1 – §II.8.2, [AP] §5

8.3 Katenoid als Beispiel eines Verzweigungsprozesses

Ein Katenoid ist eine Fläche mit mittlerer Krümmung null, die durch die Umdrehung einer Kurve $u(x)$ um die x -Achse entsteht. Die Oberfläche eines Katenoids, generiert durch $u(x)$, ist gegeben durch

$$\mathcal{F}(u) = \int_{-1}^1 F(x, u(x), u'(x)) dx = \int_{-1}^1 u(x) \sqrt{1 + u'(x)^2} dx,$$

also mit $F(x, z, p) = z\sqrt{1 + p^2}$. Das Ziel dieses Abschnitts ist es, die Bifurkationstheorie und insbesondere Satz 8.13 aus §8.2 auf die stationären Lösungen anzuwenden. Wir skizzieren die Rechnungen nur, Details in [Jo] II.8.3.

1. Die **Euler-Lagrange-Gleichungen** sind gegeben durch

$$0 = \frac{d}{dx} F_p - F_z = \frac{d}{dx} \left(\frac{uu'}{\sqrt{1 + u'^2}} \right) - \sqrt{1 + u'^2}.$$

Eine Rechnung zeigt, dass dies äquivalent ist zu

$$uu'' - u'^2 - 1 = 0, \quad x \in (-1, 1), \quad (8.16)$$

und die allgemeine Lösung lautet

$$u(x) = \lambda \cosh \left(\frac{x - x_0}{\lambda} \right)$$

mit zwei Parametern $\lambda, x_0 \in \mathbb{R}$. Wir können o.B.d.A. $x_0 = 0$ (wegen der Translation) und $\lambda > 0$ (wegen der Symmetrie) wählen. Wir zeigen unten, dass λ der Bifurkationsparameter ist. Wir schreiben

$$u_0(x) = \lambda \cosh \frac{x}{\lambda}, \quad x \in (-1, 1).$$

Dann ist u_0 ein stationärer Punkt von $\mathcal{F}$.

2. Wir definieren die **Operatoren**

$$L_F : V \times \Lambda \rightarrow W, \quad L_F(u, \lambda) = \begin{pmatrix} \left(\frac{uu'}{\sqrt{1+u'^2}} \right)' - \sqrt{1+u'^2} \\ u(1) - \lambda \cosh(1/\lambda) \\ u(-1) - \lambda \cosh(1/\lambda) \end{pmatrix}$$

mit $V = H^2(-1, 1)$, $\Lambda = (0, \infty)$ und $W = L^2(-1, 1) \times \mathbb{R}^2$. Der Jacobi-Operator $L_Q(u_0, \lambda) = D_u F_\lambda(u_0)$ berechnet sich zu

$$L_Q(u_0, \lambda)v = \begin{pmatrix} \left(\frac{v'}{\cosh^2(x/\lambda)} \right)' + \frac{v}{\lambda^2 \cosh^2(x/\lambda)} \\ v(1) \\ v(-1) \end{pmatrix}.$$

3. Berechnung des Kerns von L_Q : Sei $L_Q(u, \lambda)v = 0$. Man kann zeigen, dass die Lösung dieser Gleichung gegeben ist durch

$$v(x) = \cosh \frac{x}{\lambda} - \frac{x}{\lambda} \sinh \frac{x}{\lambda}, \quad v(1) = v(-1) = 0.$$

Die Randbedingungen sind erfüllt, wenn $\cosh(1/\lambda) - (1/\lambda) \sinh(1/\lambda) = 0$, und dies ist der Fall, wenn

$$\tanh \frac{1}{\lambda} = \lambda.$$

Diese Gleichung hat in $(0, \infty)$ genau eine Lösung $\lambda_0 > 0$. Damit ist die Dimension von $K = L_Q(u_0, \lambda_0)$ gleich eins.

4. Berechnung des Cokerns: Der Cokern ist gerade $W_0 = W \setminus \text{ran} L_Q(u_0, \lambda_0)$. Man kann K und W_0 identifizieren, aber wir führen die etwas technische Rechnung hier nicht aus.

5. Parameter a_0 und a_1 : Durch explizites Berechnen von $\frac{d^k}{ds^k} L_F(u_0, \lambda_0 + s\bar{\mu})|_{s=0}$ mit $k = 1, 2$ kann man zeigen, dass

$$a_1 = -\frac{1}{2} \Pi_W \frac{d^2}{ds^2} L_F(u_0, \lambda_0 + s\bar{\mu})|_{s=0} > 0, \quad a_0 = -\Pi_W \frac{d}{ds} L_F(u_0, \lambda_0 + s\bar{\mu})|_{s=0} \neq 0.$$

Die Berechnung von a_0 ergibt, dass in einer Umgebung von λ_0 gilt: $a_0 > 0$ ($a_0 < 0$) ist äquivalent zu $u(1) = u(-1) < \lambda_0 \cosh(1/\lambda)$ ($u(1) = u(-1) > \lambda_0 \cosh(1/\lambda)$).

Damit sind die Voraussetzungen von Satz 8.4 erfüllt, und wir können auf das Bifurkationsverhalten von $u_0(x) = \lambda_0 \cosh(x/\lambda_0)$ in einer Umgebung von λ_0 schließen. Wenn $a_0 > 0$ gilt, haben wir $a_0/a_1 > 0$, und es gibt keine reellen Lösungen, während für $a_0 < 0$ gilt $a_0/a_1 < 0$, und wir erhalten zwei Lösungen.

Wir fassen zusammen:

$$\begin{aligned} u(1) = u(-1) < \lambda_0 \cosh \frac{1}{\lambda_0} : & \quad \text{es existiert keine Lösung von (8.16),} \\ u(1) = u(-1) > \lambda_0 \cosh \frac{1}{\lambda_0} : & \quad \text{es existieren zwei Lösungen von (8.16).} \end{aligned}$$

Im Fall, dass keine Lösung existiert, bricht die Oberfläche des Katenoids, und es bilden sich Kreisscheiben.

Referenzen: [Jo] §II.8.3

A Literaturverzeichnis

- [AP] **A. Ambrosetti, G. Prodi**, *A Primer of Nonlinear Analysis*, Cambridge University Press, 1993.
- [Bra] **A. Braides**, *A handbook of Γ -convergence*, in: Handbook of Differential Equations. Stationary Partial Differential Equations, Volume 3 (M. Chipot, P. Quittner, eds.), Elsevier, 2006.
- [Bre] **H. Brezis**, *Analyse Fonctionnelle*, Mason, Paris, 1987.
- [Ca] **C. Carstensen**, *Course B: Modelling and simulation of microstructure evolution*, EPSRC Summer School 2006.
- [Da] **B. Dacorogna**, *Direct Methods in the Calculus of Variations*, Springer, 1989
- [DM] **G. Dal Maso**, *Introduction to Γ -convergence*, Birkhäuser, 1993
- [DL6] **R. Dautray, J.L. Lions**, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Vol. 6: Evolution Problems II*, Springer, 2000.
- [DF] **D.G. De Figueiredo**, *Lectures on The Ekeland Variational Principle with Applications and Detours*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1989.
- [De] **K. Deimling**, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer, 1985
- [Ev1] **L.C. Evans**, *Partial Differential Equations*, AMS, 1998
- [Ev2] **L.C. Evans**, *Weak Convergence Methods for Nonlinear Partial Differential Equations*, AMS, 1990
- [GH] **M. Giaquinta, S. Hildebrandt**, *Calculus of Variations I - The Lagrangian Formalism*, Springer, 1996.
- [Gr] **M. Grüter**, *The Principles of the Calculus of Variations*, Skript, Uni Saarbrücken, 2001; <http://www.math.uni-sb.de/PREPRINTS/preprint25.ps.gz>
- [Hu] **S.T. Hughes**, *The Dirichlet problem for the minimal surface equation*, Lecture Notes, 2012.
- [Jo] **J. Jost, X. Li-Jost**, *Calculus of Variations*, Cambridge University Press, 1998.
- [Ju] **M. Junk**, *Calculus of Variations*, Skript, Uni Kaiserslautern, 2002.
- [KS] **D. Kinderlehrer, G. Stampacchia**, *An Introduction to Variational Inequalities and their Applications*, Academic Press (2000).
- [Mü] **S. Müller**, *Variational models for microstructure and phase transitions*, CIME-lecture notes, 1998; www.mis.mpg.de/preprints/ln/lecturenote-0298.pdf

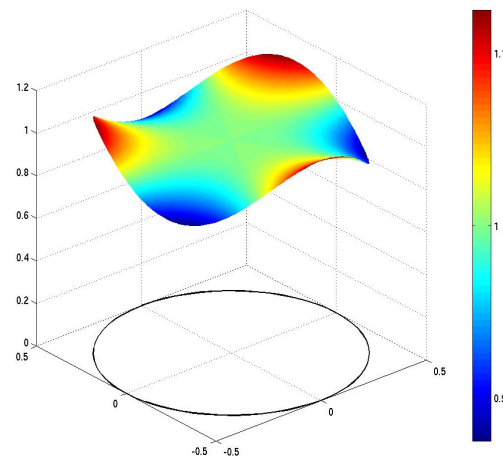
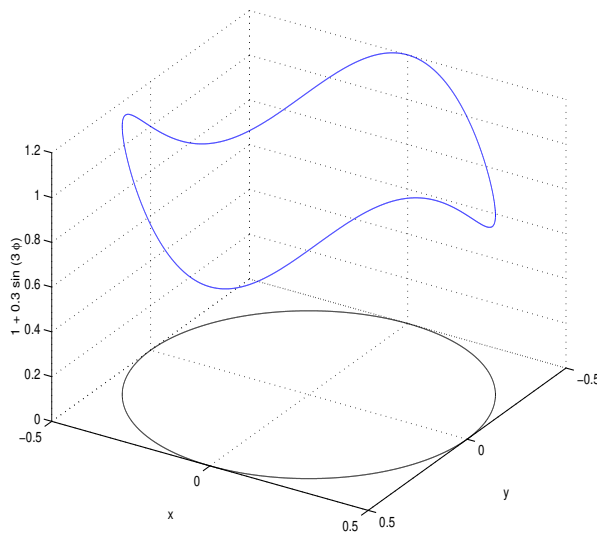
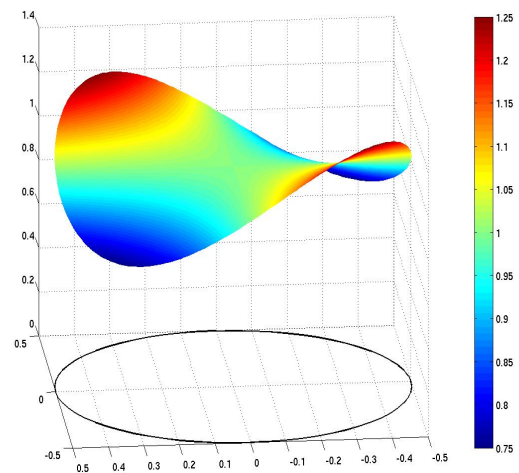
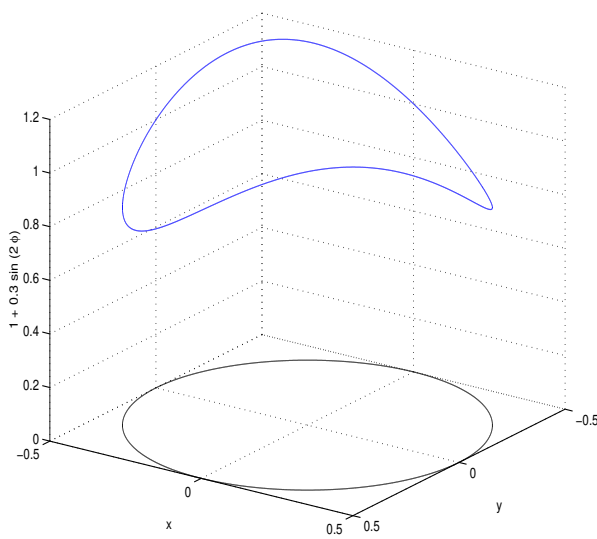
- [RS1] **M. Reed, B. Simon**, *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*, Academic Press, 1980.
- [RR] **M. Renardy & R.C. Rogers**, *An Introduction to Partial Differential Equations*, Springer, New York, 1993
- [Se] **J. Seiler**, *Einführung in die Variationsrechnung*, Skript, Uni Hannover, 2005;
URL: cfile217.uf.daum.net/attach/1559BE4F4F170348173974
- [Sh1] **R.E. Showalter**, *Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations*, Electron. J. Diff. Eqns., 1994; <http://ejde.math.swt.edu/Monographs/01/abstr.htm>
- [St] **M. Struwe**, *Variational Methods. Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian System*, Springer, 1996.
- [Ta] **L.C. Tartar**, *Compensated compactness and applications to partial differential equations*, In: Nonlinear Analysis and Mechanics, Pitman Research Notes Math. 39, London (1979) 136–212.
- [vB] **B. van Brunt**, *The Calculus of Variations*, Springer, 2006.
- [vdM] **H. von der Mosel**, *Variationsrechnung I*, Skript, Uni Bonn, 2003;
URL: cfile227.uf.daum.net/attach/144BA64F4F1703CC1BFECC
- [Ze] **E. Zeidler**, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications III - Variational Methods and Optimization*, Springer, 1985.

B Folien

Minimalflächen

$$\begin{cases} (1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0, & \Omega \\ u = g, & \partial\Omega \end{cases}$$

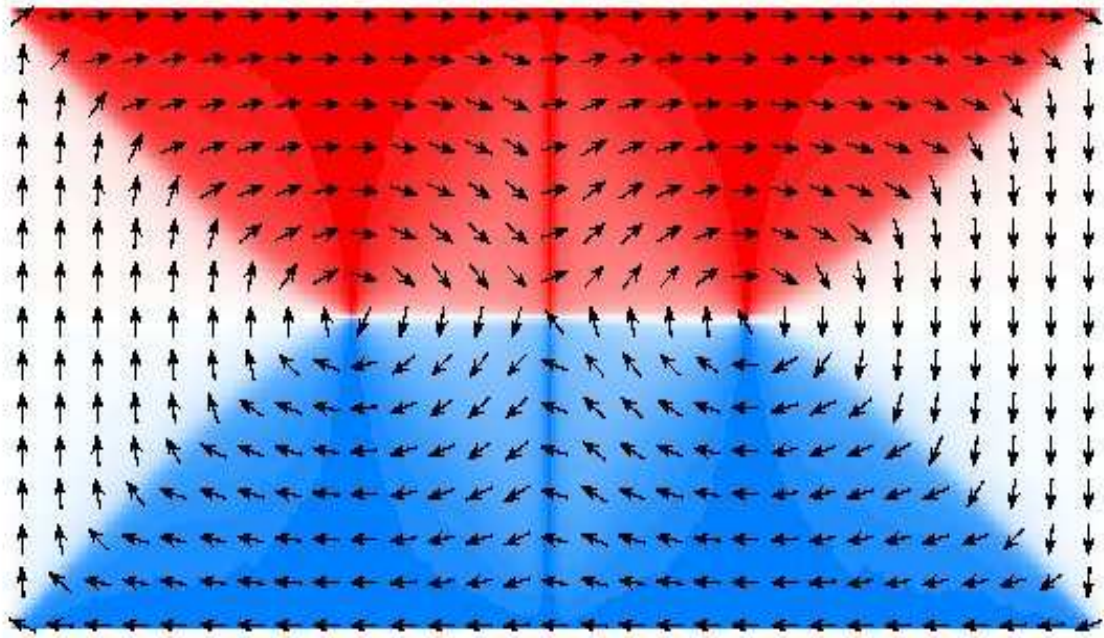
$$\Omega = \{x^2 + y^2 < 0.25\}$$



Randkurve $g(\phi)$ auf $\partial\Omega$

Minimalfläche $u(x,y)$

Magnetisierungsmuster



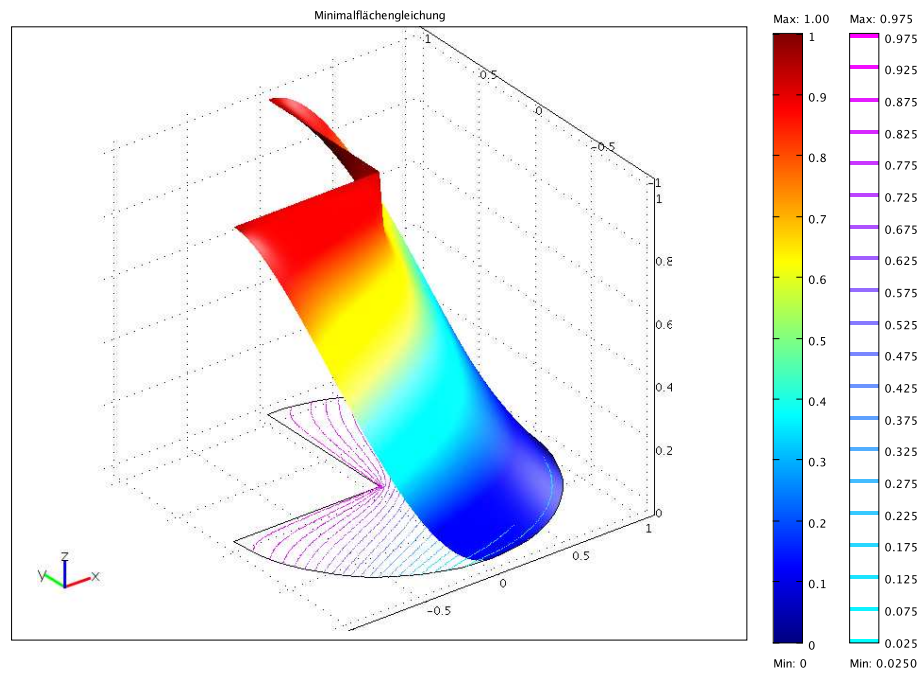
Magnetisierungsmuster einer Eisen-Mikrostruktur ($1\mu m \times 2\mu m \times 20nm$) ohne externes Magnetfeld; inkl. 2 Wirbel- und 1 Antiwirbel-Unstetigkeit

Minimalflächen über nicht-konvexem Gebiet

Die Minimalflächengleichung

$$(1 + u_{x_2}^2)u_{x_1x_1} - 2u_{x_1}u_{x_2}u_{x_1x_2} + (1 + u_{x_1}^2)u_{x_2x_2} = 0$$

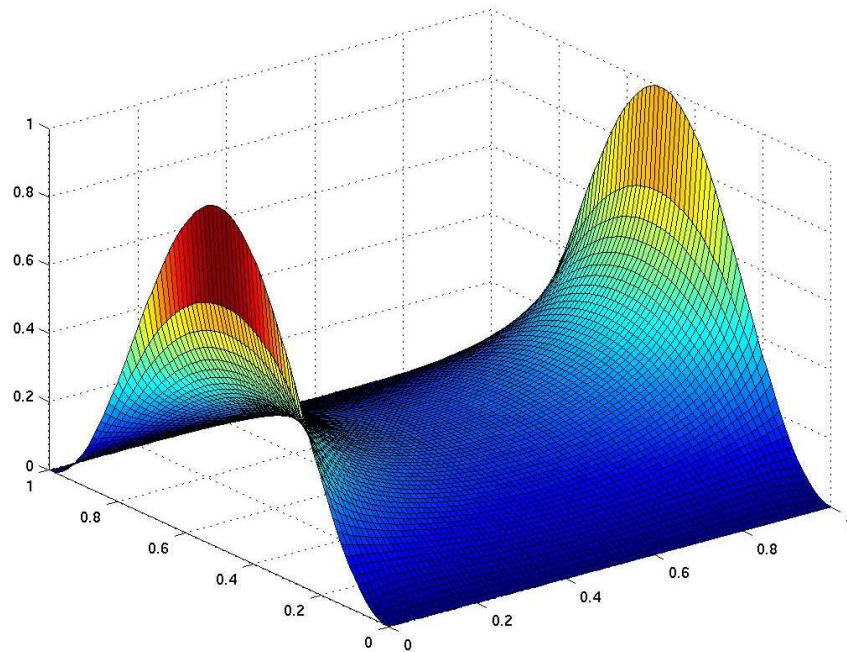
hat bei nicht-konvexem Gebiet nicht immer eine klassische Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.



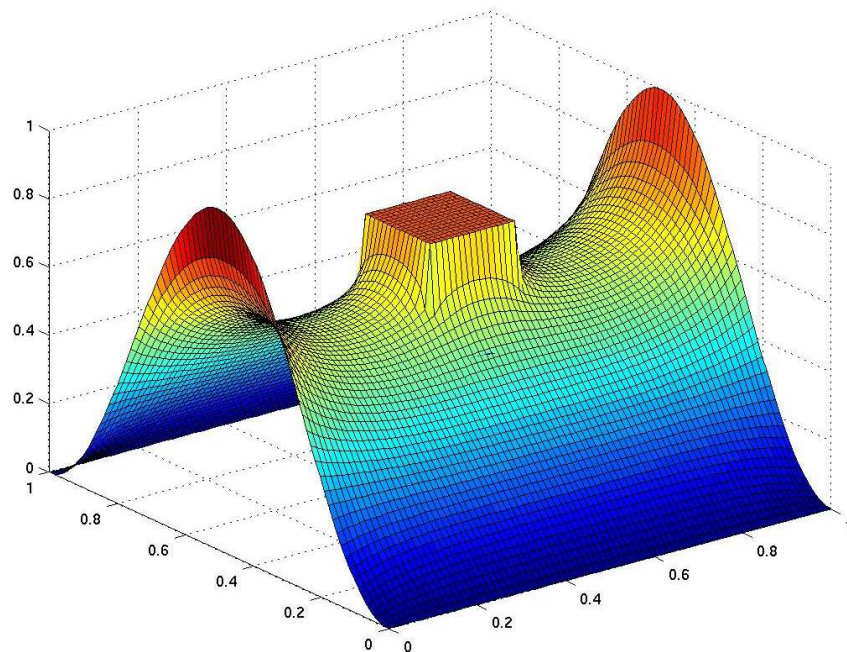
Minimalfläche mit Sinus-Randbedingung

Regularitätsverlust bei einspringender Ecke

Minimalflächen mit Hindernis



Minimalfläche mit Sinus-Randbedingung



Minimalfläche mit Sinus-Randbedingung über Quader-Hindernis.
Die Übereinstimmungsmenge ist a-priori unbekannt und von der Höhe des Quaders abhängig. Ev. besteht sie nur aus einer Umgebung der Quaderecken $\rightarrow$ freier Rand.

Hindernisproblem, “Penalty”-Methode

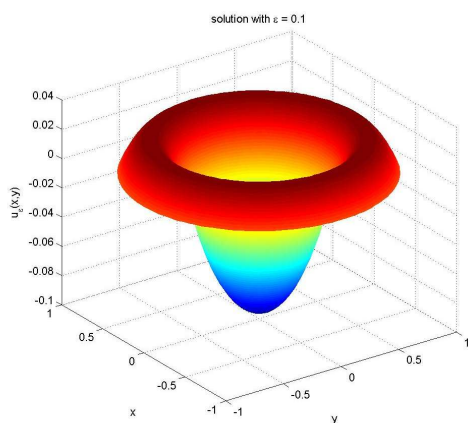
$$\mathcal{F}(u) := \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - f u \, dx \xrightarrow{!} \min$$

$$\text{in } U := \{u \in H_0^1(\Omega) \mid u \geq 0\}, \quad \Omega = K_1(0),$$

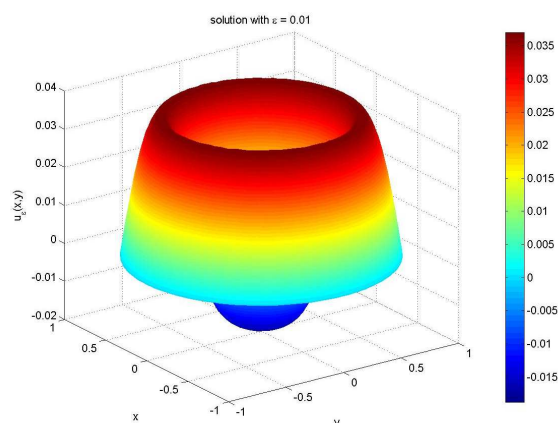
$$f(x) := \begin{cases} 1, & 0.5 < |x| < 1 \\ -2, & |x| < 0.5 \end{cases}$$

“Penalty”-Approximation: $u^\varepsilon \rightharpoonup u$ in $H_0^1(\Omega)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$:

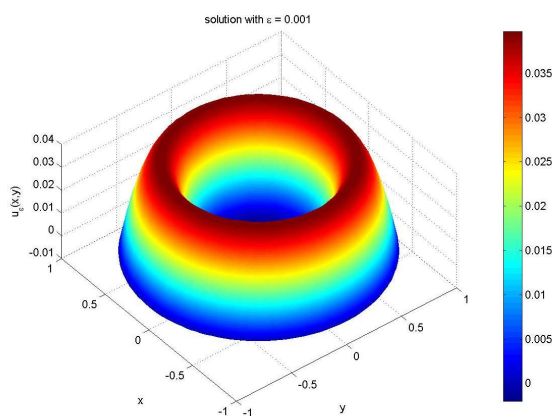
$$\begin{aligned} -\Delta u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} u^\varepsilon H(-u^\varepsilon) &= f, & \Omega \\ u^\varepsilon &= 0, & \partial\Omega \end{aligned}$$



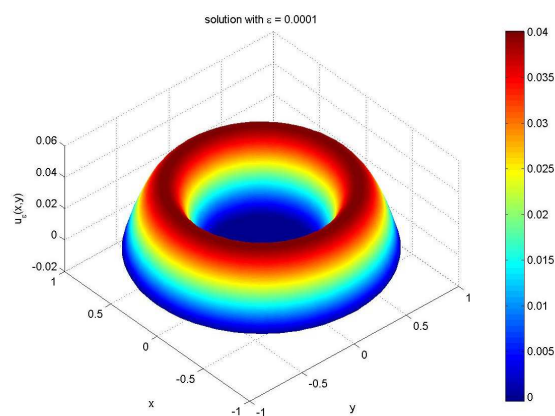
freies Minimum in $H_0^1(\Omega)$



mit Strafterm, $\varepsilon = 0.01$

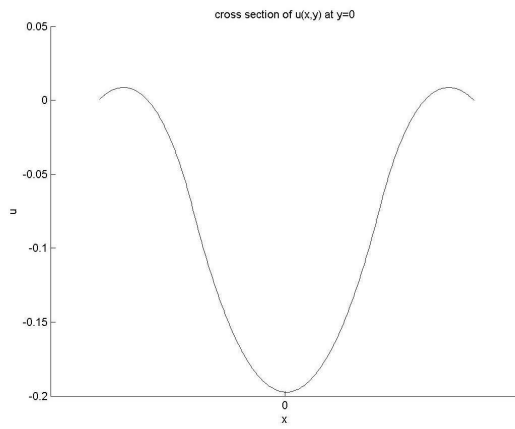


mit Strafterm, $\varepsilon = 0.001$

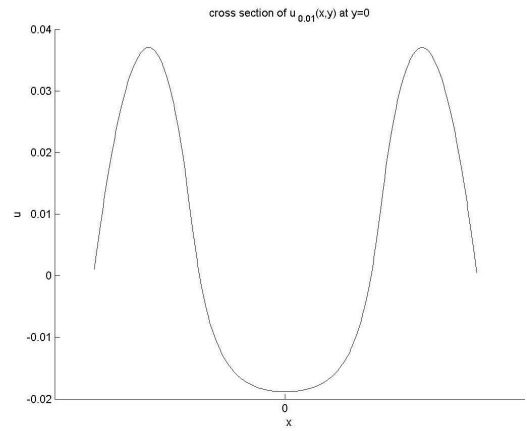


mit Strafterm, $\varepsilon = 0.0001$

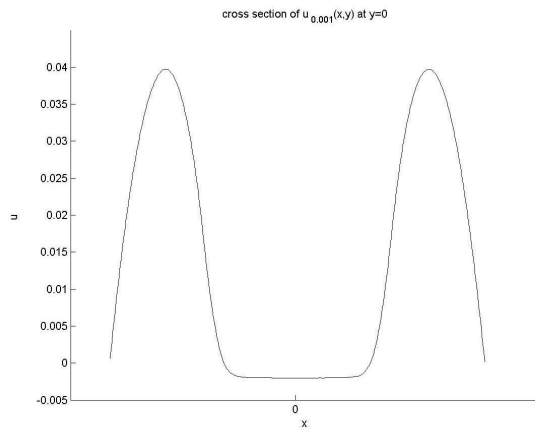
“Penalty”-Approximationen – Querschnitte



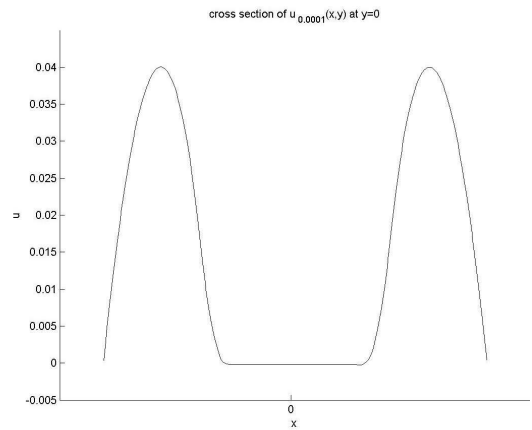
freies Minimum in $H_0^1(\Omega)$



mit Strafterm, $\varepsilon = 0.01$



mit Strafterm, $\varepsilon = 0.001$



mit Strafterm, $\varepsilon = 0.0001$

Für Minimum an $x = 0$ (bzw. ‘inneres Plateau’) gilt: $u_\varepsilon(0) \approx -2\varepsilon$

“Penalty”-Methode, asymptotisches Verhalten

“Penalty”-Approximation in u^ε :

$$\begin{aligned} -\Delta u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} u^\varepsilon H(-u^\varepsilon) &= f & , & \Omega \\ u^\varepsilon &= 0 & , & \partial\Omega \end{aligned} \tag{B.1}$$

- Übereinstimmungsmenge (d.h. $u_0(x) = 0$) $C \subset K_{\frac{1}{2}}(0)$
- asymptotische Entwicklung in C :

$$u^\varepsilon(x) \approx u_0(x) + \varepsilon u_1(x) < 0 \quad \Rightarrow H(-u^\varepsilon) = 1$$

- einsetzen in (B.1), Koeffizientenvergleich:

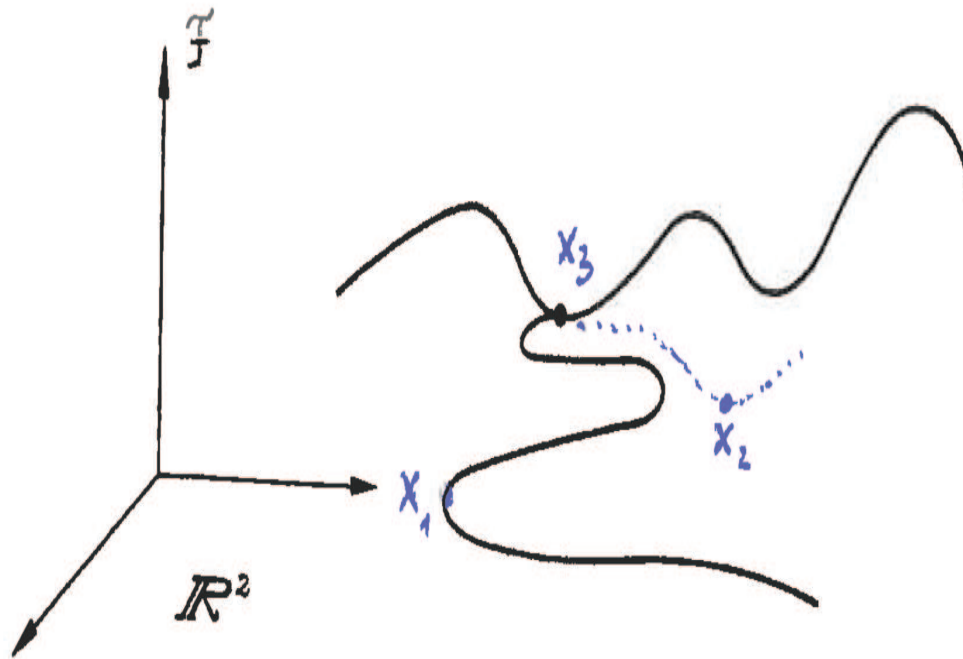
$$O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) : \quad u_0(x) = 0$$

$$\begin{aligned} O(1) : \quad & -\Delta u_0 + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon u_1 = f \\ \Rightarrow & u_1 = f \Rightarrow u^\varepsilon(x) \approx -2\varepsilon, \quad x \in C \end{aligned}$$

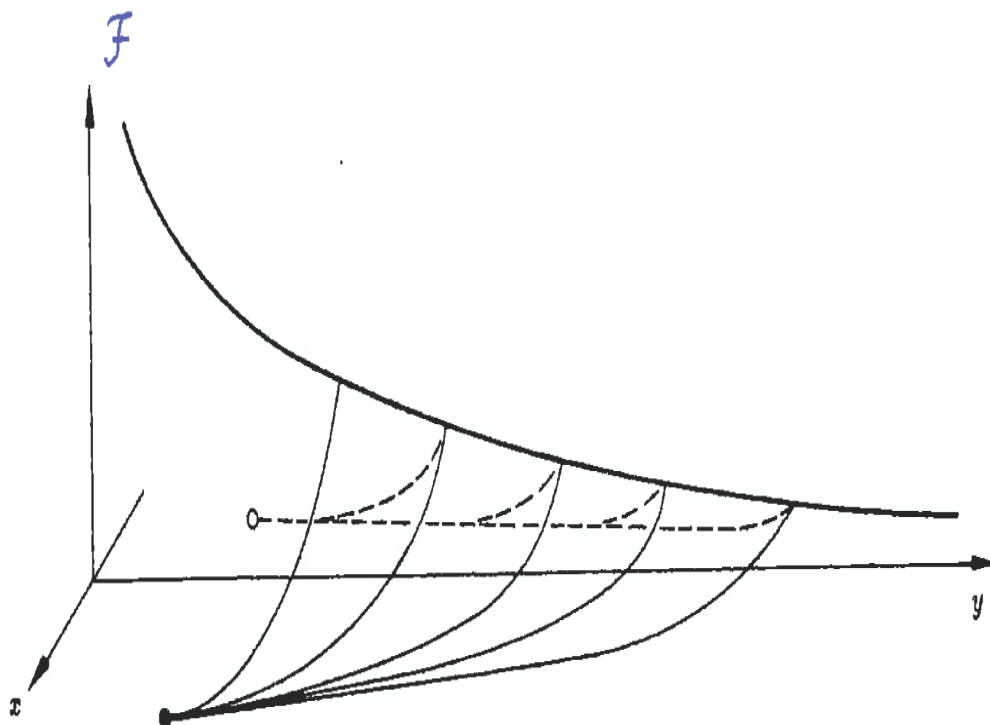
- numerische Lösung am Ursprung:

ε	$u^\varepsilon(0,0)$
0.1	- 0.0954511
0.01	- 0.0188197
0.001	- 0.0020001
0.0001	- 0.0002005

endlich-dimensionales “Mountain Pass Theorem”

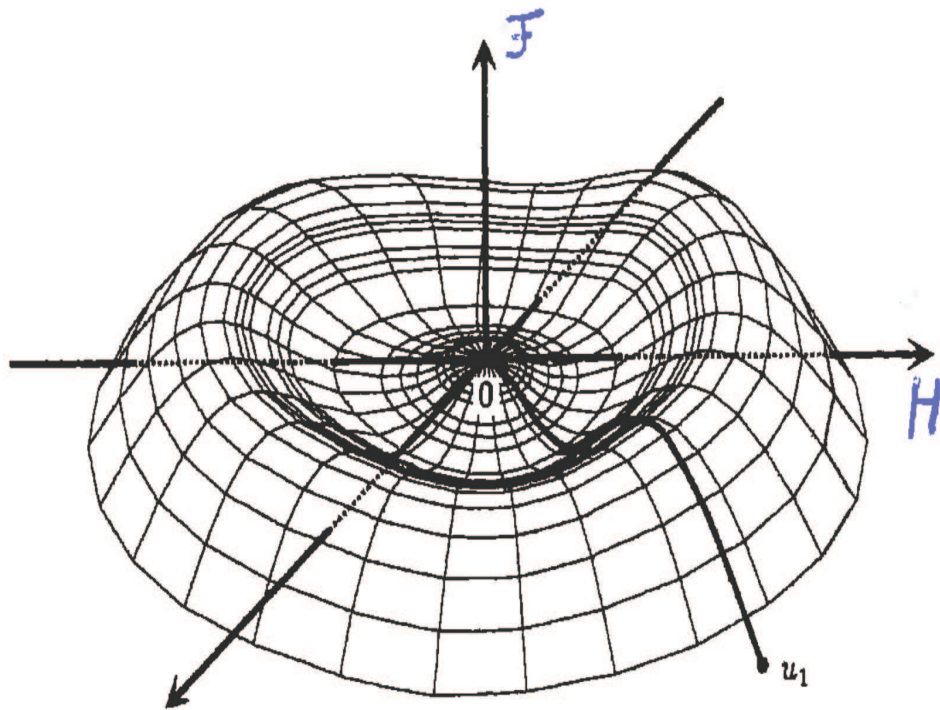


“Mountain Pass” in der $\mathcal{F}$ -Landschaft [St]



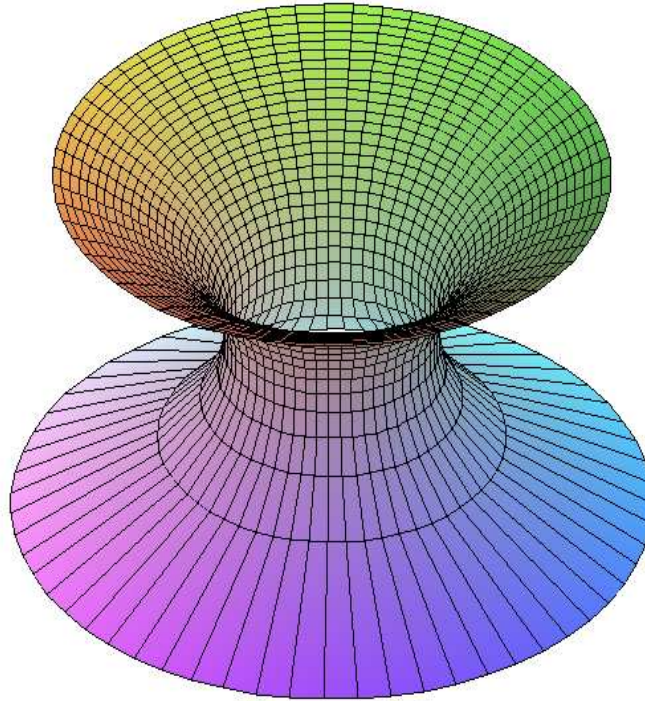
kein “Mountain Pass” wegen fehlender Koerzivität von $\mathcal{F}(x, y) = e^{-y} - x^2$ [St]

unendlich-dimensionales “Mountain Pass Theorem”



Bergring um lokales Minimum von $\mathcal{F}$ an $u = 0$ [St]

Katenoid



Katenoid, als Minimalfläche, die zwischen 2 Kreisen eingespannt ist