

Skript

Nichtlineare Partielle Differentialgleichungen

Anton Arnold

TU Wien, SS 2007, 2009, 2011, 2013, 2015, 2017, 2019, 2021, 2025

Uni Münster, SS 2004

25. Juni 2025

© Anton Arnold, 2025

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung / Beispiele	5
1.1	Bewegung von Elektronen in einem Halbleiter	5
1.2	Flüssigkeit in einem porösen Medium	6
1.3	Diffusionsfilter in Bildverarbeitung	7
1.4	Reaktion von Chemikalien	8
1.5	Oberflächenwellen in Wasser	9
1.6	Geometrische Optik	10
1.7	Hamilton-Mechanik	12
1.8	Minimalflächen	13
2	nichtlineare elliptische Gleichungen	15
2.1	Vergleichsprinzip für quasilineare Differentialoperatoren	15
2.2	Fixpunktmethoden	18
2.2.1	Fixpunktsatz von Banach	18
2.2.2	Fixpunktsatz von Schauder	20
2.2.3	Fixpunktsatz von Schaefer	23
2.3	monotone Operator-Methode	26
2.4	stationäre Navier-Stokes-Gleichungen	33
3	nichtlineare parabolische Gleichungen	43
3.1	H^{-1} und „parabolische“ Sobolev Räume	43
3.2	schwache Formulierungen	45
3.3	Reaktions-Diffusionsgleichungen	49
3.4	quasilineare parabolische Gleichungen	55
3.5	transiente Navier-Stokes-Gleichungen	63
3.6	Die poröse Medium Gleichung	66
4	nichtlineare Wellengleichungen	73
4.1	Wellengleichungen als Hamilton'sche Systeme	73
4.2	Abschätzungen und Erhaltungsgrößen	75
4.3	globale Lösungen von NLS	79
4.3.1	lineare homogene Schrödinger Gleichung	79
4.3.2	lineare inhomogene Schrödinger Gleichung	83
4.3.3	nichtlineare Schrödinger Gleichung	85
4.4	globale Lösungen von NLW	88
4.5	„Explosion“ von Lösungen	91
4.6	Stabilität von Solitonen	94

A Literaturverzeichnis	101
B Folien	103

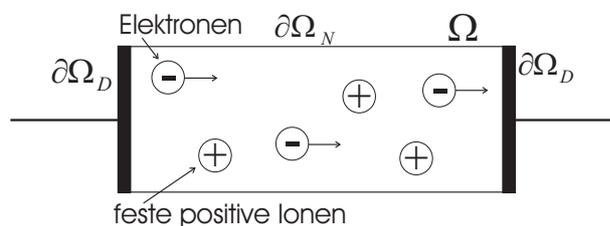
1 Einleitung / Beispiele

Ziel der Vorlesung:

- Vorstellung von einigen typischen nichtlinearen PDGI'en. Im Gegensatz zu linearen PDGI'en gibt es keine kanonische Stoffauswahl. Die Themen "hyperbolische Erhaltungsgesetze", "vollständig integrable Systeme", "Variationsmethoden" werden ausgelassen, da diese in Parallel-Lehrveranstaltungen enthalten sind.
- typische mathematische Fragestellungen (Existenz, Eindeutigkeit von Lösungen und deren qualitatives Verhalten)
- typische (analytische) Lösungsstrategien

Einige einfache Beispiele:

1.1 Bewegung von Elektronen in einem Halbleiter



$n(x, t) \geq 0$... Dichte der Elektronen in Ω
 $\Phi(x, t)$... elektrostat. Potential

(Dotierung mit Dichte $C(x) \geq 0$)

$$\begin{cases} n_t = \underbrace{\operatorname{div}(\nabla n)}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{\operatorname{div}(n \nabla \Phi)}_{\text{Drift}} \\ \Delta \Phi = n - C(x) \dots \text{Poissongleichung für Potential} \end{cases}$$

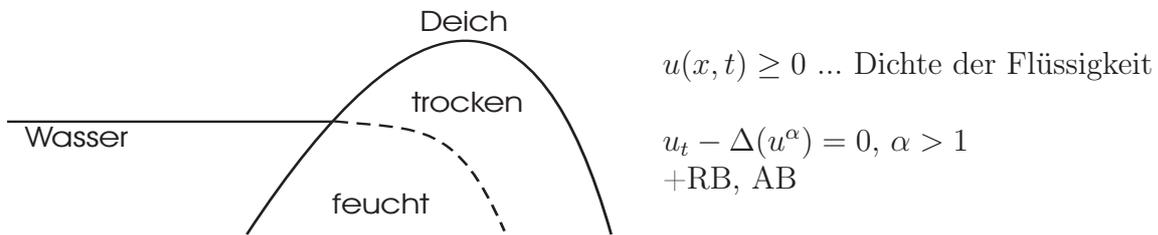
(nichtlineares parabolisch-elliptisches System)

- stationäre Gleichung im thermischen Gleichgewicht:

$$\Delta \Phi = \underbrace{\alpha^2 e^\Phi}_{=n(x)} - C(x), \quad x \in \Omega \quad \text{nichtlineare Poissongleichung}$$

$$+ \text{RB: } \Phi|_{\partial\Omega_D} = \Phi_0(x) \text{ (Kontakte); } \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right|_{\partial\Omega_N} = 0 \text{ (isolierter Rand)}$$

1.2 Flüssigkeit in einem porösen Medium



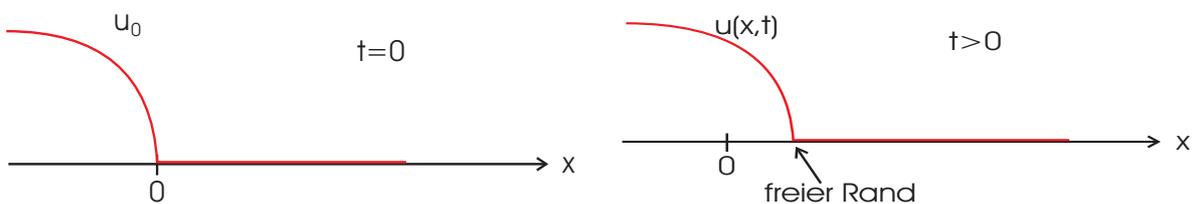
- Grundwasser- oder Erdölströmung in porösem Gestein

(klassische) poröse Mediumgleichung:

$$u_t = \alpha \operatorname{div}(\underbrace{u^{\alpha-1}}_{\text{Diffusionsrate} \geq 0} \nabla u)$$

- degeneriert (bzw. ausgeartet) parabolisch

⇒ nur *endliche* Ausbreitungsgeschwindigkeit (im Gegensatz zur Wärmeleitungsgleichung)



Herleitung der porösen Mediumgleichung:

- für polytropes Gas (def. durch Zustandsgleichung $p = p_0 u^\gamma$; z.B. ideales Gas)
 1. Massenbilanz: $\rho u_t + \operatorname{div}(uv) = 0$
 $u(x, t)$... Dichte
 $\rho \in (0, 1)$... Porosität = Volumenanteil der "Löcher"
 $v(x, t)$... Geschwindigkeitsfeld
 2. Darcy-Gesetz (= empirisches Gesetz für Strömung durch poröses Medium):
 $\mu v = -k \nabla p$
 μ ... Viskosität
 k ... Permeabilität = Durchlässigkeit des Materials für Gas/Flüssigkeitsströmungen
 $p(x, t)$... Druck
 3. Zustandsgleichung: $p = p_0 u^\gamma$; isentroper Index: $1 \leq \gamma \leq 2$
 p_0 ... Referenzdruck = const
 monoatomares Gas: $\gamma = \frac{5}{3}$; diatomares Gas (z.B. Luft): $\gamma = \frac{7}{5}$

$$\rho u_t = -\operatorname{div}(uv) = \frac{k}{\mu} \operatorname{div}(u \nabla p) = \frac{k}{\mu} p_0 \gamma \operatorname{div}(u^\gamma \nabla u)$$

$$\Rightarrow u_t = c \Delta(u^\alpha), \quad \alpha = 1 + \gamma, \quad c > 0$$

1.3 Diffusionsfilter in Bildverarbeitung

Perona-Malik Modell: zur Glättung von verrauschten Bildern

$u(x) \in [0, 1]$... Grauwert; $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

skalare Diffusivität $g(|\nabla u|^2) > 0$ mit

$$g(s) \searrow ; \quad g(0) = 1, \quad g(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$$

z.B.

$$g(s^2) = \frac{1}{1 + s^2/\lambda^2} \quad (\text{mit Parameter } \lambda > 0) \quad (1.1)$$

also:

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(g(|\nabla u|^2) \nabla u) & = 0 \quad ; x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ u(x, 0) & = f(x) \quad \dots \text{Ausgangsbild} \end{cases} \quad (1.2)$$

Motivation: wenig Diffusion bei Kanten, da dort $|\nabla u(x)|$ groß.

Kantenverschärfung:

1D-Variante von (1.2) mit Flussfunktion $\Phi(s) := sg(s^2)$:

$$u_t = \partial_x(\Phi(u_x)) = \Phi'(u_x)u_{xx} \quad (1.3)$$

Für g aus (1.1) gilt:

$\Phi'(u_x) \geq 0$ für $|u_x| \leq \lambda \Rightarrow$ (1.3) ist *vorwärts parabolisch*,

$\Phi'(u_x) < 0$ für $|u_x| > \lambda \Rightarrow$ (1.3) ist *rückwärts parabolisch*

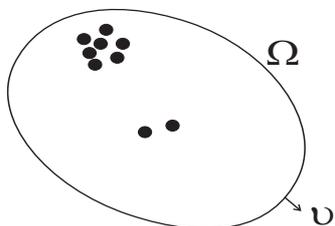
(d.h. Indiz für *Schlechtgestelltheit* von (1.3)).

Für $sg(s^2)$ monoton wachsend ist (1.2) aber sachgemäß gestellt.

Referenzen: [Ma] §10

1.4 Reaktion von Chemikalien

$u(x, t) \geq 0$... Konzentration der Chemikalie



$$u_t - \underbrace{\Delta u}_{\text{Diffusion}} = \underbrace{f(u)}_{\text{Reaktionsterm}}, \Omega \times (0, \infty) \quad (1.4)$$

$$\text{RB: } \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \partial\Omega \times (0, \infty)$$

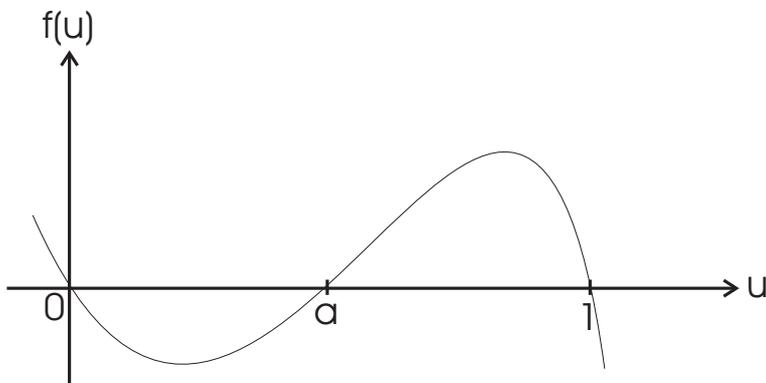
$$\text{AB: } u(x, 0) = u_0(x), \Omega$$

Reaktions-Diffusionsgleichung (semilinear);
 f meist Polynom (zB quadratisch für binäre Reaktion)

Bsp. 1: (1.4) hat für $f(u) = u^2$ i.A. keine globale Lösung (vgl. $u_t = u^2$), wohl aber für $f(u) = -u|u|$.

Bsp. 2: Wir suchen wandernde Wellen für $\Omega = \mathbb{R}$:

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ habe „kubische Gestalt“ mit $\int_0^1 f(u) du > 0$:



Man kann zeigen ([Ev] § 4.2):

$\exists!$ $\sigma < 0$ mit $u(x, t) = v(x - \sigma t)$ löst

$$u_t - u_{xx} = f(u), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (1.5)$$

wobei

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} v = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} v = 1.$$

Idee: Die Konstanten 0, 1 sind *stabile Lösungen* von (1.5) (da $f' < 0$); a ist *instabil* (da $f' > 0$).

- Gleichung für $v(x)$: $v'' + \sigma v' + f(v) = 0$

$$\text{mit } \lim_{x \rightarrow -\infty} v = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} v = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} v'(x) = 0$$

- Phasenraumanalyse für $(v, w) := (v, v')$:

→ autonomes DGI-System 1. Ordnung:

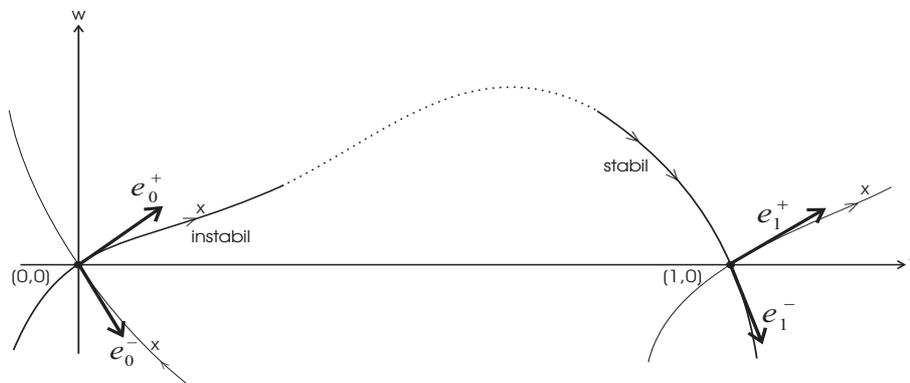
$$\begin{cases} v' = w \\ w' = -\sigma w - f(v) \end{cases} \quad (1.6)$$

mit

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (v, w) = (0, 0), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (v, w) = (1, 0)$$

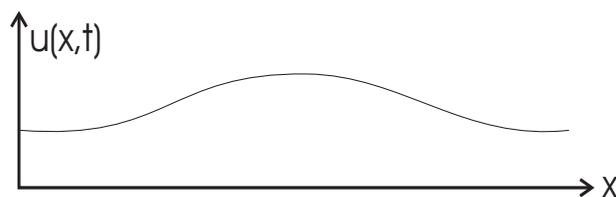
- $(0, 0)$, $(1, 0)$ sind kritische Punkte von (1.6); Sattelpunkte (der Linearisierung von (1.6))

$$\text{zB an } (0, 0): \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f'(0) & -\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$



Für genau ein $\sigma < 0 \exists$ *heterokliner Orbit* von $(0, 0)$ nach $(1, 0)$.

1.5 Oberflächenwellen in Wasser



$u(x, t) > 0 \dots$ Wassertiefe (recht seicht; lange Wellen)

Korteweg–de Vries (KdV) Gleichung:

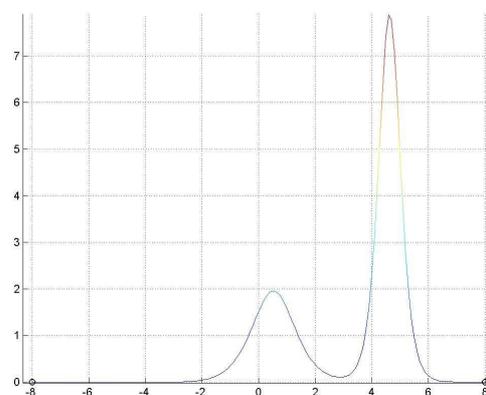
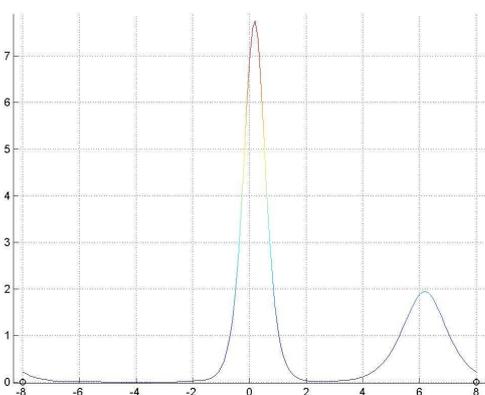
$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \text{ in } \mathbb{R} \times (0, \infty)$$

+ AB

- $\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx$ ist Integralinvariante (const. in t); $\exists \infty$ viele.
- $\forall \sigma > 0, \forall c \in \mathbb{R}$ ist

$$u(x, t) = \frac{\sigma}{2} \cosh^{-2} \left(\frac{\sqrt{\sigma}}{2} (x - \sigma t - c) \right)$$

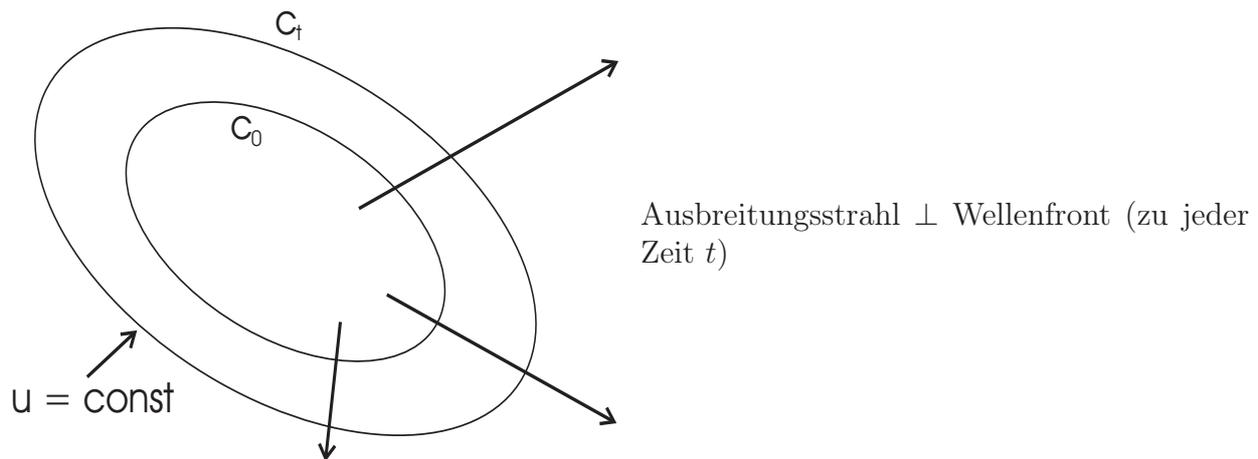
spezielle Lösung von KdV („Soliton“, Geschwindigkeit σ hängt von Höhe ab) \rightarrow einsetzen!
 Trotz Nichtlinearität gibt es eine Art *Superpositionsprinzip*: 2 Solitonen können einander ohne Änderung durchdringen (nur Zeitverzögerung bei Interaktion).



Hohes Soliton ist schneller und „überholt“ tiefes Soliton; beide laufen nach rechts.

1.6 Geometrische Optik

Betrachte ausbreitende (Licht-)Wellenfront in homogenem, isotropen Medium ($0 < c =$ Lichtgeschwindigkeit):



ges: $u(x)$, $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, mit

$u = \text{const} = t$ (Niveaulinien) ... Wellenfront zur Zeit t .

$u(x)$ = Zeitpunkt, an dem die Wellenfront (erstmal) durch x geht.

u erfüllt die *Eikonal Gleichung* (voll-nichtlinear!)

$$|\nabla u| = \frac{1}{c}.$$

- spezielle Lösungen:

Kugelwelle um Ursprung: $u(x) = \frac{1}{c}|x| + b$, $b \in \mathbb{R}$

ebene Wellen: $u(x) = a \cdot x + b$; $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$, $|a| = \frac{1}{c}$

- zeitabhängige Formulierung

$S(x, t) := t - u(x)$... "Level-Set-Funktion"

$$\Rightarrow \begin{cases} S_t & = c|\nabla_x S|, t > 0 \\ S(x, 0) & = S_0(x) \end{cases} \quad (1.7)$$

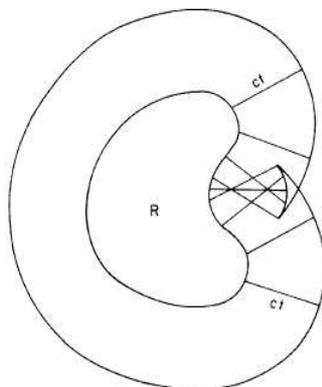
Wahl der AB: $S(x, 0) = 0 \quad \forall x \in C_0$ (geschl. Hyperfläche)

$S(x, 0) :=$ Distanz von x zu C_0 ($S < 0$ aussen, $S > 0$ innen)

ges: Evolution der Niveaulinie C_t mit $S(x, t) = 0 \quad \forall x \in C_t$ (=Front zur Zeit t)

$S < 0 (> 0)$... vor (hint)er der Front

- (1.7) besser für Numerik \rightarrow *Level-Set-Methoden*. Front kann sich vor und zurück bewegen.
- beschreibt auch Entwicklung von *Kaustiken* (Bild aus [Wh])



Wavefront construction for a disturbance initially confined to the region R .

1.7 Hamilton-Mechanik

Hamilton-Jacobi-Gleichung (voll-nichtlinear!) für ein mechanisches System:

$$\begin{cases} u_t + H(\nabla u, x) = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ \text{AB: } u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (1.8)$$

geg: $H(p, x)$... *Hamilton Funktion*, zB

$$\tilde{H} = \underbrace{\frac{1}{2m}|p|^2}_{\text{kin. Energie}} + \underbrace{\Phi(x)}_{\text{pot. Energie}}$$

u hat Dimension einer *Wirkung*

- Lösung mit Hilfe von *Charakteristiken*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(s) = \nabla_p H(p(s), x(s)) \\ \dot{p}(s) = -\nabla_x H(p(s), x(s)) \\ \dot{z}(s) = \nabla_p H(p(s), x(s)) \cdot p(s) - H(p(s), x(s)), \end{array} \right\} \text{Hamilton Gleichungen}$$

mit $z(s) := u(x(s), s) \in \mathbb{R}$ (Verifikation durch Einsetzen in (1.8)).

→ $2n + 1$ gekoppelte DGl. Bem: $t = s$ wählbar.

- Unterschied zur Charakteristikenmethode für *quasilin.* Gl. 1. Ordnung:
 $p(x) := \nabla u(x(s)) \in \mathbb{R}^n$ wird hier als zusätzliche Variable eingeführt.
- speziell für $\tilde{H}(p, x)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \frac{1}{m}p \\ \dot{p} = -\nabla_x \Phi(x) \\ \dot{z} = \frac{1}{2m}|p|^2 - \Phi(x) =: L(p, x) \dots \text{Lagrange Funktion} \end{array} \right\} m\ddot{x} = -\nabla_x \Phi \dots \text{Newtonsche Bewegungsgl.}$$

1.8 Minimalflächen

$(x_1, x_2, u(x_1, x_2))$, $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ sei eine Fläche im \mathbb{R}^3 .

$$\text{Oberfläche} = O(u) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx$$

Aufgabe: Finde Fläche minimalen Inhalts, die die Randbedingung $u = g$ auf $\partial\Omega$ erfüllt
 (\rightarrow *Variationsproblem*, d.h. Minimierung des Funktionals $O(u)$).

Anwendung: eingespannte Membran, Seifenblasen

Man kann zeigen: $u(x)$ erfüllt die *Minimalflächengleichung* (quasilinear, glm. elliptisch)

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} = 0 \quad , \quad \Omega, \\ u = g \quad , \quad \partial\Omega. \end{array} \right.$$

$$\text{bzw: } (1 + u_{x_2}^2)u_{x_1x_1} - 2u_{x_1}u_{x_2}u_{x_1x_2} + (1 + u_{x_1}^2)u_{x_2x_2} = 0$$

$$\text{Koeffizientenmatrix: } A = \begin{pmatrix} 1 + u_{x_2}^2 & -u_{x_1}u_{x_2} \\ -u_{x_1}u_{x_2} & 1 + u_{x_1}^2 \end{pmatrix} \geq I$$

Dabei ist $\frac{1}{2} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right)$ die *mittlere Krümmung* der Fläche (=Durchschnitt der Hauptkrümmungen d.h. Min./Max. der Normalkrümmungen).

Minimalflächen: mittlere Krümmung = 0 \Rightarrow lokale Sattelform.

2 nichtlineare elliptische Gleichungen

Ziel: Lösung von nichtlinearen elliptischen Gleichungen der Form:

$$\begin{aligned} -\Delta u + b(u) &= f(x); & -\Delta u + b(\nabla u) + \mu u &= f(x) \quad \dots \text{semilinear}; \\ -\operatorname{div} a(\nabla u) &= f(x) \quad \dots \text{quasilinear}, \end{aligned}$$

da

$$\operatorname{div} a(\nabla u) = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} a_i(\nabla u) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial z_j}(\nabla u) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u$$

Methoden:

- Fixpunktsätze: Umformulierung der PDGI als $S(u) = u$
- a-priori Abschätzungen: Ungleichungen an $S(u)$, die unabhängig von u sind
- Galerkin-Methode für Approximationsfolge u_m in endl. dim. Räumen

2.1 Vergleichsprinzip für quasilineare Differentialoperatoren

Betrachte den quasilinearen Differentialoperator

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, \nabla u) u_{x_i x_j} + b(x, u, \nabla u)$$

für $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ (beschränktes Gebiet)

Annahmen:

- $b(x, \cdot, p) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei monoton fallend $\forall x \in \Omega, \forall p \in \mathbb{R}^n$.
- a_{ij}, b seien C^1 bez. p .

Satz 2.1 (*Vergleichsprinzip für klassische Lösungen*): Seien $u, v \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ gegeben, L sei elliptisch bez. u oder v (gleichmäßig in $x \in \Omega$), und

$$\begin{aligned} L(u) &\geq (>) L(v) && \text{in } \Omega \\ u &\leq v && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

$\Rightarrow u \leq (<) v$ in Ω .

Bew:

- oBdA sei L elliptisch bez. u , glm. bez. x (d.h. $A(x, \nabla u(x)) = [a_{ij}(x, \nabla u(x))]_{ij} \geq \lambda > 0 \quad \forall x \in \Omega$).

(a)

$$\begin{aligned}
 L(u) - L(v) &= \sum_{ij} \overbrace{a_{ij}(x, \nabla u)}{=: a_{ij}(x)} \partial_{ij}^2 (u - v) \\
 &+ \underbrace{\sum_{ij} [a_{ij}(x, \nabla u) - a_{ij}(x, \nabla v)] \partial_{ij}^2 v + b(x, u, \nabla u) - b(x, u, \nabla v)}_{=: \sum_i b_i(x) \partial_i w \text{ (mit 2x MWS)}} \\
 &+ \underbrace{b(x, u, \nabla v) - b(x, v, \nabla v)}_{\leq 0, \text{ falls } u(x) \geq v(x), \text{ da } b \searrow} \geq 0; \quad \text{mit } w := u - v \\
 \Rightarrow \tilde{L}w &:= \sum_{ij} a_{ij}(x) \partial_{ij}^2 w + \sum_i b_i(x) \partial_i w \geq 0
 \end{aligned}$$

auf $\Omega_+ := \{x \in \Omega \mid w(x) \geq 0\}$

und $w|_{\partial\Omega} \leq 0$ (lt. VS), also auch $w|_{\partial\Omega_+} \leq 0$.

- lt. schwachem Maximumsprinzip auf $\overset{\circ}{\Omega}_+$: $w \leq 0$ in Ω .

(b) Für $L(u) > L(v)$ (d.h. $\tilde{L}w > 0$ auf $\overset{\circ}{\Omega}_+$) kann w kein nicht-negatives Maximum haben (siehe Beweisteil 1 von Satz 5.26 (lin. PDG1): an Max. würde $\tilde{L}w \leq 0$ gelten) $\Rightarrow w < 0$ auf Ω .

□

Anwendung: Eindeutigkeit von klassischen Lösungen des Dirichlet-Problems

$$\begin{cases} L(u) = f(x) & , \quad \Omega \\ u = u_D(x) & , \quad \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

Korollar 2.2 Sei L elliptisch bez. u oder v . Seien $u, v \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ Lösungen von (2.1) $\Rightarrow u = v$.

Definition 2.3

(a) $\bar{u} \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ heißt obere Lösung von (2.1), wenn

$$\begin{aligned}
 L(\bar{u}) &\leq f && \text{in } \Omega, \\
 \bar{u} &\geq u_D && \text{auf } \partial\Omega.
 \end{aligned}$$

(b) $\underline{u} \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ heißt untere Lösung von (2.1), wenn

$$\begin{aligned} L(\underline{u}) &\geq f && \text{in } \Omega, \\ \underline{u} &\leq u_D && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Korollar 2.4 Sei L elliptisch bez. u oder (\underline{u} und \bar{u}). Für eine klassische Lösung u von (2.1) gilt:

$$\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \bar{u}(x), \quad x \in \Omega$$

Vergleichsprinzip für schwache Lösungen:

betrachte $L(u) = \operatorname{div} a(\nabla u) + b(u, x)$ und

$$\begin{cases} L(u) = 0 & , \quad \Omega \\ u = 0 & , \quad \partial\Omega \end{cases} \quad (2.2)$$

Annahmen:

- $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatt und streng monoton
(d.h. $\exists \Theta > 0$ mit $(a(p) - a(q)) \cdot (p - q) \geq \Theta |p - q|^2 \forall p, q \in \mathbb{R}^n$)
- $b(\cdot, x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei monoton fallend $\forall x \in \Omega$

Definition 2.5 1. $u \in H_0^1(\Omega)$ heißt schwache Lösung von (2.2) wenn

$$\int_{\Omega} -a(\nabla u) \cdot \nabla v + b(u, x)v \, dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.3)$$

2. \bar{u} / \underline{u} heißt schwache obere /untere Lösung, wenn

$$\int_{\Omega} -a(\nabla \bar{u} / \nabla \underline{u}) \cdot \nabla v + b(\bar{u} / \underline{u}, x)v \, dx \leq / \geq 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad v \geq 0 \text{ f.ü.} \quad (2.4)$$

Zusätzlich gelte: $a(\nabla u / \nabla \bar{u} / \nabla \underline{u}), b(u / \bar{u} / \underline{u}, x) \in L^2(\Omega)$.

Satz 2.6 Seien $\bar{u}, \underline{u} \in H^1(\Omega)$ schwache obere und untere Lösungen von (2.2) mit $\underline{u} \leq 0, \bar{u} \geq 0$ f.ü. auf $\partial\Omega$.

\Rightarrow Jede schwache Lösung von (2.2) erfüllt:
 $\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \bar{u}(x)$ f.ü. in Ω .

Bew:

(2.4) für \bar{u} minus (2.3):

$$\int_{\Omega} [a(\nabla u) - a(\nabla \bar{u})] \cdot \nabla v \leq \int_{\Omega} \underbrace{[b(u, x) - b(\bar{u}, x)]}_{\leq 0 \text{ für } u(x) \geq \bar{u}(x)} v \leq 0 \quad \text{für } v := (u - \bar{u})^+.$$

Es gilt $v \geq 0$, $v|_{\partial\Omega} = 0$.

Bem: $w \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow w^+ \in H_0^1(\Omega)$ und

$$\nabla(w^+) = \begin{cases} \nabla w & , \text{ f.ü. auf } \{w \geq 0\} \\ 0 & , \text{ f.ü. auf } \{w \leq 0\} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 & \geq \int_{\{u \geq \bar{u}\}} [a(\nabla u) - a(\nabla \bar{u})] \cdot \nabla(u - \bar{u}) \, dx \\ & \stackrel{\text{str. mon.}}{\geq} \underbrace{\Theta}_{>0} \int_{\{u \geq \bar{u}\}} |\nabla(u - \bar{u})|^2 \, dx = \Theta \int_{\Omega} \underbrace{|\nabla(u - \bar{u})^+|^2}_{\in H_0^1} \, dx \end{aligned}$$

$\Rightarrow (u - \bar{u})^+ = 0$, wegen Poincaré Ungleichung $\Rightarrow u \leq \bar{u}$.

□

Referenzen: [GT] § 8.5, 9.2, [Ev] § 9.3

2.2 Fixpunktmethoden

2.2.1 Fixpunktsatz von Banach

für streng kontraktive Abbildungen (bei stationären Problemen muss ein „Parameter“ klein sein):

Satz 2.7 Sei X BR, $S : X \rightarrow X$ eine (nichtlin.) Abbildung mit

$$\|S(u_1) - S(u_2)\| \leq \lambda \|u_1 - u_2\| \quad \forall u_1, u_2 \in X, \lambda < 1$$

$\Rightarrow S$ hat eindeutigen Fixpunkt u und $S^k(u_0) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u \quad \forall u_0 \in X$.

Beispiel 2.8 Seien $f \in L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz mit $Lip(b)$ hinreichend klein (konkret: $Lip(b) < (c_p^2(\Omega) + 1)^{-1}$). Dann hat die semilineare Gl.

$$\begin{cases} -\Delta u + b(\nabla u) = f(x) & , \quad \Omega \\ u = 0 & , \quad \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.5)$$

eine eindeutige schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$. Für $\partial\Omega \in C^2$ gilt ferner $u \in H^2(\Omega)$.

Bew:

$$\begin{aligned} \text{Betrachte } S : H_0^1(\Omega) &\rightarrow H_0^1(\Omega), \\ v &\mapsto u = S(v) \end{aligned}$$

als eindeutige schwache Lösung von $-\Delta u + b(\nabla v) = f(x)$, Ω , d.h.:

$$\text{ges. } u \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \underbrace{\int_{\Omega} (f - b(\nabla v)) \varphi \, dx}_{=: F(\varphi)} \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \quad (2.6)$$

- b Lip. $\Rightarrow |b(y)| \leq |b(0)| + \underbrace{\beta}_{= Lip(b) > 0} |y| \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} b^2(\nabla v) \, dx \leq 2|b(0)|^2 \text{vol}(\Omega) + 2\beta^2 \int_{\Omega} \underbrace{|\nabla v|}_{\in L^2}^2 \, dx < \infty$$

$$\Rightarrow F \in H^{-1}(\Omega) \Rightarrow \exists! \text{ schwache Lösung } u \in H_0^1(\Omega) \text{ von (2.6)}$$

(S ist wohldefiniert)

- Kontraktivität von S :

$$\int_{\Omega} \nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla \varphi \, dx = - \int_{\Omega} [b(\nabla v_1) - b(\nabla v_2)] \varphi \, dx$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq \frac{1}{\kappa} \|b(\nabla v_1) - b(\nabla v_2)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{\beta}{\kappa} \|\nabla v_1 - \nabla v_2\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\beta}{\kappa} \|v_1 - v_2\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Koerzitivitätskonstante $\kappa = (c_p^2(\Omega) + 1)^{-1}$.

- H^2 -Regulalität lt. Satz 5.25 lin. PDGL.

□

2.2.2 Fixpunktsatz von Schauder

für kompakte Abbildungen:

Satz 2.9 Sei X BR, $\{\} \neq K \subset X$ konvex und $S : K \rightarrow K$ eine stetige Abbildung (bez. $\|\cdot\|_X$). Ferner sei

(a) K kompakt,

oder

(b) K abgeschlossen und $S(K)$ ist präkompakt in X .

$\Rightarrow S$ hat einen Fixpunkt in K .

Bew: (nicht konstruktiv) mit FPS von Brouwer (siehe [Ev]).

Bem: keine Aussage über *Eindeutigkeit*.

Bsp:

$$\begin{cases} -\Delta u + b(u) = f(x) & , \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ beschränkt} \\ u = 0 & , \quad \partial\Omega \end{cases}$$

(mit b monoton wachsend, lokal Lipschitz und bijektiv auf \mathbb{R}) hat eindeutige schwache Lösung.

Wähle $X = L^2(\Omega)$; $K = \{u \in L^\infty(\Omega) \mid \underline{u} \leq u(x) \leq \bar{u} \text{ f.ü. in } \Omega\} \subset X$, konvex, abgeschlossen; $f \in L^\infty(\Omega)$ (siehe Übung).

Achtung: Wahl von K mit $S : K \rightarrow K$ oft trickreich.

typische Anwendungsstrategie für FPS von Schauder:

1. für klassische Lösungen:

- a) (optional) *Eindeutigkeit* der klassischen Lösung: Korollar 2.2 (durch Maximumsprinzip)
- b) obere/untere Lösung als *a-priori Schranken* für klassische Lösung: Korollar 2.4 (durch Maximumsprinzip)
- c) *Existenz* einer schwachen Lösung (FPS von Schauder, Schranken aus (b) sind Hinweis für Wahl der konvexen Menge)
- d) *Regularität*: schwache Lösung ist klassische (§5.4, lin PDGI)

2. für schwache Lösungen:

- a) obere/untere Lösung als *a-priori Schranken* für schwache Lösung: Satz 2.6
- b) Existenz einer schwachen Lösung (FPS von Schauder)

- c) (optional) *Eindeutigkeit*, z.B. mit L^2 -„Energimethode“, Max. Prinzip (vgl. Bew. (a) von Satz 2.25)

Anwendung des FPS von Schauder auf semilin. Gl.

$$L(u) := -\operatorname{div}(A\nabla u) + cu = f(x, u), \quad \Omega; \quad u = 0, \quad \partial\Omega \quad (2.7)$$

mit $A = (a_{ij}(x)) \dots$ symm., glm. pos. def.: $A(x) \geq \alpha > 0$, $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$; $0 \leq c \in L^\infty(\Omega)$; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschr.

Definition 2.10 $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Carathéodory-Fkt., wenn

1. $\forall u \in \mathbb{R} : x \mapsto f(x, u)$ ist messbar,
2. für f.a. $x \in \Omega : u \mapsto f(x, u)$ ist stetig.

Einschub: Sobolev Einbettungen

Satz 2.11 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschr., $\partial\Omega$ Lipschitz. \Rightarrow Die Einbettung

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad p \in N^*$$

mit $N^* = [1, \infty]$ für $n = 1$, $N^* = [1, \infty)$ für $n = 2$, $N^* = [1, \frac{2n}{n-2}]$ für $n \geq 3$ ist stetig und (außer für $n \geq 3$, $p = \frac{2n}{n-2}$) sogar kompakt.

Notation:

$$N_* := \left\{ q \in [1, \infty) \mid p \in N^* \text{ mit } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right\} \dots \text{Hölder konj. Indexmenge (ohne } q = \infty)$$

Satz 2.12 (Existenz für semilin. Gl.) Sei f Carathéodory-Fkt. mit

$$|f(x, u)| \leq h(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad u \in \mathbb{R}; \quad h \in L^q(\Omega) \quad \text{für ein } q \in N_*$$

$\Rightarrow \exists$ schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von (2.7); \exists Konst. $C = C(A, c, \Omega) > 0$:

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|h\|_{L^q(\Omega)} \quad (2.8)$$

Definition 2.13 $u \in H_0^1(\Omega)$ ist schwache Lösg. von (2.7), wenn

$$\int_{\Omega} (\nabla u^T A \nabla w + cuw) \, dx = \underbrace{\int_{\Omega} f(x, u)w \, dx}_{=: F_u(w)} \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \quad (2.9)$$

rechte Seite wohldef., da $w \in H_0^1 \hookrightarrow L^p$, $p \in N^*$ und $|f(\cdot, u)| \leq h \in L^q$, $q \in N_*$

$$\Rightarrow \|f(\cdot, u)w\|_{L^1(\Omega)} \leq C \|h\|_{L^q(\Omega)} \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \quad (2.10)$$

Bew:

1. Def. von S : Sei $K := \{v \in L^2(\Omega) \mid \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \underbrace{M}_{>0}\}$, und M wird später fixiert. K ist kompakte, konvexe Teilmenge von $X := L^2(\Omega)$ [lt. Rellich-Kondrachov; zusätzlich abgeschlossen in X , da $\|v_k\|_{H^1} \leq M \Rightarrow$ Teilfolge $v_{k_j} \rightharpoonup v$ in H^1 (Banach-Alaoglu) $\Rightarrow \|v\|_{H^1} \leq \liminf \|v_{k_j}\|_{H^1} \leq M$ (schwach unterhalb stetig)].

$$\text{Betrachte } S : \begin{aligned} K &\rightarrow H_0^1(\Omega), \\ v &\mapsto u = S(v) \end{aligned}$$

als eindeutige schwache Lösung des linearen Randwertproblems

$$L(u) = f(x, v), \quad \Omega; \quad u = 0, \quad \partial\Omega. \quad (2.11)$$

Laut (2.10): F_v ist stetiges lineares Funktional auf $H_0^1(\Omega)$ (zunächst für $v \in K$; geht auch für $v \in L^2(\Omega)$ – für (3.)).

2. $S : K \rightarrow K$: zentraler Schritt!

betrachte (2.11) mit Testfunktion $w := u \in H_0^1$:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{1+c_p^2} \|u\|_{H_0^1}^2 &\stackrel{\text{Poincaré}}{\leq} \alpha \|\nabla u\|_{L^2}^2 \\ &\stackrel{L \text{ glm. ell.}}{\leq} \int_{\Omega} [\nabla u^T A \nabla u + c u^2] dx = \int_{\Omega} f(x, v) u dx \\ &\stackrel{(2.10)}{\leq} C \|h\|_{L^q} \|u\|_{H_0^1} \\ \Rightarrow \|u\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq C \frac{1+c_p^2}{\alpha} \|h\|_{L^q(\Omega)} =: M \end{aligned}$$

also: S ist Selbstabbildung auf K ; (2.8) gilt, falls \exists FP u .

3. S ist stetig auf $L^2(\Omega)$:

für schwache Lösung von (2.11) gilt mit $\tilde{h}(v) := f(\cdot, v) \in L^q(\Omega)$:

$$\|u\|_{H_0^1} \leq C_1 \|\tilde{h}\|_{H^{-1}} \stackrel{(2.10)}{\leq} C_2 \|\tilde{h}\|_{L^q},$$

also $\tilde{h} \mapsto u$ ist linear, stetig von $L^q \rightarrow L^2$.

Lemma 2.14 Sei f Carathéodory-Fkt. mit

$$|f(x, u)| \leq C |u|^r + h(x) \text{ für f.a. } x \in \Omega, \quad u \in \mathbb{R}; \quad 1 \leq q, \quad q r < \infty; \quad C \geq 0; \quad 0 \leq h \in L^q(\Omega)$$

$$\text{Def. } \tilde{h}(u) := f(\cdot, u(\cdot)) \text{ für } u \in L^{qr}(\Omega).$$

$$\Rightarrow \tilde{h} \text{ ist stetig von } L^{qr}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega).$$

Anwendung des Lemmas mit $C = 0$, $r = \frac{2}{q}$: $v \mapsto \tilde{h}(v)$ ist stetig von $L^2 \rightarrow L^q$.

Also: $v \mapsto u = S(v)$ ist stetig von $L^2 \rightarrow L^2$.

4. lt. Schauder: \exists FP $u \in K$ mit $S(u) = u$, (2.8) gilt.

□

Einschub: dominierte Konvergenz

Satz 2.15 (dominierte Konvergenz) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\{f_k\} \subset L^1(\Omega)$.

(i) Es gelte $f_k \rightarrow f$ f.ü. in Ω , und \exists Fkt. $g \in L^1(\Omega)$ mit $|f_k| \leq g$ f.ü. in $\Omega \forall k$.

$\Rightarrow f \in L^1(\Omega)$, $f_k \rightarrow f$ in $L^1(\Omega)$.

(ii) (Umkehrung) Es gelte $f_k \rightarrow f$ in $L^1(\Omega)$.

$\Rightarrow \exists$ TF $\{f_{k'}\}$ mit $f_{k'} \rightarrow f$ f.ü. in Ω , und $\exists g \in L^1(\Omega)$ mit $|f_{k'}| \leq g \forall k'$.

Bem: Satz gilt auch für $L^p(\Omega)$ mit $1 \leq p < \infty$ für (i), $1 \leq p \leq \infty$ für (ii).

Beweis von (ii) in [Br], Th. IV.9

Bew. von Lemma 2.14:

Sei $\{u_k\} \subset L^{qr}(\Omega)$ mit $u_k \rightarrow u$ in $L^{qr}(\Omega)$.

lt. Satz 2.15 (ii): \exists TF $\{u_{k'}\}$ mit $u_{k'} \rightarrow u$ f.ü. in Ω , und $|u_{k'}| \leq u^* \in L^{qr}(\Omega) \forall k'$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tilde{h}(u_{k'}) &\rightarrow \tilde{h}(u) \text{ f.ü. in } \Omega \\ |\tilde{h}(u_{k'})| &\leq C \underbrace{|u^*|^r}_{\in L^q} + h \in L^q(\Omega) \end{aligned}$$

lt. Satz 2.15 (i): $\tilde{h}(u_{k'}) \rightarrow \tilde{h}(u)$ in $L^q(\Omega)$.

Da Limes $\tilde{h}(u)$ eindeutig (\forall Teilfolgen) \Rightarrow gesamte Folge $\{\tilde{h}(u_k)\}$ konvergiert.

□

2.2.3 Fixpunktsatz von Schaefer

für kompakte Abbildungen. Dieser ist meist leichter anwendbar als der FPS von Schauder und ein Spezialfall vom FPS von Leray-Schauder.

Satz 2.16 Sei X BR und $S : X \rightarrow X$ eine stetige, kompakte Abbildung. Sei die Menge

$$\{u \in X \mid u = \lambda S(u) \text{ für ein } 0 \leq \lambda \leq 1\} \tag{2.12}$$

beschränkt.

$\Rightarrow S$ hat einen Fixpunkt.

Bew: mit FPS von Schauder (siehe [Ev]).

Bem: 1) keine Aussage über *Eindeutigkeit*

2) Vorteile gegenüber FPS von Schauder: keine konvexe, kompakte Menge festzulegen. Gleichmäßige Abschätzung nur für die FP-Menge (2.12) nötig, aber nicht für ganz $S(K)$.

Idee: *a-priori* Abschätzung für mögliche Fixpunkte von λS , $0 \leq \lambda \leq 1$ liefert Existenz eines Fixpunktes von S .

Bsp:

$$\begin{cases} -\Delta u + b(\nabla u) + \mu u = 0 & , \Omega \\ u = 0 & , \partial\Omega \end{cases} \quad (2.13)$$

mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $\partial\Omega \in C^2$; $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ glatt und Lipschitz, daher

$$\exists c > 0 : |b(p)| \leq c(1 + |p|) \quad \forall p \in \mathbb{R}^n. \quad (2.14)$$

Satz 2.17 Für $\mu > 0$ hinreichend groß hat (2.13) eine eindeutige Lösung $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Bew: betrachte $S : u \mapsto w$ auf $X := H_0^1(\Omega)$, definiert durch Linearisierung

$$\begin{cases} -\Delta w + \mu w = f(x) := -b(\nabla u) & , \Omega \\ w = 0 & , \partial\Omega \end{cases} \quad (2.15)$$

1. $S : X \rightarrow X$:

sei $u \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow f \in L^2(\Omega)$, wegen Ungleichung (2.14).

$w = S(u) \in H_0^1(\Omega)$ ist eindeutige schwache Lösung von (2.15).

Laut Satz 5.25 (lin. PDGl):

$$\|w\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.16)$$

2. S ist stetig und kompakt:

- $u \mapsto b(\nabla u) : H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ ist Lipschitz,
- $f \mapsto w : L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ ist stetig $\Rightarrow S$ ist stetig.

- Laut (2.14): $u \mapsto b(\nabla u)$ bildet beschränkte Mengen von $H_0^1(\Omega)$ auf beschränkte Mengen von $L^2(\Omega)$ ab.
- Laut (2.16) $f \mapsto w$ bildet beschränkte Mengen von $L^2(\Omega)$ auf beschränkte Mengen von $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ab; sind präkompakt in $H_0^1(\Omega)$ (lt. Satz von Rellich-Kondrachov / komp. Einbettung) $\Rightarrow S$ ist kompakt.

3. Beschränktheit von (2.12) in X : zentraler Schritt !

- Sei $u \in H_0^1(\Omega)$ Lösung von $u = \lambda S(u)$ für ein $0 < \lambda \leq 1$ (da $\lambda = 0 \Rightarrow u = 0$), also $w := \frac{u}{\lambda} = S(u)$ mit $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, d.h.

$$\text{f.ü. in } \Omega: -\Delta \left(\frac{u}{\lambda}\right) + \mu \left(\frac{u}{\lambda}\right) = -b(\nabla u) \quad \left| \cdot \lambda u, \int_{\Omega} dx \right.$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \mu u^2 dx = - \int_{\Omega} \lambda b(\nabla u) u dx$$

$$\stackrel{(2.14), \lambda \leq 1}{\leq} \int_{\Omega} c(1 + |\nabla u|)|u| dx \stackrel{\text{Young}}{\leq} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + c_1 \int_{\Omega} (u^2 + 1) dx$$

$$\Rightarrow \text{für } \mu > c_1: \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 + (\mu - c_1) \int u^2 \leq c_1 |\Omega| \text{ (unabh. von } 0 \leq \lambda \leq 1)$$

4. laut Satz 2.16: S hat Fixpunkt $u \in H_0^1(\Omega)$ und $u \in H^2(\Omega)$

5. Eindeutigkeit der Lösung:

betrachte (2.13) für die Differenz zweier Lösungen $v := u_1 - u_2$:

$$-\Delta v + b(\nabla u_1) - b(\nabla u_2) + \mu v = 0 \quad \left| \cdot v, \int_{\Omega} \dots dx \right.$$

$$0 = \int \left\{ |\nabla v|^2 + \underbrace{[b(\nabla u_1) - b(\nabla u_2)]v}_{|\dots| \leq L|\nabla v|} + \mu v^2 \right\} dx$$

$$\geq \int \left\{ |\nabla v|^2 - L|\nabla v||v| + \mu v^2 \right\} dx$$

$$= \int \left(|\nabla v| - \frac{L}{2}|v| \right)^2 dx + \left(\mu - \frac{L^2}{4} \right) \int v^2 dx$$

$$\Rightarrow v = 0 \text{ falls } \mu > \frac{L^2}{4}. \quad \square$$

Referenzen: [Ev] § 9.2, [GT] § 10, [Jü] § 2.1-2.2, [Br]

2.3 monotone Operator-Methode

Betrachte quasilineare Gleichung für $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} -\operatorname{div} a(\nabla u) = f & , \quad x \in \Omega \\ u = 0 & , \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.17)$$

mit $f \in L^2(\Omega)$; $a = (a_1, \dots, a_n)$ ist „glattes“ Vektorfeld $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$;
 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet mit „glattem“ Rand.

- *Anwendung*: quasilin. poröse Medium Gleichung, stationär (quasilinear \rightarrow flussabhängige Durchlässigkeit)

- Bedingungen an a :

Definition 2.18 Ein Vektorfeld $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heiſst

1. *monoton, falls*

$$(a(p) - a(q)) \cdot (p - q) \geq 0 \quad \forall p, q \in \mathbb{R}^n.$$

2. *streng monoton, falls es ein $\Theta > 0$ gibt mit:*

$$(a(p) - a(q)) \cdot (p - q) \geq \Theta |p - q|^2 \quad \forall p, q \in \mathbb{R}^n \quad (2.18)$$

Bsp:

1) Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (gleichmäßig) konvex $\Rightarrow a := \nabla \Phi$ ist (streng) monoton, da:

$$\begin{aligned} (a(p) - a(q)) \cdot (p - q) &= \sum_{i=1}^n (\partial_i \Phi(p) - \partial_i \Phi(q))(p_i - q_i) \\ &= \int_0^1 \sum_{i,j} \partial_{ij} \Phi(p + t(q - p))(p_j - q_j)(p_i - q_i) dt \geq 0 \quad \text{da } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p^2} \geq 0 \quad (\text{bzw. } \geq \Theta > 0) \end{aligned}$$

z.B.: $\Phi(p) = \sqrt{1 + |p|^2}$ konvex, $a(p) = \frac{p}{\sqrt{1 + |p|^2}}$ (vgl. Minimalflachengleichung)

2) Sei die skalare Funktion a_j bez. x_j *nicht* monoton wachsend $\Rightarrow a$ ist *nicht* monoton.

- weitere Annahmen:

$$(A1) \quad |a(p)| \leq c(1 + |p|) \quad (\text{liefert } a(\nabla u) \in L^2(\Omega) \text{ für } u \in H^1(\Omega))$$

$$(A2) \quad a(p) \cdot p \geq \alpha |p|^2 - \beta \quad (\text{verallgem. Koerzivitatsbedingung})$$

für $c, \alpha > 0, \beta \geq 0; \forall p \in \mathbb{R}^n$

- schwache Formulierung von (2.17):

ges: $u \in H_0^1(\Omega)$ mit:

$$\int_{\Omega} a(\nabla u) \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.19)$$

Ziel: (2.19) hat eindeutige Lösung $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$

Strategie:

- (i) konstruiere Approximationsfolge u_m in endlich dimensionalem Teilraum von $H_0^1(\Omega)$ (Galerkin Methode)
- (ii) $u = \lim_{m \rightarrow \infty} u_m$ löst (2.19) \Rightarrow Existenz einer schwachen Lösung
- (iii) Eindeutigkeit, $u \in H^2(\Omega)$

Schritt (i):

- $\{w_k\}$ sei ON-Basis von $H_0^1(\Omega)$ mit IP $\langle u, v \rangle_1 = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$
- suche $u_m = \sum_{k=1}^m d_m^k w_k \in H_0^1(\Omega)$, als Lösung von

$$\int a(\nabla u_m) \cdot \nabla w_k = \int f w_k; \quad k = 1, \dots, m \quad \text{Galerkin Gleichungen} \quad (2.20)$$

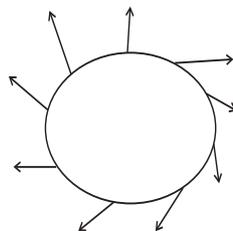
Lemma 2.19 Sei $v : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig mit

$$v(x) \cdot x \geq 0 \text{ für } |x| = r \text{ und ein } r > 0.$$

$\Rightarrow \exists x_0 \in \overline{K_r(0)}$ mit $v(x_0) = 0$.

Bew: mit Fixpunktsatz von Brouwer; nicht konstruktiv; x_0 nicht eindeutig ([Ev] § 9.1).

Bsp.: $v(x) = (x_1, 0, \dots, 0)^T$



Satz 2.20 $\forall m \in \mathbb{N} : \exists$ Lösung $u_m \in H_0^1$ von (2.20).

Bew:

def. stetige Funktion $v = (v^1, \dots, v^m) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch

$$v^k(\underbrace{d}_{\in \mathbb{R}^m}) := \int_{\Omega} a(\underbrace{\sum_{j=1}^m d_j \nabla w_j}_{\substack{\text{wird } \nabla u_m, \\ \text{wenn } v(d)=0}}) \cdot \nabla w_k - f w_k \, dx; \quad k = 1, \dots, m \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v(d) \cdot d &= \int_{\Omega} a\left(\sum d_j \nabla w_j\right) \cdot \left(\sum d_j \nabla w_j\right) - f\left(\sum d_j w_j\right) \, dx \\ &\stackrel{(A2)}{\geq} \int_{\Omega} \alpha \left| \sum d_j \nabla w_j \right|^2 - \beta - f\left(\sum d_j w_j\right) \, dx \\ &= \alpha |d|^2 - \beta |\Omega| - \sum d_j \int f w_j \, dx \\ &\stackrel{\text{Young}}{\geq} \frac{\alpha}{2} |d|^2 - \beta |\Omega| - c_1 \sum_{j=1}^m \langle f, w_j \rangle_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Für $\{w_j\}$, m geg. reicht das schon für Anwendung von Lemma 2.19; Abschätzung aber noch nicht gleichmäßig in m .

- sei $y \in H_0^1$ schwache Lösung von $-\Delta y = f$ auf Ω .

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^m \langle \underbrace{f}_{=-\Delta y}, w_j \rangle_{L^2}^2 \stackrel{\text{part. Int.}}{=} \sum_{j=1}^m \langle y, w_j \rangle_1^2 \stackrel{\text{Bessel}}{\leq} \|y\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \stackrel{\text{PDGI §5.3}}{\leq} c_2 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 =: \tilde{c} \quad (\text{unabh. von } \{w_j\}, m)$$

$\Rightarrow v(d) \cdot d \geq \frac{\alpha}{2} |d|^2 - c_3 \geq 0$ für $|d| = r$ und r hinreichend groß.

- aus Lemma 2.19: $\exists d \in \mathbb{R}^m$ mit $v(d) = 0$, also (aus (2.21)):

$$u_m := \sum_{j=1}^m d_j w_j \text{ löst (2.20).}$$

- wichtig: Lemma 2.19 gilt nur für endliche Dimensionen.

□

Einschub: schwache Konvergenz

- Sei X BR $\Rightarrow X' = \{ \text{stetige, lin. Funktionale auf } X \}$ ist BR

Definition 2.21 Die Folge $\{u_k\} \subset X$ konvergiert schwach gegen $u \in X$ ($u_k \rightharpoonup u$), wenn

$$\langle v, u_k \rangle \rightarrow \langle v, u \rangle \quad \forall v \in X'.$$

Es gilt:

(i) $u_k \rightarrow u \Rightarrow u_k \rightharpoonup u$

(ii) jede schwach konvergente Folge ($u_k \rightharpoonup u$) ist beschränkt, und

$$\|u\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|.$$

(Beweis mit Banach-Steinhaus)

(iii) Sei $u_k \rightharpoonup u$ in X und $v_k \rightarrow v$ in X'

$$\Rightarrow \langle v_k, u_k \rangle \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \langle v, u \rangle$$

(wichtig für Konvergenz von quadrat. Termen in PDGL.)

(iv) Für $\dim X < \infty$ gilt: $u_k \rightarrow u \Leftrightarrow u_k \rightharpoonup u$

Bsp: $u_k(x) = \sin kx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ in $L^2(0, 1)$

(aber u_k konvergiert weder punktweise noch f. ü. !)

- Achtung: Nichtlinearitäten sind i.A. *nicht stetig* bez. schw. Konvergenz (vergleiche mit (iii)!).

Bsp: $u_k^2 = \sin^2 kx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \neq (w\text{-}\lim u_k)^2 = 0$;

aber: $w_k \rightarrow w$ in $L^{2p}(\Omega) \Rightarrow w_k^2 \rightarrow w^2$ in $L^p(\Omega)$

Der folgende Spezialfall vom Satz von Alaoglu liefert schwache Kompaktheit:

Satz 2.22 (Satz von Eberlein-Šmuljan):

Sei X ein reflexiver BR (d.h. $X'' = X$), und $\{u_k\} \subset X$ beschränkt.

$\Rightarrow \exists$ Teilfolge $\{u_{k_j}\} \subset \{u_k\}$ und $\exists u \in X$ mit $u_{k_j} \rightharpoonup u$

Bem:

(i) Hilbert Räume sind reflexiv.

(ii) $L^p(\Omega)' = L^q(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
 $L^p(\Omega)$ ist reflexiv für $1 < p < \infty$

(iii) $L^p(\Omega)$ ist separabel für $1 \leq p < \infty$

Schritt (ii):

- für den Limes $m \rightarrow \infty$ brauchen wir glm. Abschätzungen:

Satz 2.23 $\exists c$ (unabhängig von m) mit

$$\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c(1 + \|f\|_{L^2(\Omega)}) \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad (2.22)$$

Bew: aus der Galerkin-Gleichung (2.20) folgt (mit $u_m = \sum_{k=1}^m d_m^k w_k$):

$$\int_{\Omega} a(\nabla u_m) \cdot \nabla u_m \, dx = \int_{\Omega} f u_m \, dx \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underbrace{\alpha}_{>0} \int |\nabla u_m|^2 &\stackrel{(A2)}{\leq} \int a(\nabla u_m) \cdot \nabla u_m \, dx + \beta|\Omega| = \int f u_m \, dx + \beta|\Omega| \\ &\stackrel{\text{Young}}{\leq} \beta|\Omega| + \varepsilon \int u_m^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int f^2 \\ &\stackrel{\text{Poincaré}}{\leq} \beta|\Omega| + \varepsilon c_p^2 \int |\nabla u_m|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int f^2 \end{aligned}$$

- (2.22) folgt für $\varepsilon > 0$, klein genug.

□

Limes von u_m für $m \rightarrow \infty$

$$\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \Rightarrow$$

- (i) Laut Satz 2.22 \exists Teilfolge $\{u_{m_j}\}$, $j \in \mathbb{N}$ und $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $u_{m_j} \rightharpoonup u$ in $H_0^1(\Omega)$.

$$\text{d.h. } \langle v, u_{m_j} \rangle \rightarrow \langle v, u \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)' =: H^{-1}(\Omega).$$

$$\text{bzw. } \begin{cases} u_{m_j} \rightharpoonup u & \text{in } L^2(\Omega) \\ \nabla u_{m_j} \rightharpoonup \nabla u & \text{in } L^2(\Omega) \end{cases}$$

- (ii) Laut Satz von Rellich-Kondrachov ($H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, für Ω beschränkt): $u_{m_j} \rightarrow u$ in $L^2(\Omega)$

Ziel: Limes $m \rightarrow \infty$ in (2.20) ausführen; dann löst u (2.19)

Problem: $a(\nabla u_{m_j}) \rightarrow a(\nabla u)$?? (Nichtlinearität + schwache Konvergenz von ∇u !)

Rettung: Monotonie von a (Methode von Browder & Minty)

Satz 2.24 Sei a monoton und erfülle (A1), (A2).
 \Rightarrow (2.19) hat eine schwache Lösung in H_0^1 .

Bew:

$$\bullet \|a(\nabla u_m)\|_{L^2(\Omega)} \stackrel{(A1)}{\leq} c(1 + \|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)}) \stackrel{(2.22)}{\leq} c$$

$\Rightarrow \exists \vec{b} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ und (ev. weitere) Teilfolge, so dass

$$a(\nabla u_{m_j}) \rightharpoonup \vec{b} \text{ in } L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$$

\Rightarrow (Limes in (2.20)): $\int \vec{b} \cdot \nabla w_k = \int f w_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \int \vec{b} \cdot \nabla v = \int f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{2.24}$$

- zeige $\vec{b} = a(\nabla u)$ („Limes-Identifikation“) mittels Monotonie von a :
wegen Monotonie gilt $\forall m \in \mathbb{N}, \forall w \in H_0^1(\Omega)$:

$$0 \leq \int (a(\nabla u_m) - a(\nabla w)) \cdot (\nabla u_m - \nabla w) dx$$

$$\stackrel{(2.23)}{=} \int \underbrace{f}_{\in L^2} \underbrace{u_m}_{\in L^2} - \underbrace{a(\nabla u_m)}_{\in L^2} \cdot \underbrace{\nabla w}_{\in L^2} - \underbrace{a(\nabla w)}_{\in L^2} \cdot (\nabla u_m - \nabla w) dx$$

für $m = m_j \rightarrow \infty$

$$0 \leq \int f u - \vec{b} \cdot \nabla w - a(\nabla w) \cdot (\nabla u - \nabla w) dx$$

(2.24) mit $v = u$

$$= \int (\vec{b} - a(\nabla w)) \cdot \nabla (u - w) dx \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

Trick: Konvergenz vom quadr. Term $\int a(\nabla u_m) \cdot \nabla u_m \rightarrow \int \vec{b} \cdot \nabla u$ durch (2.23) umgehen.

- setze $w := u - \lambda v; \lambda > 0, v \in H_0^1(\Omega)$ fest

$$\Rightarrow 0 \leq \int (\vec{b} - a(\nabla u - \lambda \nabla v)) \cdot \nabla v dx$$

mit $\lambda \rightarrow 0$:

$$0 \leq \int (\vec{b} - a(\nabla u)) \cdot \nabla v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

ersetze v durch $-v$:

$$0 = \int (\vec{b} - a(\nabla u)) \cdot \nabla v$$

$$\Rightarrow \int a(\nabla u) \cdot \nabla v = \int f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

aus (2.24), also u ist schwache Lösung

□

Schritt (iii):

Satz 2.25 Sei $a \in C^2(\mathbb{R}^n)$ streng monoton und erfülle (A1),(A2); sei $\partial\Omega$ eine C^2 -Mannigfaltigkeit.

\Rightarrow (a) schwache Lösung von (2.19) ist eindeutig.
 (b) $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Bew (a): seien $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$ schwache Lösungen

$$\Rightarrow \int a(\nabla u_1) \cdot \nabla v = \int a(\nabla u_2) \cdot \nabla v = \int f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

sei $v := u_1 - u_2$

$$\Rightarrow 0 = \int (a(\nabla u_1) - a(\nabla u_2)) \cdot (\nabla u_1 - \nabla u_2) \stackrel{(2.18)}{\geq} \underbrace{\Theta}_{>0} \int |\nabla u_1 - \nabla u_2|^2,$$

also $u_1 = u_2$ in Ω .

(b)

$$\bullet \operatorname{div} a(\nabla u) = \sum_{j,k=1}^n \underbrace{\frac{\partial a_j}{\partial p_k}(\nabla u)}_{\text{Jacobi-Matrix von } a(p)} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k};$$

Für die eindeutige Lösung u kann $\frac{\partial a_j}{\partial p_k}(\nabla u)$ als *gegebene* Koeffizienten-Matrix betrachtet werden $\Rightarrow u$ erfüllt lin. Gleichung

• wähle $p = q + h\xi$, $h \neq 0$ in (2.18)

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n \frac{a_j(q + h\xi) - a_j(q)}{h} \xi_j \geq \Theta |\xi|^2$$

$$h \rightarrow 0 : \sum_{jk} \underbrace{\frac{\partial a_j}{\partial p_k}(q) \xi_k \xi_j}_{=\nabla a_j \cdot \xi} \geq \underbrace{\Theta}_{>0} |\xi|^2, \quad \forall q \in \mathbb{R}^n$$

also: $-\operatorname{div} a(\nabla u) = f$ ist *gleichmäßig elliptisch*.

- mit kleiner Erweiterung von Satz 5.25 (Regularität bis zum Rand; aber hier $\partial a(\nabla u) \notin C^1(\bar{\Omega})$): $u \in H^2(\Omega)$, (2.17) gilt f. ü. in Ω .

□

Bem: Satz 2.24 kann nicht auf die Minimalfächengleichung

$$\operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

angewendet werden, da $a(p) = p/\sqrt{1 + |p|^2}$ nicht koerziv ist. Aber Eindeutigkeit möglich → Übungen.

Referenzen: [Ev] § 9.1, [RR] § 9.3, [Sh2] § II.2

2.4 stationäre Navier-Stokes-Gleichungen

Modell für stationäre Strömung einer homogenen (d.h. Dichte = const.), viskosen, inkompressiblen Flüssigkeit:

$$\underbrace{-\Delta u}_{\text{komponentenweise}} + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f, \quad \Omega \quad \dots \quad \text{NS-Gleichung} \quad (2.25)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad \Omega \quad \dots \quad \text{inkompressibel} \quad (2.26)$$

$$u = 0, \quad \partial\Omega \quad \dots \quad \text{Haft-RB,} \quad (2.27)$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ beschränktes Gebiet, $\partial\Omega \in C^1$.

ges: $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$... Geschwindigkeitsvektorfeld

$p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$... Druck

geg: $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$... (äußeres) Kraftfeld

Problem: p tritt in (2.25) “implizit” auf (in Variationsformulierungen als Lagrange-Multiplikatorfunktion für Nebenbedingung (2.26)).

Idee: p eliminieren

Herleitung der schwachen Formulierung:

\mathbb{R}^3 -Skalarprodukt von (2.25) mit $v \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)$, $\int_\Omega \dots dx$, partielle Integration \Rightarrow

$$\int_\Omega \underbrace{\nabla u : \nabla v}_{\text{Jacobi Matrix}} dx + \int_\Omega ((u \cdot \nabla) u) \cdot v dx - \underbrace{\int_\Omega p \operatorname{div} v dx}_{=0 \text{ falls } \operatorname{div} v = 0} = \int_\Omega f \cdot v dx, \quad (2.28)$$

$$\nabla u : \nabla v = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j},$$

$$(u \cdot \nabla) u \cdot v = \sum_{i,j=1}^3 u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} v_j$$

$X := \{v \in H_0^1(\Omega)^3 \mid \operatorname{div} v = 0 \text{ f.ü. in } \Omega\}$ ist separabler Hilbertraum mit

$$\|v\|_X^2 = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^{3 \times 3}}^2 = \sum_{i,j=1}^3 \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Schwache Formulierung:

ges: $u \in X$ mit

$$\int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \, dx + \int_{\Omega} (u \cdot \nabla) u \cdot v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx \quad \forall v \in X. \quad (2.29)$$

Gleichung (2.29) ist äquivalent zur Operatorgleichung

$$A_1 u + A_2 u = b \quad \text{in } X', \quad (2.30)$$

mit

$$\begin{aligned} A_1 : X &\rightarrow X', \quad {}_{X'}\langle A_1 u, v \rangle_X = \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \, dx && \text{(linear)} \\ A_2 : X &\rightarrow X', \quad {}_{X'}\langle A_2 u, v \rangle_X = \int_{\Omega} (u \cdot \nabla) u \cdot v \, dx && \text{(nichtlinear)} \\ b \in X' &, \quad {}_{X'}\langle b, v \rangle_X = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx \end{aligned}$$

Einschub: nichtlineare Abbildungen

Definition 2.26 Seien X, Y Banach Räume. $A : X \rightarrow Y$ heißt

- (i) beschränkt, wenn $\forall S \subset X$:
 S beschränkt in $X \Rightarrow A(S)$ ist beschränkt in Y ;
- (ii) demistetig, wenn $\forall \{u_n\} \subset X$:
 $u_n \rightarrow u$ in $X \Rightarrow A(u_n) \rightarrow A(u)$ in Y .
- (iii) stark stetig, wenn $\forall \{u_n\} \subset X$:
 $u_n \rightarrow u$ in $X \Rightarrow A(u_n) \rightarrow A(u)$ in Y .

Bem: A linear und kompakt $\Rightarrow A$ stark stetig

Definition 2.27 Sei V reflexiver Banach Raum. $A : V \rightarrow V'$ heißt

- (i) hemistetig, wenn $\forall u, v, w \in V$:
 $t \mapsto \langle A(u + tv), w \rangle$ ist stetig (als Fkt $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$);
- (ii) schwach abgeschlossen, wenn $\forall \{u_n\} \subset V$:
wenn $u_n \rightharpoonup u$ in V , $A(u_n) \rightharpoonup f$ in V'
 $\Rightarrow A(u) = f$;
- (iii) vom Typ M, wenn $\forall \{u_n\} \subset V$:
wenn $u_n \rightharpoonup u$ in V , $A(u_n) \rightharpoonup f$ in V' und $\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle A(u_n), u_n \rangle \leq \langle f, u \rangle$
 $\Rightarrow A(u) = f$;

(iv) koerziv, wenn $\forall u \in V$

$$\frac{\langle A(u), u \rangle}{\|u\|} \rightarrow \infty \text{ für } \|u\| \rightarrow \infty$$

(Limes glm., d.h. $\frac{\langle A(u), u \rangle}{\|u\|} \geq \zeta(\|u\|)$, $\zeta(R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \infty$)

(v) monoton, wenn $\forall u, v \in V$

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq 0$$

(vi) streng monoton, wenn $\forall u, v \in V$

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq \underbrace{\Theta}_{>0} \|u - v\|^2$$

Bem: Anwendung von “schwach abgeschlossen” bzw. “Typ M-Eigenschaft” zur Limes-Identifikation beim Lösen von $A(u) = f$: Approximationsfolge $u_n \rightharpoonup u$ mit $A(u_n) \rightharpoonup f$.

Bsp: Der Operator $A(u) = -\operatorname{div}(a(\nabla u)) : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ von Satz 2.24 ist monoton, koerziv, stetig.

Lemma 2.28 Sei $A : V \rightarrow V'$

- (i) hemistetig und monoton $\Rightarrow A$ ist vom Typ M
- (ii) vom Typ M und beschränkt $\Rightarrow A$ ist demistetig
- (iii) stark stetig $\Rightarrow A$ ist demistetig $\Rightarrow A$ ist hemistetig.
- (iv) stark stetig $\Rightarrow A$ ist kompakt.

Bew: [Sh2], Übung

Beispiel 2.29 Sei $V = H_0^1(\Omega)$, $A(u) = -\operatorname{div}(a(u)\nabla u) : H_0^1 \rightarrow H^{-1}$, mit $a \in C(\mathbb{R})$, $0 < \delta_1 \leq a(u) \leq \delta_2$, Ω beschränkt.

- A ist beschränkt, da $\forall u, v \in H_0^1(\Omega)$:

$$|\langle A(u), v \rangle| = \left| \int a(u) \nabla u \cdot \nabla v \, dx \right| \leq \|a\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} \quad (2.31)$$

- A ist koerziv, da

$$\langle A(u), u \rangle = \int a(u) |\nabla u|^2 \, dx \stackrel{\text{Poincaré}}{\geq} C\delta_1 \|u\|_{H_0^1}^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \quad (2.32)$$

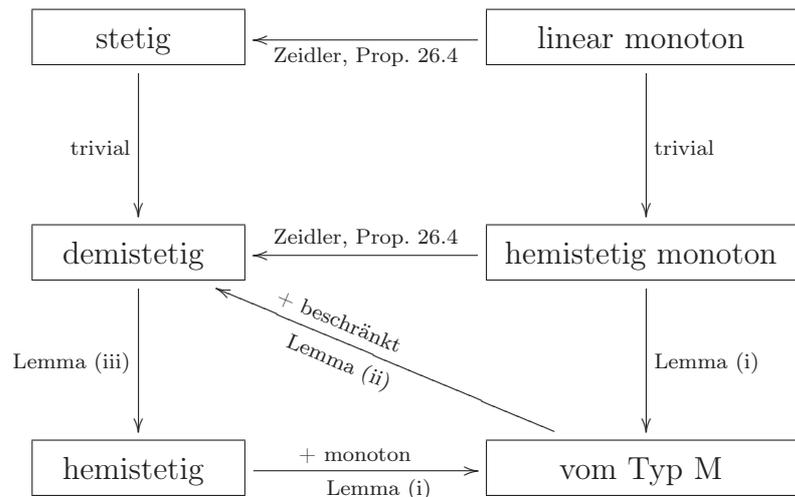


Abbildung 2.1: Beziehungen zwischen Eigenschaften von Operatoren

- A ist schwach abgeschlossen, also auch vom Typ M , da:
 Sei $u_n \rightharpoonup u$ in H_0^1 mit $A(u_n) \rightharpoonup f$ in H^{-1} und $v \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$

$\Rightarrow u_n \rightarrow u$ in $L^2(\Omega)$, $a(u_n) \rightarrow a(u)$ in $L^2(\Omega)$ (mit Lebesgue).

$$\Rightarrow \langle A(u_n), v \rangle = \int \underbrace{a(u_n)}_{\in L^2(\Omega)} \nabla v \cdot \nabla u_n \, dx \rightarrow \int \underbrace{a(u)}_{\in L^2(\Omega)} \nabla v \cdot \nabla u \, dx = \langle f, v \rangle \text{ (laut VS),}$$

da $f \in H^{-1}$ und C_0^∞ dicht in H_0^1 : $f = -\operatorname{div}(a(u)\nabla u) = A(u)$

- A ist demistetig und hemistetig laut Lemma 2.28ii + iii

Eigenschaften der Operatoren A_1, A_2 aus (2.30):

Lemma 2.30

- (i) $A_1 : X \rightarrow X'$ ist linear, beschränkt \Rightarrow stetig, koerziv, monoton und schwach abgeschlossen
- (ii) $A_2 : X \rightarrow X'$ ist beschränkt und stark stetig
- (iii) $A := A_1 + A_2 : X \rightarrow X'$ ist beschränkt, koerziv und vom Typ M .

Bew:

- (i) A_1 ist vektorwertige Variante von $-\Delta$ auf $H_0^1(\Omega)$, also Spezialfall (mit $a(u) = 1$) von Bsp 2.29.
 $\Rightarrow A_1$ ist linear, stetig, koerziv und schwach abgeschlossen; monoton direkt aus Def. von A_1 .

(ii) A_2 beschränkt, da:

Seien $u, v \in X$:

$$\begin{aligned} |\langle A_2 u, v \rangle| &\leq \int_{\Omega} |u| |\nabla u| |v| dx \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|u\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^4(\Omega)} \\ &\stackrel{H^1 \hookrightarrow L^4}{\leq} C \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|A_2 u\|_{X'} \leq C \|u\|_{H^1}^2 \stackrel{\text{Poincaré}}{\leq} C \|u\|_X^2, \quad \text{also } A_2 \text{ beschränkt.}$$

A_2 stark stetig, da:

Sei $u_k \rightharpoonup u$ in X , also $\|u_k\|_X \leq C$. Da $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$, $u_k \rightarrow u$ in $L^4(\Omega)$.
z.z.

$$\|A_2 u_k - A_2 u\|_{X'} = \sup_{\substack{v \in X \\ \|v\| \leq 1}} |\langle A_2 u_k - A_2 u, v \rangle| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad (2.33)$$

Widerspruchsannahme für Teilfolge $\{u_k\}$:

$\exists \varepsilon_0 > 0$, $\{v_k\} \subset X$, $\|v_k\|_X \leq 1$ mit

$$|\langle A_2 u_k - A_2 u, v_k \rangle| \geq \varepsilon_0 \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.34)$$

$\{v_k\}$ beschränkt in X ; lt. Satz 2.22:

$$\Rightarrow \exists \text{ TF } \{v_{k'}\} \text{ mit } v_{k'} \rightharpoonup v \text{ in } X \Rightarrow v_{k'} \rightarrow v \text{ in } L^4(\Omega)$$

$$\Rightarrow |\langle A_2 u_{k'} - A_2 u, v_{k'} \rangle| =$$

$$\begin{aligned} &= \left| \int_{\Omega} (u \cdot \nabla)(u_{k'} - u) \cdot (v_{k'} - v) + [(u_{k'} - u) \cdot \nabla] u_{k'} \cdot v_{k'} \right. \\ &\quad \left. + (u \cdot \nabla)(u_{k'} - u) \cdot v \, dx \right| \\ &\leq \underbrace{\|u\|_{L^4} \|\nabla(u_{k'} - u)\|_{L^2}}_{\leq C} \underbrace{\|v_{k'} - v\|_{L^4}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|u_{k'} - u\|_{L^4}}_{\rightarrow 0} \underbrace{\|\nabla u_{k'}\|_{L^2} \|v_{k'}\|_{L^4}}_{\leq C} \\ &\quad + \left| \int_{\Omega} \underbrace{(u \cdot \nabla)(u_{k'} - u) \cdot v \, dx}_{\rightarrow 0 \text{ in } L^2} \right| \xrightarrow{k' \rightarrow \infty} 0 \quad (2.35) \end{aligned}$$

Wid. zu (2.34), also $A_2 u_k \rightarrow A_2 u$ in X' .

Bem: Wegen des letzten Terms in (2.35) geht ein direkter Beweis nicht; denn dort wäre Gleichmäßigkeit in $\|v\| \leq 1$ nötig.

(iii) A beschränkt, da A_1, A_2 beschränkt.

A koerziv, da $\forall u \in X$ (also $\operatorname{div} u = 0$):

$$\begin{aligned} \langle A_2 u, u \rangle &= \int \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_i u_j \, dx = \frac{1}{2} \int \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial |u|^2}{\partial x_j} \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \int (\operatorname{div} u) |u|^2 \, dx = 0 \end{aligned}$$

Da A_1 koerziv:

$$\langle A u, u \rangle = \langle A_1 u, u \rangle \stackrel{(2.32)}{\geq} \alpha \|u\|_X^2 .$$

A vom Typ M (sogar schwach abg.), da:

$$\text{Sei } u_k \rightharpoonup u \text{ in } X, A u_k = A_1 u_k + A_2 u_k \rightharpoonup b \text{ in } X' .$$

Da A_2 stark stetig: $A_2 u_k \rightarrow A_2 u$; also $A_1 u_k \rightharpoonup b - A_2 u$ in X' .

Da A_1 schw. abg.: $b - A_2 u = A_1 u$, also $b = A u$.

□

Bem: Die Methode von Browder & Minty (in §2.3 für $-\operatorname{div} a(\nabla u) = f$) liefert für Operatorgleichungen $A(u) = b$ mit A monoton, koerziv, hemistetig eine Lösung ([Sh2] Th. II.2.2).

Bsp: Operator $A(u) := -\operatorname{div}(a(\nabla u)) : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ von Satz 2.24 ist monoton, koerziv, stetig.

Nun Erweiterung um (stark stetige, nicht-monotone) Störungen durch Terme niedriger Ordnung. Typische Beispiele haben die Form $A = A_1 + A_2$, mit $A_1 : X \rightarrow X'$ ist ein monotoner hemistetiger Operator, und $A_2 : X \rightarrow X'$ ist ein stark stetiger Operator ([Ru] §3.2, [Sh2], Cor. II.2.2).

Satz 2.31 (Brezis 1968) *Sei X reflexiver, separabler Banachraum. Sei $A : X \rightarrow X'$ beschränkt, koerziv und vom Typ M.*

$$\Rightarrow \quad \forall b \in X' : \exists \text{ Lösung } u \in X \text{ der Operatorgleichung } A(u) = b .$$

Bew. (mit Galerkin Methode, wie in §2.3):

Sei $\{v_k\}$ ein Basis von X .

ges: Lösung $u_m = \sum_{k=1}^m d_k^m v_k$ von Galerkin Gleichungen:

$$0 = {}_{X'} \langle A(u_m) - b, v_k \rangle_X = \left\langle A \left(\sum_{j=1}^m d_j^m v_j \right) - b, v_k \right\rangle =: g_k(d^m); \quad k = 1, \dots, m \quad (2.36)$$

mit $d^m = (d_1^m, \dots, d_m^m)$.

Lt. Lemma 2.28 (ii): A ist demistetig, da beschr. und Typ M.

$\Rightarrow g := (g_1, \dots, g_m) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist stetig.

Sei $\|u_m\|_X = R$ hinreichend groß, unabhängig von m :

$$\begin{aligned} g(d^m) \cdot d^m &= \sum_{k=1}^m g_k(d^m) d_k^m = \langle A(u_m) - b, u_m \rangle \\ &\geq \underbrace{\left(\frac{\langle A(u_m), u_m \rangle}{\|u_m\|_X} - \|b\|_{X'} \right)}_{\rightarrow \infty \text{ für } R \rightarrow \infty} \|u_m\|_X > 0 \quad \forall \|u_m\|_X > R. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Wegen der endlich-Dimensionalität gilt $g(d^m) \cdot d^m \geq 0$ auch für $\forall \|d^m\| = \tilde{R}_m$. Lt. Lemma 2.19: $\exists d^m \in \mathbb{R}^m$ mit $g(d^m) = 0$. Damit folgt aus (2.37) $g(d^m) \cdot d^m = 0$, und für die Lösungen u_m gilt die a-priori Abschätzung $\|u_m\|_X \leq R$, $m \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow \exists$ TF mit $u_{m'} \rightharpoonup u$ in X

z.z.: u löst Operatorgleichung $A(u) = b$.

$\|u_m\|_X \leq R \Rightarrow \|A(u_m)\|_{X'} \leq C(R)$, da A beschränkt.

$\Rightarrow \exists$ TF mit $A(u_{m'}) \rightharpoonup z$ in X' .

Aus (2.36):

$$0 = \lim_{m' \rightarrow \infty} \langle A(u_{m'}) - b, v \rangle = \langle z - b, v \rangle \quad \forall v \in \text{span}\{v_1, v_2, \dots\},$$

also $z = b$.

Setze $v = u_{m'}$ in (2.36) (zulässig, da jedes $u_{m'}$ nur endlich dim. Linearkombination)

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \lim_{m' \rightarrow \infty} \langle A(u_{m'}) - b, u_{m'} \rangle \\ \Rightarrow \lim_{m' \rightarrow \infty} \langle A(u_{m'}), u_{m'} \rangle &= \lim_{m' \rightarrow \infty} \langle b, u_{m'} \rangle \stackrel{u_{m'} \rightharpoonup u}{=} \langle b, u \rangle \end{aligned}$$

Bisher gezeigt: $u_{m'} \rightharpoonup u$ in X , $A(u_{m'}) \rightharpoonup b$ in X' , $\lim_{m' \rightarrow \infty} \langle A(u_{m'}), u_{m'} \rangle = \langle b, u \rangle$.
Da A vom Typ M: $A(u) = b$ □

Satz 2.32 (Existenz für stationäre NS-Gl.) Sei $f \in L^2(\Omega)^3$, Ω beschr., $\partial\Omega \in C^1$
 \Rightarrow NS-Gleichungen (2.25) - (2.27) haben eine schwache Lösung $u \in X$.

Bew:

Lt. Lemma 2.30, Satz 2.31: $\exists u \in X$, das schwache Formulierung (2.29) löst. □

Mit einer modifizierten schwachen Formulierung lässt sich auch der Druck p finden: Unter den Voraussetzungen von Satz 2.32 gilt (siehe unten): $\exists (u, p) \in X \times L^2(\Omega)$, so dass $\forall v \in H_0^1(\Omega)^3$:

$$\underbrace{\int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \, dx + \int_{\Omega} (u \cdot \nabla) u \cdot v \, dx - \int_{\Omega} f \cdot v \, dx}_{=: \langle F, v \rangle} = \int_{\Omega} p \operatorname{div} v \, dx \quad (2.38)$$

Bem: Im Gegensatz zu bisherigen schwachen Formulierungen ist hier eine Asymmetrie zwischen den Räumen der gesuchten Lösung (u, p) und der Testfunktionen v .

Mit u aus Satz 2.32 ist F auf X definiert (und es verschwindet dort identisch). Der folgende Satz zeigt, dass das Funktional F so von X auf $H_0^1(\Omega)^3$ erweitert werden kann, dass (2.38) gilt:

Satz 2.33 (De Rham 1960) Sei $F \in (H_0^1(\Omega)^3)'$ mit

$$\langle F, v \rangle = 0 \quad \forall v \in X = \{v \in H_0^1(\Omega)^3 \mid \operatorname{div} v = 0\}. \quad (2.39)$$

$$\Rightarrow \exists! p \in L^2(\Omega) \quad \text{mit} \quad \int_{\Omega} p \, dx = 0, \quad \text{so dass} \quad \langle F, v \rangle = \int_{\Omega} p \operatorname{div} v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^3.$$

(Die Integralbedingung ist nur zur Normierung der Konstanten in p . Eindeutigkeit mittels Du Bois-Reymond Lemma.)

Das ist inhaltlich sehr ähnlich wie die Helmholtz-Zerlegung von Vektorfeldern:

Lemma 2.34 Sei $w \in L^2(\Omega)^3 \Rightarrow \exists!$ L^2 -orthogonale Zerlegung $w = u + \nabla p$ mit

$$u \in H(\operatorname{div}) := \{u \in L^2(\Omega)^3 \mid \operatorname{div} u \in L^2(\Omega)\}, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad u \cdot \nu = 0 \text{ auf } \partial\Omega; \quad p \in H^1(\Omega).$$

Bew: [DL3] §IX.1.3

Bem: u ist L^2 -Orthogonalprojektion von w auf div-freie Felder, die am Rand tangential sind; ∇p auf die Gradientenfelder.

“Anwendung” auf F (mit $-F \hat{=} w$):

Wegen (2.39): $-F \perp X$, also auf die div-freien Felder $\Rightarrow \exists p$ mit $-F = \nabla p$ bzw. $\langle F, v \rangle = - \int \nabla p v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^3$ (vgl. (2.38)).

Referenzen: [Ru] § 3.2, [Jü] § 4.1, [Sh2] § II.2, [Ze], [Te] § II.1

3 nichtlineare parabolische Gleichungen

3.1 H^{-1} und „parabolische“ Sobolev Räume

sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet.

Definition 3.1 $H^{-1}(\Omega) := H_0^1(\Omega)'$ mit der Dualitätsklammer

$$\underbrace{\langle f, \underbrace{u}_{\in H_0^1} \rangle}_{\in H^{-1}} \in \mathbb{R}$$

und der Norm

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{u \in H_0^1(\Omega); \|u\|=1} \langle f, u \rangle.$$

Wegen $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ gilt: $H^{-1}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$.

Satz 3.2 (Charakterisierung von H^{-1}) Sei $f \in H^{-1}(\Omega)$. \Rightarrow

(i) \exists Funktionen $f^0, f^1, \dots, f^n \in L^2(\Omega)$ (nicht eindeutig!) mit

$$\langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f^0 v + \sum_{j=1}^n f^j v_{x_j} dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{3.1}$$

also $f = f^0 - \sum_{j=1}^n f_{x_j}^j$ (Ableitung im distributionellen Sinn)

(ii)

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \inf_{f^j \in L^2(\Omega)} \left\{ \sqrt{\int_{\Omega} \sum_{j=0}^n |f^j|^2 dx} \mid (3.1) \text{ gilt} \right\}$$

Bew: [Ev]

Banachraum-wertige Funktionen:

Wir betrachten Lösungen $u(x, t)$ von Evolutionsproblemen als Funktionen von $t \in [0, T]$ mit Werten im Banach Raum X .

Definition 3.3

$C([0, T]; X) := \{u : [0, T] \rightarrow X \mid u \text{ stetig in } [0, T]\};$

$L^p(0, T; X) := \{u : (0, T) \rightarrow X \text{ messbar} \mid \int_0^T \|u(t)\|_X^p dt < \infty\}, 1 \leq p < \infty$ (“Bochner-Lebesgue Räume”);

$L^\infty(0, T; X) := \{u : (0, T) \rightarrow X \text{ messbar} \mid \text{ess sup}_{0 < t < T} \|u(t)\|_X < \infty\};$

$W^{1,p}(0, T; X) := \{u \in L^p(0, T; X) \mid u' \in L^p(0, T; X)\},$ wobei u' die zeitliche Ableitung (im distributionellen Sinn) ist; $1 \leq p \leq \infty$.

mit den Normen

$$\begin{aligned} \|u\|_{C(X)} &= \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X; \\ \|u\|_{L^p(X)} &= \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}; \quad 1 \leq p < \infty; \\ \|u\|_{L^\infty(X)} &= \text{ess sup}_{0 < t < T} \|u(t)\|_X; \\ \|u\|_{W^{1,p}(X)} &= \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p + \|u'(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}; \quad 1 \leq p < \infty; \\ \|u\|_{W^{1,\infty}(X)} &= \text{ess sup}_{0 < t < T} (\|u(t)\|_X + \|u'(t)\|_X) \end{aligned}$$

Bem: $u \in C(X) := C([0, T]; X)$ muss in x nicht stetig sein.

Satz 3.4 (i) $C(X); L^p(X); W^{1,p}(X), 1 \leq p \leq \infty$ sind Banach Räume.

(ii) $L^2(X) := L^2(0, T; X)$ ist ein Hilbert Raum mit Skalarprodukt

$$(u, v) = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt,$$

wenn X ein Hilbertraum ist.

(iii) sei X separabel, und $1 \leq p < \infty \Rightarrow L^p(X)$ separabel.

(iv) sei X reflexiver, separabler Banach Raum, $1 \leq p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
 $\Rightarrow L^p(0, T; X)' = L^q(0, T; X')$ (Bew: [Ze]).

Satz 3.5 (Pettis): Sei X separabler Banach Raum, dann gilt:

Die Funktion $f : [0, T] \rightarrow X$ ist messbar $\Leftrightarrow \forall u \in X' : t \mapsto \langle u, f(t) \rangle$ ist messbar (als skalare Funktion).

Satz 3.6 (Sobolev Einbettung, vgl. Satz 5.9)

Sei $u \in W^{1,p}(X)$ für ein $1 \leq p \leq \infty$.

$\Rightarrow u \in C(X)$ mit

$$\|u\|_{C(X)} \leq c \|u\|_{W^{1,p}(X)},$$

und c hängt nur von T ab.

3.2 schwache Formulierungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $\Omega_T := \Omega \times (0, T]$ für festes $T > 0$.

Ziel: Analyse von nichtlinearen parabolischen Gleichungen (in formaler Notation):

$$\begin{cases} u_t + L(u) = f(x, t) & , \quad \Omega_T \\ u = 0 & , \quad \partial\Omega \times [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x) & , \quad x \in \Omega \end{cases}$$

Bsp: $u_t - \Delta(u^\alpha) = u_t - \alpha \operatorname{div}(u^{\alpha-1} \nabla u) = 0 \dots$ poröse Medium Gleichung.
 $\alpha u^{\alpha-1} \dots$ Diffusionsrate ≥ 0 .

- Unterschiede zur Eigenfunktionsentwicklung von § 6.3 bzw. zur schwachen Formulierung von § 6.6 (lin PDGl):
 Operator L (bzw. Diffusionsrate) ist über u implizit t -abhängig. L kann degeneriert sein (im Bsp. für $u = 0$); Lösung i.A. nicht glatt.

Vorstudie: lineare Gleichungen mit zeitabhängigem Operator, d.h. $L(u) = L(t)u$ (vgl. § 6.6, lin PDGl).

Beispiel 3.7 $u_t - a(t)\Delta u = f(t)$ mit $f \in L^2(H^{-1}(\Omega))$ geg. und $0 < \alpha \leq a(t) \in C[0, T]$.

(1. Idee für) schwache Formulierung:

$$\int_0^T \underbrace{(u_t, v)_{L^2(\Omega)}}_{\text{noch vage}} dt + \int_0^T a(t) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx dt = \int_0^T {}_{H^{-1}} \langle f(t), v(t) \rangle_{H_0^1} dt \quad \forall v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad (3.2)$$

schwache Lösung muss erfüllen: $u \in L^2(H_0^1(\Omega))$

$$\Rightarrow u_t = a(t)\Delta u + f(t) \in L^2(H^{-1}(\Omega))$$

Also fordern wir auch: $u_t \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ und erstes Integral in (3.2) wird ersetzt durch $\int_0^T {}_{H^{-1}} \langle u_t(t), v(t) \rangle_{H_0^1} dt$.

Für die *abstrakte Formulierung* von allgemeineren Problemen machen wir

Definition 3.8 Sei H ein separabler Hilbert Raum und V ein separabler, reflexiver Banach Raum, wobei die Einbettung $V \hookrightarrow H$ stetig und dicht sei; H werde mit H' identifiziert (Riesz-Abbildung!). \Rightarrow Die Einbettung $H' \hookrightarrow V'$ ist stetig und dicht, und es gilt

$$\underbrace{v'}_{\text{Funktional} \in H' \subset V'} \langle \underbrace{u}_{\text{Funktion} \in H}, v \rangle_V = \langle u, v \rangle_H \quad \forall u \in H, \forall v \in V.$$

$$\Rightarrow V \hookrightarrow H \simeq H' \hookrightarrow V'.$$

Das Tripel (V, H, V') heißt dann ein Evolutionstriple (bzw. Gelfand-Tripel).

schwache Formulierung des Ortsoperators:

sei $L(t) \in C([0, T]; B(V, V'))$ (d.h. $L(t)$ ist beschränkter linearer Operator von V nach V' und $L(t)$ hängt stetig von t ab).

Zugehörige Bilinearform (vgl. §5.3, lin. PDGl):

$$a(t; u, v) = v' \langle L(t)u, v \rangle_V \quad \forall u, v \in V$$

Betrachten für gegebenes $u_0 \in H$, $f \in L^2(0, T; V')$:

$$\begin{cases} u_t + L(t)u &= f(t) & , \quad \Omega_T \\ u &= 0 & , \quad \partial\Omega \times [0, T] \\ u(0) &= u_0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Bsp: $H = L^2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$, $V' = H^{-1}(\Omega)$
 $L(t) = -a(t)\Delta$; $a(t; u, v) = a(t) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$

Definition 3.9 $u \in L^2(0, T; V)$ mit $u' \in L^2(0, T; V')$ heißt schwache Lösung von (3.3), wenn

(i) $\forall v \in V$ gilt:

$$v' \langle u'(t), v \rangle_V + a(t; u(t), v) = v' \langle f(t), v \rangle_V \text{ f.ü. in } (0, T). \quad (3.4)$$

(ii) $u(0) = u_0$

Bem:

- (i) Punktweise Definition bez. t in (3.4) mit $v \in V$ ist äquivalent zur integralen Definition in (3.2) mit $v \in L^2(V)$.
- (ii) Wegen $V \subset V'$ und Satz 3.6 gilt für schwache Lösungen: $u \in H^1(0, T; V') \hookrightarrow C([0, T]; V')$. D.h. der Anfangswert $u_0 \in H$ wird (zumindest) im V' -Sinn angenommen.

Es gilt sogar mehr (vgl. PDGl. Satz 6.24):

Lemma 3.10 Sei $p \in (1, \infty)$ und $p' = \frac{p}{p-1}$, und sei $u \in L^p(V)$ mit $u' \in L^{p'}(V')$ \Rightarrow

(i) $u \in C([0, T]; H)$ mit

$$\|u\|_{C(H)} \leq c \left(\|u\|_{L^p(V)} + \|u'\|_{L^{p'}(V')} \right), \quad (3.5)$$

und c hängt nur von T ab.

(ii)

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_H^2 = 2 \underbrace{\langle u'(t), u(t) \rangle}_{\in L^1(0, T)} \quad \text{f.ü. in } (0, T)$$

Bew:

(i) Sei zunächst zusätzlich $u \in C^1(H)$ \Rightarrow

$$\forall t, t^* \in [0, T] : \|u(t)\|_H^2 = \|u(t^*)\|_H^2 + 2 \int_{t^*}^t \langle u'(s), u(s) \rangle_H ds \quad (3.6)$$

wähle (lt. MWS) t^* so, dass:

$$\|u(t^*)\|_H^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \|u(s)\|_H^2 ds$$

Für fast alle $s \in [0, T]$ gilt $u(s) \in V$. Wegen Identifikation von H und H' :

$$\langle u'(s), u(s) \rangle_H = {}_{V'} \langle u'(s), u(s) \rangle_V \leq \|u'(s)\|_{V'} \|u(s)\|_V \quad (3.7)$$

aus (3.6):

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_H^2 &\leq \frac{1}{T} \int_0^T \|u(s)\|_H^2 ds + 2 \int_0^T \|u'(s)\|_{V'} \|u(s)\|_V ds \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \frac{1}{T} \|u\|_{L^2(H)}^2 + \underbrace{2 \|u'\|_{L^{p'}(V')} \|u\|_{L^p(V)}}_{\leq \|u\|_{L^p(V)}^2 + \|u'\|_{L^{p'}(V')}^2} \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned} \quad (3.8)$$

Falls $p \geq 2$: $L^p(V) \hookrightarrow L^2(V) \hookrightarrow L^2(H)$

$$\Rightarrow \text{aus (3.8): } \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_H^2 \leq C(T) \|u\|_{L^p(V)}^2 + \|u'\|_{L^{p'}(V')}^2. \quad (3.9)$$

Falls $1 < p < 2$: verwende folgende Interpolationsungleichung (folgt aus Hölder) von L^2 zw. L^p und L^∞ :

$$\frac{1}{T} \int_0^T \|u(t)\|_H^2 dt \leq \varepsilon \|u\|_{L^\infty(H)}^2 + C(\varepsilon) \|u\|_{L^p(H)}^2.$$

Hier folgt (3.9) aus (3.8) für $\varepsilon < 1$.

(3.5) folgt mit Dichtheitsargument.

(ii) folgt aus (3.6), 1. Teil von (3.7) mit $t^* \rightarrow t$. □

Satz 3.11 Sei (V, H, V') ein Evolutionstriplet, und die Bilinearform $a(t; \cdot, \cdot) \forall t \in [0, T]$ stetig und koerziv auf V sowie stetig in $t \in [0, T]$ (d.h. $a \in C([0, T]; B(V \times V; \mathbb{R}))$). Sei $u_0 \in H, f \in L^2(V')$.

\Rightarrow (3.3) hat eine eindeutige, schwache Lösung $u \in L^2(V) \cap H^1(V') \cap C(H)$.

Bew-Idee: (Details in [RR]):

(i) Eindeutigkeit:

Wähle Testfunktion $v = u(t) \in V$ in Def. 3.9, $\int_0^T \dots dt$.

\Rightarrow (mit Lemma 3.10(ii)):

$$\frac{1}{2} (\|u(T)\|_H^2 - \|u_0\|_H^2) + \int_0^T a(t; u(t), u(t)) dt = \int_0^T \langle f(t), u(t) \rangle dt \quad (3.10)$$

a koerziv, d.h. $a(t; u, u) \geq \kappa \|u\|_V^2 \Rightarrow$

$$\kappa \int_0^T \|u(t)\|_V^2 dt \leq \int_0^T \|f(t)\|_{V'} \|u(t)\|_V dt + \frac{1}{2} \|u_0\|_H^2 \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_{L^2(V')} \|u\|_{L^2(V)} + \frac{1}{2} \|u_0\|_H^2$$

Mit $x^2 \leq ax + b^2 (a, b \geq 0) \Rightarrow x \leq a + b$ folgt (für $x = \|u\|_{L^2(V)}$):

$$\|u\|_{L^2(V)} \leq C (\|f\|_{L^2(V')} + \|u_0\|_H), \quad (3.11)$$

wobei C nur von κ abhängt.

Das ist *a-priori Abschätzung* \Rightarrow Eindeutigkeit für lineare Gleichung.

(ii) Existenz (mit Galerkin Methode):

Sei $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ Basis von V . Betrachte die *Galerkin-Gleichungen*

für $u_n(t) := \sum_{j=1}^n \alpha_j(t) \varphi_j \in V \subset H$:

$$\begin{aligned} (u_n'(t), \varphi_j)_H &= -a(t; u_n(t), \varphi_j) + \overbrace{V' \langle f(t), \varphi_j \rangle_V}^{\in L^2(0, T)}; \quad j = 1, \dots, n \\ u_n(0) &= P_n u_0 \quad (= \text{Orthogonalprojektion von } H \text{ auf } \text{span}[\varphi_1, \dots, \varphi_n]) \end{aligned}$$

Lineares ODE-System für $\{\alpha_j(t)\}$ hat eindeutige Lösung in $H^1(0, T; \mathbb{R}^n)$.

- u_n erfüllt a-priori Abschätzungen analog zu (3.10), (3.11) – unabhängig von n :

$$\frac{1}{2}(\|u_n(T)\|_H^2 - \underbrace{\|P_n u_0\|_H^2}_{\leq \|u_0\|_H^2}) + \int_0^T a(t; u_n(t), u_n(t)) dt = \int_0^T \langle f(t), u_n(t) \rangle dt \quad (3.12)$$

$\Rightarrow \|u_n\|_{L^2(V)} \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow \exists$ Teilfolge mit $u_{n_k} \rightharpoonup u$ in $L^2(V)$.

- $u \in L^2(V) \cap H^1(V')$ ist schwache Lösung von (3.3).
 (vgl. Bew. von Satz 3.22i)

□

Bem: Abgesehen von der Zeitabhängigkeit von L ist das ein Spezialfall von Satz 3.17, 3.20.

Bsp: Sei $H = L^2(\Omega), V = H_0^1(\Omega)$,

$$L(t)u := - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u;$$

mit a_{ij}, b_i, c stetig und (a_{ij}) gleichmäßig positiv definit.

Gleichung für $\tilde{u}(x,t) = u(x,t)e^{-\beta t}$ (β groß genug) erfüllt Voraussetzungen von Satz 3.11. Insbesondere ist $\tilde{a}(t; \cdot, \cdot) = a(t; \cdot, \cdot) + \beta (\cdot, \cdot)_{L^2}$ koerziv auf V (siehe Übung).

Referenzen: [RR] §10.1, [Ev] § 7.1, [Sh2] § III.1-2

3.3 Reaktions-Diffusionsgleichungen

betrachte für festes $T > 0$:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(u) & , \Omega_T \\ u = 0 & , \partial\Omega \times [0, T] \\ u(0) = u_0 & \in L^2(\Omega) \end{cases} \quad (3.13)$$

Definition 3.12 $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ mit $u' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ ist schwache Lösung von (3.13), wenn (analog zu Def. 3.9):

(i) $\forall v \in H_0^1(\Omega) : \langle u'(t), v \rangle + a(u(t), v) = \langle f(u(t)), v \rangle$ f.ü. in $(0, T)$,
wobei $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$;

(ii) $u(0) = u_0$.

Satz 3.13 Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz (mit Konst. C_L) $\Rightarrow \exists!$ schwache Lösung von (3.13)

Bew: Idee: Linearisierung + FPS von Banach in $X := C([0, T_1]; L^2(\Omega))$ (wegen Lemma 3.10(i)) für $T_1 \in (0, T]$ hinreichend klein.

(i) Definition des Fixpunktoperators A :

$$f \text{ Lipschitz} \Rightarrow |f(z)| \leq C(1 + |z|) \quad (3.14)$$

sei $u \in X \Rightarrow h(t) := f(u(t)) \in C([0, T_1]; L^2(\Omega)) \subset L^2(0, T_1; L^2(\Omega))$.

laut Satz 3.11: Das *lineare* Problem

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = h & , \Omega_{T_1} \\ w = 0 & , \partial\Omega \times [0, T_1] \\ w(0) = u_0 \end{cases} \quad (3.15)$$

hat eindeutige schwache Lösung

$$w \in L^2(H_0^1(\Omega)) \cap H^1(H^{-1}(\Omega)) \cap C(L^2(\Omega)) \quad (3.16)$$

$\Rightarrow A(u) := w \in X$

(ii) Kontraktivität von A :

Seien $w = A(u)$, $\tilde{w} = A(\tilde{u})$, $h = f(u)$, $\tilde{h} = f(\tilde{u})$.
 $w - \tilde{w}$ erfüllt $\forall v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\langle w' - \tilde{w}', v \rangle + a(w - \tilde{w}, v) = (h - \tilde{h}, v)_{L^2} \quad \text{f.ü. in } (0, T_1)$$

wähle $v = \underbrace{w(t) - \tilde{w}(t)}_{\in H_0^1 \text{ f.ü.}}$ (bzw. mit Lemma 3.10 (ii)) \Rightarrow f.ü. in $(0, T_1)$ gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|w - \tilde{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|\nabla(w - \tilde{w})\|_{L^2(\Omega)}^2 = 2(h - \tilde{h}, w - \tilde{w})_{L^2} \\ & \leq \varepsilon \|w - \tilde{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|f(u) - f(\tilde{u})\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \stackrel{\text{Poincaré, (3.14)}}{\leq} \varepsilon C_p^2 \|\nabla(w - \tilde{w})\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C_L^2}{\varepsilon} \|u - \tilde{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

wähle $\varepsilon C_p^2 = 2 \Rightarrow$

$$\|w(s) - \tilde{w}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C_L^2}{\varepsilon} \int_0^s \|u(t) - \tilde{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq \frac{C_L^2}{\varepsilon} T_1 \|u - \tilde{u}\|_X^2 \quad \forall s \in [0, T_1]$$

(3.18)

⇒ Für T_1 klein genug (hängt nur von C_p und C_L ab!) ist A kontraktiv.

⇒ FPS von Banach: FP-Problem $A(u) = u$ hat eindeutige Lösung $u \in X$. Wegen (3.15) und (3.16) ist u auch eind. schwache Lösung von (3.13).

(iii) Fortsetzung der Lösung:

$u \in X \Rightarrow u(T_1) \in L^2(\Omega) \Rightarrow$ Lösung kann auf $[T_1, 2T_1]$ usw. fortgesetzt werden. \square

Beweisalternative: A^n ist kontraktiv auf $C([0, T]; L^2(\Omega))$ für $n = n(T)$ groß genug (→ Übung).

Bem: Satz 3.13 gilt analog für Systeme, d.h. $u \in \mathbb{R}^n$ (siehe [Ev]). Lipschitz-Annahme an f ist mathematisch wichtig, aber für chemische Anwendungen eine wesentliche Einschränkung: Dort ist f meist ein Polynom (z.B. quadratisch bei binärer Reaktion).

Definition 3.14 Seien X, Y Banach Räume. $f : X \rightarrow Y$ heißt lokal Lipschitz, wenn $\forall R \geq 0: \exists L(R)$ mit

$$\|f(u_1) - f(u_2)\|_Y \leq L(R)\|u_1 - u_2\|_X \quad \forall u_{1,2} \in X \text{ mit } \|u_{1,2}\|_X \leq R.$$

Bem: f muss hier keine skalare (d.h. punktweise) Funktion von $u(x)$ sein; kann Differential-, Integraloperatoren beinhalten.

Bsp: $f(u) = \pm u^2$

$$\Rightarrow f : L^2(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega) \not\subset L^2(\Omega), \text{ aber } L^1(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \text{ in 1D.} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \|f(u_1) - f(u_2)\|_{H^{-1}(\Omega)} &\leq C\|(u_1 - u_2)(u_1 + u_2)\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq \underbrace{2RC}_{=:L(R)} \|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} \text{ für } \|u_{1,2}\|_{L^2(\Omega)} \leq R \end{aligned}$$

Satz 3.15 Sei $f : L^2(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ lokal Lipschitz \Rightarrow

(i) $\exists t_{\max} \in (0, \infty]$, und $\forall T < t_{\max}$ gilt: (3.13) hat eindeutige schwache Lösung auf $[0, T]$.

(ii) falls $t_{\max} < \infty$, dann:

$$\lim_{t \nearrow t_{\max}} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} = \infty.$$

(analog zu ODEs)

Bew:

(i) Verwende FPS von Banach auf Kugel

$$K_R := \{u \in X = C([0, T_1]; L^2(\Omega)) \mid \|u\|_X \leq R\}$$

mit $R = R(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}) := 2 \max(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}, 1)$.

a) Definition des Fixpunktoperators A wie in Satz 3.13:

Sei $u \in K_R \Rightarrow h(t) := f(u(t)) \in C([0, T_1]; H^{-1}(\Omega))$
 $\Rightarrow A(u) := w \in X$ löst (3.15).

b) $A : K_R \rightarrow K_R$:

auf K_R gilt:

$$\|f(u)\|_{H^{-1}} \leq \|f(0)\|_{H^{-1}} + \|f(u) - f(0)\|_{H^{-1}} \leq \|f(0)\|_{H^{-1}} + L(R)\|u\|_{L^2} \quad (3.20)$$

Sei $u \in K_R$; wähle Testfunktion $w(t)$ für (3.15) (analog zu (3.17)).

\Rightarrow f.ü. in $(0, T_1)$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|\nabla w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= 2 {}_{H^{-1}}\langle f(u(t)), w(t) \rangle_{H_0^1} \quad (3.21) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \|f(u(t))\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \varepsilon \|w(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &\stackrel{\text{Poincaré}}{\leq} \frac{1}{\varepsilon} \|f(u(t))\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \varepsilon(C_p^2 + 1) \|\nabla w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

mit $\varepsilon(C_p^2 + 1) = 2$ und (3.20) $\Rightarrow \forall s \in [0, T_1]$:

$$\begin{aligned} \|w(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2}{\varepsilon} \int_0^s \|f(0)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + L(R)^2 \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &\leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2}{\varepsilon} T_1 \left[\|f(0)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + L(R)^2 R^2 \right] \end{aligned}$$

Für

$$T_1 \leq \delta(\|u_0\|_{L^2}) := \frac{3}{4(C_p^2 + 1)} \frac{R^2}{\|f(0)\|_{H^{-1}}^2 + L(R)^2 R^2}$$

gilt: $\|w(s)\|_{L^2(\Omega)} \leq R$, also $w \in K_R$.

Bem:

(1) Wenn $f(u)$ nur lokal Lipschitz, dann: $L(R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \infty$, $\delta(\|u_0\|) \rightarrow 0$. Idee: Je größer die AB, desto kürzer das Existenzintervall.

(2) $\|w(0)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2} \leq \frac{R}{2}$; $\|w(t)\|_{L^2}$ stetig \Rightarrow für T_1 klein, bleibt w in K_R .

c) Kontraktivität von A :

Analog zu (3.18):

$$\|w(s) - \tilde{w}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{L(R)^2}{\varepsilon} T_1 \|u - \tilde{u}\|_X^2 \quad \forall s \in [0, T_1]$$

\Rightarrow für $T_1 \leq \delta(\|u_0\|_{L^2})$ ist A kontraktiv.

\Rightarrow (3.13) hat eindeutige schwache Lösung auf $[0, T_1]$.

d) Fortsetzung der Lösung:

$u(T_1) \in L^2(\Omega) \Rightarrow$ Lösung kann auf $[T_1, T_1 + \delta(\|u(T_1)\|_{L^2})]$ (mit $\delta > 0$) usw. fortgesetzt werden. Wenn $\|u(t)\|$ wächst (und $f(u)$ nur lokal Lipschitz), wird δ immer kleiner. \Rightarrow *max. Existenzintervall* $[0, t_{\max})$

(ii) Annahme: $t_{\max} < \infty$, und $\lim_{t \nearrow t_{\max}} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} < \infty$ oder Limes \exists .

$\Rightarrow \exists$ Folge $t_n \nearrow t_{\max}$ mit $\|u(t_n)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \quad \forall n$.

Für t_n „nahe genug bei“ t_{\max} kann $u(t)$ auf $[t_n, t_n + \delta]$ fortgesetzt werden (wobei $\delta = \delta(C)$, unabhängig von t_n), mit $t_n + \delta > t_{\max}$.

Widerspruch zur Def. von t_{\max} .

□

Bsp. 1:

$$u_t - \Delta u = f(u) := u^2, \quad u(t=0) = u_0 \tag{3.22}$$

Gegenlaufende Effekte: Δu glättet, während u^2 die Lösung „aufblasen“ lässt (vgl. $u_t = u^2$).

\Rightarrow (3.22) hat nicht für alle $u_0 \in L^2(\Omega)$ eine glatte, zeitlich globale Lösung (siehe [Ev] § 9.4).

Bsp. 2: (3.22) mit $f(u) = -u|u|$; entspricht Verbrauch der chemischen Substanz mit Dichte $u(x, t) \geq 0$ (\rightarrow Dissipation).

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist monoton fallend $\Rightarrow -f|_{H_0^1}$ ist in 1D auch monoton im Sinn von Def. 2.27 (d.h. $\langle -f(u) + f(v), u - v \rangle \geq 0$; lt. (3.19): $f : L^2 \rightarrow H^{-1}$).

Satz 3.16 Sei $f : L^2(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ lokal Lipschitz und $-f|_{H_0^1}$ monoton \Rightarrow

(i) (3.13) hat eindeutige schwache Lösung auf $[0, \infty)$.

(ii) Sei zusätzlich $f(0) = 0 \Rightarrow$

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)} e^{-C_p^{-2}t}; \quad t \geq 0,$$

mit Poincaré-Konstante C_p .

Bew:

(i) Ziel: *a-priori Abschätzung* für $\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \forall t \geq 0 \Rightarrow$ schließt $t_{\max} < \infty$ aus (laut Satz 3.15ii).

Sei u die schwache Lösung von (3.13) auf $[0, t_{\max})$. Analog zu (3.21) gilt f.ü. in $[0, t_{\max})$ (mit $u_0 \in H_0^1(\Omega)$):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 &= -2\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\langle f(u), u \rangle \\ &\stackrel{-f \text{ monoton}}{\leq} -2\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|_{H^{-1}} \langle f(0), u \rangle_{H_0^1} \quad (3.23) \\ &\stackrel{\text{Poincaré}}{\leq} -2\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|f(0)\|_{H^{-1}(\Omega)} \sqrt{1 + C_p^2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\stackrel{\text{vollst. Quadrat}}{\leq} C = C(\|f(0)\|_{H^{-1}}, C_p) \\ \Rightarrow \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + Ct \quad \forall t \in [0, t_{\max}) \\ \Rightarrow t_{\max} &= \infty \end{aligned}$$

(ii) aus (3.23) folgt für f.a. $t \geq 0$:

$$\frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq -2\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \stackrel{\text{Poincaré}}{\leq} -2C_p^{-2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

□

Referenzen: [Ev] §9.2, [Pa] § 6.1

3.4 quasilineare parabolische Gleichungen

Bsp 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - \underbrace{\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)}_{p\text{-Laplace Op.}} = 0 \quad , \Omega_T; 2 \leq p < \infty \\ u = 0 \quad , \partial\Omega \times [0, T] \\ u(0) = u_0 \in L^2(\Omega) \end{array} \right.$$

mit $T > 0$ fest, Ω beschränkt.

degenerierte quasilin. Gl., ähnlich zu poröser Medien Gleichung, bzw. nichtlin. Diffusionsfiltern in der Bildverarbeitung

allgemeinere Probleme (abstraktes Cauchy-Problem)

$$\left\{ \begin{array}{l} u'(t) + A(u(t)) = f(t), 0 < t < T \\ u(0) = u_0 \end{array} \right. \quad (3.24)$$

Sei V ein separabler, reflexiver Banach Raum, H ein Hilbert Raum, $V \subset H \subset V'$ ein Evolutionstriplet, und $A : V \rightarrow V'$ (zB: $V = H_0^1(\Omega)$, $A = -\Delta$):

Suchen Lösung $u \in X := L^p(0, T; V)$ (für ein $p \in (1, \infty)$ fest) mit $u' \in X' = L^{p'}(0, T; V')$. $f \in X'$, $u_0 \in H$ geg.

Laut Lemma 3.10 $\Rightarrow u \in C([0, T]; H)$

schwache Formulierung:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle u'(t), v \rangle + \langle A(u(t)), v \rangle = \langle f(t), v \rangle \quad \forall v \in V \text{ f.ü. in } (0, T), \\ u(0) = u_0 \text{ in } H. \end{array} \right.$$

äquivalente Operator-Formulierung:

Sei $A : X \rightarrow X'$ (als Orts-Zeit-Interpretation), $f \in X'$, $u \in X$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u' + A(u) = f \text{ in } X' \\ u(0) = u_0 \in H \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Satz 3.17 *Der Ortsoperator $A : V \rightarrow V'$ habe eine Orts-Zeit-Interpretation mit:*

$A : X = L^p(V) \rightarrow X' = L^{p'}(V')$ ist (für ein festes $p \in (1, \infty)$) vom Typ M , beschränkt und koerziv mit

$${}_X \langle A(v), v \rangle_X \geq \alpha \|v\|_X^p \quad \forall v \in X \text{ (für ein } \alpha > 0) \quad (3.26)$$

\Rightarrow (3.25) hat (mindestens) eine schwache Lösung $u \in X$.

Bew:

(i) Galerkin-Methode:

Sei $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ Basis von V und $V_n := \text{span}[\varphi_1, \dots, \varphi_n]$.

Laut Lemma 2.28(ii): $A : X \rightarrow X'$ ist demistetig (da Typ M + beschr.).

Sei $\{v_n\} \subset V$. Wähle $v_n := \text{const}$ in $t \Rightarrow \{v_n\} \subset X$; also:

$A : V \rightarrow V'$ ist Typ M + beschränkt \Rightarrow demistetig

\Rightarrow Einschränkung von $A : V_n \rightarrow V'_n$ ist stetig (da V'_n endlich-dim. und $V_n \subset V \subset H \subset V' \subset V'_n$)

Galerkin-Gleichungen für $u_n(t) \in V_n$ sind nichtlineares ODE-System:

$$(u'_n(t), \varphi_j)_H + {}_{V'}\langle A(u_n(t)), \varphi_j \rangle_V = {}_{V'}\langle f(t), \varphi_j \rangle_V; \quad j = 1, \dots, n; \quad t > 0 \quad (3.27)$$

mit $u_n(0) = P_n u_0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u_0$ in H ($P_n =$ Orthogonalprojektion von H auf V_n)

Lösung $u_n(t)$, $t \in [0, t_{max})$ existiert laut Existenzsatz von Carathéodory (= Erweiterung vom Satz von Peano für $\langle f, \varphi_j \rangle \in L^p(0, T)$); aber nicht notwendigerweise eindeutig.

a-priori Abschätzung von u_n (analog zu (3.12) in Satz 3.11):

$$\frac{1}{2} \|u_n(t)\|_H^2 + \underbrace{\alpha \int_0^t \|u_n(s)\|_V^p ds}_{= \|u_n\|_X^p \text{ für } t=T} \leq \frac{1}{2} \|P_n u_0\|_H^2 + \int_0^t \|f(s)\|_{V'} \|u_n(s)\|_V ds, \quad 0 \leq t \leq t_{max} \leq T \quad (3.28)$$

Wir verwendeten dabei die Testfunktion $u_n(s) \in V_n$ in (3.27), $\int_0^t \dots ds$ und Koerzitivität (3.26).

Folgerungen:

a)

$$\|u_n(t)\|_H^2 \leq \|P_n u_0\|_H^2 + C_n \int_0^t \underbrace{\|f(s)\|_{V'}}_{\in L^1(0, T)} \|u_n(s)\|_H ds$$

(V -, H -Normen für $u_n \in V_n$ äquivalent)

Gronwall \Rightarrow max. Existenzintervall für alle u_n ist $[0, T]$.

b) mit $t = T$ in (3.28):

$$\|u_n(T)\|_H^2 + \alpha \|u_n\|_X^p \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|u_0\|_H^2 - \alpha \|u_n\|_X^p + 2\|f\|_{X'} \|u_n\|_X$$

$$\stackrel{p>1}{\leq} \|u_0\|_H^2 + C(\alpha, f) \dots \text{unabh. von } n \quad (3.29)$$

(ii) Existenz eines Limes:

- aus (3.29): $\{u_n\}$ beschränkt in X (und $L^\infty(0, T; H)$ für §3.5), und $\{u_n(T)\}$ beschränkt in H
 $\Rightarrow \exists$ Teilfolge $\{u_n\}$ mit $u_n \rightharpoonup u$ in X , $u_n(T) \rightharpoonup u^*$ in H
- $\{A(u_n)\}$ beschränkt in X' (da A beschränkt)
 $\Rightarrow A(u_n) \rightharpoonup z$ in X'

(iii) Identifikation der Limiten u , $u^* = u(T)$:

Sei $\psi \in C^1[0, T]$; integriere (3.27) in t ; partielle Integration in t nötig, da keine Konvergenz von u'_n :

$$-\int_0^T (u_n(t), \underbrace{\psi'(t)\varphi_j}_{\in X'=L^p(V')}} dt + \int_0^T \langle A(u_n) - f, \underbrace{\psi(t)\varphi_j}_{\in X=L^p(V)} \rangle dt = (u_n(0), \underbrace{\varphi_j}_{\in H})\psi(0) - (u_n(T), \underbrace{\varphi_j}_{\in H})\psi(T) \quad (3.30)$$

$\downarrow n \rightarrow \infty$

$$-\int_0^T (u(t), \psi'(t)\varphi_j) dt + \int_0^T \langle z - f, \psi(t)\varphi_j \rangle dt = (u_0, \varphi_j)\psi(0) - (u^*, \varphi_j)\psi(T); j \in \mathbb{N}$$

- Partielle Integration in t "zurück"; $C^1[0, T]$ dicht in $L^p(0, T)$ und $\{\varphi_j\}$ ist Basis von V .

\Rightarrow Für $u \in X$ gilt:

$$\begin{cases} u' + z = f & \text{in } X' \\ u(0) = u_0, u(T) = u^* & \text{in } H \end{cases} \quad (3.31)$$

Bem: Man wählt zuerst $\psi \in C_0^\infty[0, T]$, also Problem ohne RBen. Dann werden mit ψ die RBen getrennt.

(iv) Identifikation von $z = A(u)$:

aus (3.30) mit Testfunktion $u_n \in L^p(0, T; V_n)$ (statt $\psi(t)\varphi_j$):

$$X' \langle A(u_n), \underbrace{u_n}_{\in X} \rangle_X = X' \langle f, u_n \rangle_X + \overbrace{\frac{1}{2} \|u_n(0)\|_H^2 - \frac{1}{2} \|u_n(T)\|_H^2}^{= - \int_0^T (u'_n, u_n) dt}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle A(u_n), u_n \rangle \leq \langle f, u \rangle + \frac{1}{2} \|u_0\|_H^2 - \frac{1}{2} \|u(T)\|_H^2$$

da $\|u(T)\|_H \leq \liminf \|u_n(T)\|_H$ ($\|\cdot\|$ schwach unterhalb stetig), bzw. $-\|u(T)\|_H \geq \limsup(-\|u_n(T)\|_H)$

- Laut Lemma 3.10(ii) für $u \in X$, $u' \in X'$:

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_H^2 = 2 \langle u'(t), u(t) \rangle_V, \quad \text{f.ü. in } (0, T);$$

integriert in t :

$$\frac{1}{2} \|u(T)\|_H^2 - \frac{1}{2} \|u_0\|_H^2 = \int_0^T \langle u'(t), u(t) \rangle dt \stackrel{(3.31)}{=} \langle f - z, u \rangle_X$$

also:

$$\left. \begin{array}{l} u_n \rightharpoonup u \text{ in } X \\ A(u_n) \rightharpoonup z \text{ in } X' \\ \limsup \langle A(u_n), u_n \rangle \leq \langle z, u \rangle \end{array} \right\} \Rightarrow A(u) = z, \text{ da } A \text{ Typ M}$$

- aus (3.31): $u' + A(u) = f$ in X'

□

Bem. zu Voraussetzungen für Satz 3.17:

Vergleich von $A : V \rightarrow V'$ und $A : X \rightarrow X'$ (d.h. Orts- bzw. Orts-Zeit-Interpretation)

Lemma 3.18 Sei $A : V \rightarrow V'$ und

(i) demistetig \Rightarrow

\forall messbare Funktionen $u : [0, T] \rightarrow V$ ist $A(u(\cdot)) : [0, T] \rightarrow V'$ messbar;

(ii) demistetig und beschränkt mit

$$\|A(u)\|_{V'} \leq C \|u\|_V^{p-1}, \quad u \in V \quad \text{für ein } p \in (1, \infty) \tag{3.32}$$

$\Rightarrow A : X \rightarrow X'$ und ist demistetig.

Lemma 3.19 Sei $A : V \rightarrow V'$ und $A : X \rightarrow X'$ und

(i) V -monoton $\Rightarrow A$ ist X -monoton;

(ii) beschränkt mit (3.32) und V -hemistetig $\Rightarrow A$ ist X -hemistetig

(i)+(ii) $\Rightarrow A$ ist X -Typ M laut Lemma 2.28 (i)

Bew: [Sh2]

Eindeutigkeit der Lösung von (3.25) nur unter Zusatzannahmen:

Satz 3.20 Sei $A : V \rightarrow V'$ monoton (zusätzlich zu Bed. von Satz 3.17).

$\Rightarrow \exists!$ schwache Lösung $u \in X$ von (3.25).

Bew: Seien $u_{1,2} \in X$ schwache Lösungen mit $u'_{1,2} \in X'$. Mit Lemma 3.10(ii) gilt f.ü. in $[0, T]$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u_1(t) - u_2(t)\|_H^2 &= 2 \, {}_{V'}\langle u'_1(t) - u'_2(t), u_1(t) - u_2(t) \rangle_V \\ &= -2 \, {}_{V'}\langle A(u_1(t)) - A(u_2(t)), u_1(t) - u_2(t) \rangle_V \leq 0 \end{aligned}$$

□

Bsp 1:

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) &= 0 & , \Omega_T; 2 \leq p < \infty \\ u &= 0 & , \partial\Omega \times [0, T] \\ u(0) &= u_0 \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

Diese *degenerierte* quasilin. Gl. (ähnlich zu poröser Medien Gleichung) hat eindeutige schwache Lösung mit $V = W_0^{1,p}(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, da:

$A : V \rightarrow V'$, da $\forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} | \, {}_{V'}\langle A(u), v \rangle_V | &= \left| \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \right| \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} \|\nabla v\|_{L^p} \leq \|u\|_{W_0^{1,p}}^{p-1} \|v\|_{W_0^{1,p}} \end{aligned}$$

$A : V \rightarrow V'$ ist demistetig, beschränkt, monoton, koerziv (\rightarrow Übung).

$A : X \rightarrow X'$ ist beschränkt, Typ M, koerziv \Rightarrow Satz 3.17 und 3.20 anwendbar.

Bsp 2:

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div}(a(u)\nabla u) =: -A(u) & , \Omega_T \\ u = 0 & , \partial\Omega \times [0, T] \\ u(0) = u_0 & \in L^2(\Omega) \end{cases} \quad (3.33)$$

mit $T > 0$ fest, Ω beschränkt, $a \in C(\mathbb{R})$, $0 < \delta_1 \leq a(u) \leq \delta_2 \, \forall u \in \mathbb{R}$

(d.h. *gleichmäßig parabolisches* Problem). $a(u) \leq \delta_2$ kann auch durch $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ ersetzt werden (wegen Maximumsprinzip für $u_t = \operatorname{div}(\underbrace{a(x,t)}_{a(u) \geq \delta_1} \nabla u)$).

z.B.: $a(u) = |\min(u, M)|^{m-1} + \delta$, $m > 1$, $M > \delta$ (modifizierte poröse Medium Gleichung)

Sei $V = H_0^1(\Omega)$, $X = L^2(H_0^1)$ ($p = 2$ wegen Beschränktheitsabschätzung für A , mit $|a(u)| \leq \delta_2$: (2.31); (3.32))

$A : V \rightarrow V'$ ist i.A. nicht monoton.

$A : X \rightarrow X'$ ist zwar beschränkt (da $\delta_2 < \infty$) und koerziv (da $\delta_1 > 0$) (\rightarrow Übung), aber i.A. nicht vom Typ M (wurde in Satz 3.17 zur Identifikation vom w - $\lim A(u_n)$ verwendet).

\Rightarrow Satz 3.20 kann nicht angewendet werden und Satz 3.17 muss etwas modifiziert werden. Für den Existenzbeweis brauchen wir folgendes Kompaktheitsresultat für Funktionen von x und t :

Lemma 3.21 (von Aubin; Bew. [Sh2], S. 106f bzw. [Ru], §3.3.6)

Seien B_0, B, B_1 Banach Räume (B_0, B_1 reflexiv) mit

$B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$. Sei $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$.

\Rightarrow Die Einbettung

$$W := \{u \in L^p(0, T; B_0) \mid u' \in L^q(0, T; B_1)\} \hookrightarrow L^p(0, T; B)$$

ist kompakt. In W wird die Norm $\|u\|_{L^p(B_0)} + \|u'\|_{L^q(B_1)}$ verwendet.

Bem: Auch für $B_0 \hookrightarrow B$ ist die Einbettung $L^p(0, T; B_0) \hookrightarrow L^p(0, T; B)$ i.A. nicht kompakt. Eine Zusatzinformation an u' ist nötig.

Anwendungsbeispiel: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt,

$\{u_n\}$ glm. beschränkt in $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ und
 $\{u'_n\}$ glm. beschränkt in $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$

\Rightarrow für eine Teilfolge gilt $u_{n_k} \rightarrow u$ in $L^2(0, T; L^2(\Omega))$

Diese *starke* Konvergenz hilft oft, den Grenzwert in Nichtlinearitäten durchführen zu können.

Satz 3.22 Sei $a \in C(\mathbb{R})$ mit $0 < \delta_1 \leq a(u) \leq \delta_2$.

$\Rightarrow \exists!$ schwache Lösung $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ von (3.33).

Bew:

(i) Existenz (größtenteils analog zu Satz 3.17):

a) Basiswahl für Galerkin-Methode:

Sei $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ Orthogonalbasis von $V = H_0^1(\Omega)$ (bez. $\|u\|_{H_0^1} = \|\nabla u\|_{L^2}$) und gleichzeitig Orthonormalbasis von $H = L^2(\Omega)$.

Wähle z.B. die Eigenfunktionen von $L = -\Delta$ in $H_0^1(\Omega)$.

Laut *Entwicklungssatz* (lin. PDGL. §6.2): $\{\varphi_j\}$ ist ONB von $L^2(\Omega)$.

Ferner:

$$(\varphi_j, \varphi_k)_{H_0^1} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_k \, dx = - \int_{\Omega} \Delta \varphi_j \varphi_k \, dx = \lambda_j \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_k \, dx = 0, \quad j \neq k$$

b) a-priori Abschätzung von u'_n :

- Galerkin-Gleichungen für $u_n(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(t) \varphi_j$:

$$(u'_n(t), \varphi_j)_H = - \nu' \langle A(u_n(t)), \varphi_j \rangle_V; \quad j = 1, \dots, n$$

- Sei $v \in H_0^1(\Omega)$ beliebig mit $\|v\|_{H_0^1} \leq 1$.
 $v = v_1 + v_2$ mit $v_1 \in V_n = \text{span}[\varphi_1, \dots, \varphi_n]$, $v_2 \perp_{L^2} V_n$.
 $\Rightarrow \|v_1\|_{H_0^1} \leq \|v\|_{H_0^1} \leq 1$, da $\{\varphi_j\}$ OGB von H_0^1 .

- da $u'_n(t) \in V_n \subset L^2(\Omega)$:

$$\nu' \langle u'_n(t), v \rangle_V = (u'_n(t), v)_H = (u'_n(t), v_1)_H = - \langle A(u_n(t)), v_1 \rangle$$

\Rightarrow (mit $\|v_1\|_{H_0^1} \leq 1$)

$$\|u'_n(t)\|_{H^{-1}} := \sup_{\|v\|_{H_0^1} \leq 1} |\langle u'_n(t), v \rangle| \leq \|A(u_n(t))\|_{H^{-1}} \quad \text{für f.a. } t \in (0, T)$$

$$\Rightarrow \|u'_n\|_{X'} \leq \|A(u_n)\|_{X'} \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.34}$$

(laut Satz 3.17 ii, da $\{u_n\}$ beschr. in X und A beschr.), mit $X' = L^2(H^{-1})$.

- laut Satz 3.17; (3.29):

$$\|u_n\|_X \leq C \tag{3.35}$$

\Rightarrow (mit Aubin-Lemma) \exists Teilfolge mit

$$u_n \rightarrow u \text{ in } L^2(0, T; L^2(\Omega)) = L^2(\Omega_T) \tag{3.36}$$

Bem: ohne Aubin-Lemma hätten wir nur schwache Konvergenz bez. $t \Rightarrow$ dann keine Info über $a(u_n)$.

c) Ersatz für „Typ M-Eigenschaft“ (zur Identifikation $A(u) = z$):
(analog zum Bew. von $A : V \rightarrow V'$ ist Typ M; siehe Bsp. 2.29)

- aus (3.34): für eine Teilfolge gilt $A(u_n) \rightharpoonup z$ in X'
- aus (3.35): für eine Teilfolge gilt $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ in $L^2(\Omega_T)$
- aus (3.36): $a(u_n) \rightarrow a(u)$ in $L^2(\Omega_T)$! (mit Lebesgue)

- sei $v \in C_0^\infty(\Omega \times (0, T))$

$$\Rightarrow \quad {}_{X'}\langle A(u_n), v \rangle_X = \iint_{\Omega_T} a(u_n) \nabla v \cdot \nabla u_n \, dx \, dt$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega_T} a(u) \nabla v \cdot \nabla u \, dx \, dt = \quad {}_{X'}\langle z, v \rangle_X$$

$$\Rightarrow A(u) = z$$

$$\Rightarrow \text{analog zu (3.30), (3.31) aus Satz 3.17: } u' + A(u) = 0 \text{ in } X'.$$

(ii) Eindeutigkeit (mit “dualer Methode”):

Schreibe $u_t = \operatorname{div}(a(u)\nabla u)$ als

$$u_t = \Delta b(u) \quad \text{in } L^2(H^{-1}(\Omega)) \tag{3.37}$$

mit $b(z) := \int_0^z a(w) \, dw \Rightarrow b(0) = 0$; $b \in C^1(\mathbb{R})$, streng monoton wachsend, $|b(z)| \leq \delta_2 |z|$.

Seien $u_{1,2} \in L^2(H_0^1(\Omega))$ zwei schwache Lösungen, also

$$(u_1 - u_2)_t = \Delta(b(u_1) - b(u_2)). \tag{3.38}$$

Wähle für (3.38) die spezielle (trickreiche) Testfunktion

$$v(x, t) := \int_t^T b(u_1(x, s)) - b(u_2(x, s)) \, ds \quad \in H^1(0, T; H_0^1(\Omega))$$

mit

$$v(T) = 0,$$

$$v_t = -b(u_1) + b(u_2) \in L^2(H_0^1),$$

$$\nabla v = \int_t^T \nabla [b(u_1(s)) - b(u_2(s))] \, ds \quad \in H^1(L^2).$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \quad & 0 \leq \int_0^T \int_{\Omega} \underbrace{(u_1 - u_2) \overbrace{[b(u_1) - b(u_2)]}^{=-v_t}}_{\geq 0, \text{ da } b \nearrow \text{ (streng monoton)}} dx dt \quad (3.39) \\
 \stackrel{\text{part. Int.}}{=} & \int_0^T \langle (u_1 - u_2)_t, v \rangle_V dt \quad [\text{mit } (u_1 - u_2)(0) = 0, v(T) = 0] \\
 \stackrel{(3.38), \text{ part. Int.}}{=} & - \int_0^T \int_{\Omega} \underbrace{\nabla[b(u_1(t)) - b(u_2(t))]}_{=: f(t)} \cdot \underbrace{\int_t^T \nabla[b(u_1(s)) - b(u_2(s))] ds}_{=: \nabla v} dx dt \\
 \stackrel{(*)}{=} & - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| \int_0^T \nabla(b(u_1) - b(u_2)) dt \right|^2 dx \leq 0
 \end{aligned}$$

\Rightarrow aus Vorzeichen vom Integranden in (3.39) : $u_1 = u_2$ f.ü. in Ω_T .

$$(*) \text{ gilt da } \int_0^T f(t) \int_t^T f(s) ds dt = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T f(t) f(s) ds dt = \frac{1}{2} \left[\int_0^T f(t) dt \right]^2 \quad \square$$

Referenzen: [Sh2] § II.1-2, III.1, III.4, [Va] § II.2, [Ev] § 7.1

3.5 transiente Navier-Stokes-Gleichungen

Modell für instationäre Strömung einer homogenen (d.h. Dichte = const.), viskosen, inkompressiblen Flüssigkeit; semilineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
 u_t + (u \cdot \nabla) u - \Delta u + \nabla p &= f, \quad \Omega_T := \Omega \times [0, T] && \dots \text{ NS-Gleichung} \quad (3.40) \\
 \operatorname{div} u &= 0, \quad \Omega_T && \dots \text{ inkompressibel} \\
 u &= 0, \quad \partial\Omega \times [0, T] && \dots \text{ Haft-RB} \\
 u(\cdot, 0) &= u_0, \quad \Omega &&
 \end{aligned}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega$ glatt.

- ges: $u : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}^n$... Geschwindigkeitsvektorfeld
- $p : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$... Druck
- geg: $f : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}^n$... (äußeres) Kraftfeld
- $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$

Schwache Formulierung:

Elimination von p wie in § 2.4; durch Testfunktion mit $\operatorname{div} v = 0$:

$V := \{v \in H_0^1(\Omega)^n \mid \operatorname{div} v = 0 \text{ f.ü. in } \Omega\}$ ist separabler Hilbertraum mit

$$\|v\|_V = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^{n \times n}} ;$$

$H := \bar{V} \subset L^2(\Omega)^n$ (Abschluss bez. $\|\cdot\|_{L^2}$), um Dichtheit von $V \subset H$ fürs Evolutionstriplet zu garantieren (statt $H = L^2$).

$V \hookrightarrow \hookrightarrow H$; folgt sofort aus $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow \hookrightarrow L^2(\Omega)$.

Es gilt: $H = \{v \in L^2(\Omega)^n \mid \operatorname{div} v = 0 \text{ f.ü. in } \Omega; v \cdot \nu = 0 \text{ f.ü. in } \partial\Omega\}$ ([Tar] Lemma 23.2; [DL3] §IX.1.2)

Definition 3.23 Seien $u_0 \in H, f \in L^2(0, T; V')$.

$u \in X := L^2(0, T; V)$ mit $u' \in X' = L^2(0, T; V')$ ist schwache Lösung von (3.40), wenn

(i) $\forall v \in V$ gilt:

$$v' \langle u'(t), v \rangle_V + \underbrace{\int_{\Omega} (u \cdot \nabla) u \cdot v + \nabla u : \nabla v \, dx}_{=:\langle A(u), v \rangle} = v' \langle f(t), v \rangle_V \quad \text{f.ü. in } [0, T] \quad (3.41)$$

(ii) $u(0) = u_0$

Lemma 3.24 (Gagliardo-Nirenberg Ungleichung, Bew: [GT])

Für $u \in W^{k,p}(\Omega) \cap L^q(\Omega)$; $k \in \mathbb{N}$; $1 \leq p, q, r \leq \infty$; $\beta \in \mathbb{N}_0^n$;

$$\frac{1}{r} = \frac{|\beta|}{n} + \lambda \left(\frac{1}{p} - \frac{k}{n} \right) + (1 - \lambda) \frac{1}{q}, \quad \frac{|\beta|}{k} \leq \lambda \leq 1, \quad 0 \leq |\beta| \leq k - 1$$

gilt:

$$\left\| \frac{\partial^{|\beta|} u}{\partial x^\beta} \right\|_{L^r(\Omega)} \leq C_{GN} \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}^\lambda \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-\lambda} \quad (3.42)$$

Bsp: mit $n = 2, p = q = 2, r = 4, \lambda = \frac{1}{2}, \beta = 0$, für $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C_{GN} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|u\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \leq \tilde{C}_{GN} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \quad (3.43)$$

Satz 3.25 Für $n = 2$ ist schwache Lösung von (3.40) eindeutig.

Bew: Sei $w := u_1 - u_2$ Differenz zweier schwacher Lösungen. Wähle Testfunktion $v = w$ in (3.41); Lemma 3.10 (ii):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)^{n \times n}}^2 &= \int_{\Omega} [(u_2 \cdot \nabla)u_2 - (u_1 \cdot \nabla)u_1] \cdot w \, dx \\ &= - \int_{\Omega} (w \cdot \nabla)u_1 \cdot w \, dx - \underbrace{\int_{\Omega} (u_2 \cdot \nabla)w \cdot w \, dx}_{=0, \text{ da } \operatorname{div} w=0 \text{ (} \rightarrow \text{Übung)}} \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|\nabla u_1\|_{L^2(\Omega)^{n \times n}} \|w\|_{L^4(\Omega)^n}^2 \\ &\stackrel{\text{GN-Ungl.}}{\leq} \tilde{C}_{GN}^2 \|\nabla u_1\|_{L^2(\Omega)^{2 \times 2}} \|w\|_{L^2(\Omega)^2} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)^{2 \times 2}} \\ &\stackrel{\text{Young}}{\leq} \frac{1}{2} \tilde{C}_{GN}^4 \|\nabla u_1\|_{L^2(\Omega)^{2 \times 2}}^2 \|w\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)^{2 \times 2}}^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \|w(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \leq \tilde{C}_{GN}^4 \|\nabla u_1(t)\|_{L^2(\Omega)^{2 \times 2}}^2 \|w(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2$$

Laut VS: $t \mapsto \|\nabla u_1(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \in L^1(0, T)$.

\Rightarrow Gronwall liefert $w(t) = 0$ f.ü. auf $(0, T)$. □

Bem: $n = 3$: Eindeutigkeit ist offenes Problem (ein ‘‘Millenium Problem’’ des Clay Math. Inst., Boston). Problem: (3.43) gilt für $n = 3$ nicht; stattdessen $\|u\|_{L^4}^2 \leq C \|u\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla u\|_{L^2}^{3/2}$. Dann würde $\|\nabla u_1(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^4$ auftreten, das aber i.A. nicht in $L^1(0, T)$ liegt.

Für $n = 3$ wurde die Existenz von verschiedenen schwachen bzw. distributionellen Lösungen gezeigt, siehe [Tar] §25, [Te] §III.3.1+3.2, [Ro] §8.8.4.

Existenz einer Lösung lässt sich für $n = 2$ mit ähnlichen Methoden wie in §3.4 (Satz 3.17, Satz 3.22) zeigen:

Eigenschaften des Operators $A(u) = (u \cdot \nabla)u - \Delta u$ aus (3.41):

Laut Lemma 2.30, Lemma 2.28 (ii): $A : V \rightarrow V'$ ist beschränkt, koerziv (mit $\langle A(u), u \rangle = \|u\|_V^2$), Typ M, demistetig (für $n = 2, 3$).

A ist koerziv auf X , aber *nicht* beschränkt von $X \rightarrow X'$!

Aber für $n = 2$ (\rightarrow Übung):

$$A : X \cap L^\infty(0, T; H) \rightarrow X' \quad \text{ist beschränkt.} \tag{3.44}$$

$u \in L^\infty(0, T; H)$ bedeutet, dass die kinetische Energie der Trajektorie u beschränkt ist; $u \in X$ bedeutet, dass die durch Viskosität im Zeitintervall $[0, T]$ dissipierte Energie beschränkt ist, [Tar] §21.

Satz 3.26 Sei $n = 2$, $u_0 \in H$, $f \in L^2(0, T; V')$. \Rightarrow (3.40) hat eindeutige schwache Lösung.

Bew-Idee:

- Galerkin-Methode von Satz 3.17, Satz 3.22:

$$(u'_k(t), \varphi_j)_H + v' \langle A(u_k(t)), \varphi_j \rangle_V = v' \langle f(t), \varphi_j \rangle_V; \quad j = 1, \dots, k$$

- spezielle Basiswahl $\{\varphi_j\}$ wie in Satz 3.22:

Zu $A_1 = -\Delta$, def. $A_1^{-1}: V' \ni g \mapsto u \in V$ als schwache Lösung von

$$(u, v)_V = \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \, dx = v' \langle g, v \rangle_V \quad \forall v \in V.$$

Einschränkung $A_1^{-1}: H \rightarrow V \hookrightarrow H$ ist kompakt, symmetrisch

$\Rightarrow \exists$ Eigenfunktions-ONB $\{\varphi_j\}$ von H (mit $\|\cdot\|_H = \|\cdot\|_{L^2}$);

ist gleichzeitig OGB von V (mit $\|\cdot\|_V = \|\nabla \cdot\|_{L^2}$).

- a-priori Abschätzungen (analog zu Satz 3.17, aber dort wird nur $\|u_k(T)\|_H$ benötigt):

$$\|u_k\|_X \leq C, \quad \|u_k\|_{L^\infty(0, T; H)} \leq C, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\|u'_k\|_{X'} \leq \|A(u_k)\|_{X'} + \|f\|_{X'} \stackrel{(3.44)}{\leq} C, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

- mit Aubin-Lemma:

\exists Teilfolge mit $u_k \rightarrow u$ in $L^2(0, T; H) \subset L^2(\Omega_T)^2$

- für Limes-Identifikation:

wähle $v \in C_0^\infty(\Omega_T)^2 \cap X$ [nötig für $\operatorname{div} v = 0$] ... ist dicht in X (folgt aus $C_0^\infty(\Omega)^2 \cap V$ ist dicht in V ; § 23 [Tar])

□

Referenzen: [Ro] § 8.4, 8.8.4, [Tar] § 20-25, [Te] § III

3.6 Die poröse Medium Gleichung

Betrachte

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m = \operatorname{div}(m u^{m-1} \nabla u) & , \Omega_T \\ u = 0 & , \partial\Omega \times [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x) \in L^1_+(\Omega) \end{cases} \quad (3.45)$$

mit $m > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$ für ein $\alpha \in (0, 1)$ (Hölder-Raum).

$u_0 \geq 0 \Rightarrow u(x, t) \geq 0$ (mit Maximumprinzip); nötig zur Def. von u^m .

Die PMGl ist *degeneriert parabolisch* (für $u(x, t) \geq 0$).

Bsp:

$$\begin{cases} u_t = \partial_x(u u_x) & , \quad x > 0, t > 0; \\ u(0, t) = g(t) & := x_0 + t; \quad x_0 > 0 \text{ fest;} \\ u(x, 0) = u_0(x) & := x_0 - x \text{ (für } 0 < x < x_0), = 0 \text{ (für } x > x_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \begin{cases} t + x_0 - x & , \quad 0 < x < x_0 + t; \\ 0 & , \quad x > x_0 + t, \end{cases}$$

da: $u_t = 1$, $u_x = -1$, $\partial_x(u u_x) = 1$ für $0 < x < x_0 + t$.

• “Propagation” wie bei hyperbolischen Gleichungen:

Dieses u erfüllt z.B. $u_t + u_x = 0$, $u_{tt} = u_{xx}$!

Definition 3.27 $u \geq 0$ heißt schwache Lösung von (3.45), wenn

(i) $u^m \in L^2((0, T); H_0^1(\Omega))$, [$\Rightarrow u \in L^2(\Omega_T)$]

(ii) u erfüllt

$$\int_{\Omega_T} \int \nabla(u^m) \cdot \nabla \varphi - u \varphi_t \, dx \, dt = \int_{\Omega} u_0(x) \varphi(x, 0) \, dx \tag{3.46}$$

$$\forall \varphi \in C^1(\overline{\Omega_T}) \text{ mit } \varphi(x, T) = 0, \varphi|_{\partial\Omega \times [0, T]} = 0$$

Bem: Schwache Lösungen von (3.45) sind eindeutig: analog zu Satz 3.22 (ii) für $u_t = \text{div}(a(u)\nabla u)$ (bzw. [Va] § II.2).

Satz 3.28 Sei $u_0 \in L^m_+(\Omega) \Rightarrow \exists!$ schwache Lösung von (3.45) bis zu $T = \infty$.

Bew:

(i) glatte Approximationslösungen:

- Sei $u_0 \in C_0^\infty(\Omega)$, $u_0 \geq 0$.
 u_n löse:

$$\begin{cases} (u_n)_t = \Delta u_n^m, \Omega_\infty := \Omega \times (0, \infty) \\ u_n(x, t) = \frac{1}{n}, \partial\Omega \times [0, \infty) \\ u_n(x, 0) = u_{0n}(x) := u_0(x) + \frac{1}{n} \end{cases} \tag{3.47}$$

- laut schwachem Maximumsprinzip (§6.7, PDG1):

$$\frac{1}{n} \leq u_n(x, t) \leq M + \frac{1}{n} \text{ in } \overline{\Omega_\infty}, \text{ mit } M := \sup(u_0). \quad (3.48)$$

$\Rightarrow u_n$ löst auch die *nicht degenerierten* (glm. parabolischen) Probleme

$$(u_n)_t = \operatorname{div}(a_n(u_n)\nabla u_n) \quad (3.49)$$

mit $a_n \in C(\mathbb{R})$, $a_n(u) = mu^{m-1}$ auf $[\frac{1}{n}, M + \frac{1}{n}]$ und
 $0 < \frac{m}{n^{m-1}} \leq a_n(u) \leq m(M + \frac{1}{n})^{m-1}$.

- laut Satz 3.22 (für $v_n := u_n - \frac{1}{n}$): (3.49) hat eindeutige schwache Lösung $u_n - \frac{1}{n} \in L^2(H_0^1(\Omega)) \cap C(L^2(\Omega))$
- laut [LSU], § 6 gilt sogar:

$u_n \in C^\infty(\Omega_\infty) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega_\infty})$ (d.h. $u_n, (u_n)_{x_i}, (u_n)_{x_i x_j}, (u_n)_t \in C(\overline{\Omega_\infty})$);
 u_n ist also klassische Lösung \Rightarrow Maximumsprinzip darf angewendet werden.

(ii) a-priori Abschätzungen, Konvergenz:

- aus Maximumsprinzip:

$$0 < u_{n+1}(x, t) \leq u_n(x, t) \text{ in } \overline{\Omega_\infty} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\rightarrow \text{Übung})$$

Definiere

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) \quad \forall (x, t) \in \overline{\Omega_\infty}$$

$\Rightarrow u_n(t) \rightarrow u(t)$ in $L^p(\Omega) \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall 1 \leq p < \infty$;
 $u_n \rightarrow u$ in $L^p(\Omega_T) \quad \forall T > 0$ (monotone Konvergenz)

- aus (3.48): $0 \leq u \leq M$ in $\overline{\Omega_\infty}$
- a-priori Abschätzung für $\nabla(u^m)$:

$\Rightarrow u^m \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, da $H_0^1(\Omega)$ in $H^1(\Omega)$ schwach abgeschlossen (da konvex und abgeschlossen; Satz von Mazur).

- u_n ist klassische Lösung \Rightarrow erfüllt (3.46) mit AB u_{0n} .
Limes $n \rightarrow \infty$ liefert (3.46) für $u \Rightarrow u$ ist schwache Lösung von (3.45).

- Vergleichsprinzip:
Betrachte 2 ABen mit $u_0(x) \leq \tilde{u}_0(x) \forall x \in \Omega$
 $\Rightarrow u_{0n} \leq \tilde{u}_{0n} \Rightarrow$ (mit Maximumsprinzip) $u_n \leq \tilde{u}_n \forall n$
 $\Rightarrow u(x, t) \leq \tilde{u}(x, t)$ (durch $n \rightarrow \infty$)

(iii) beschränkte Anfangsdaten:

Sei $u_0 \in L_+^\infty(\Omega)$ mit $\text{supp } u_0 \subset \Omega$:

Approximationsmethode und Vergleichsprinzip von (i,ii) funktionieren genauso mit $u_n \in C^\infty(\Omega_\infty) \cap C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, \infty))$ (aber u_n ist an $t = 0$ nicht unbedingt stetig). u_0 beschränkt, ist für Lösung von (3.49) wichtig ($M = \text{ess sup}(u_0)$).

(iv) allgemeine Anfangsdaten:

Sei $u_0 \in L_+^{m+1}(\Omega)$.

- Wähle wachsende Folge von (messbaren) Abschneidefunktionen (hinsichtlich des Trägers) $0 \leq \zeta_k(x) \leq 1$ mit $\text{supp } \zeta_k \subset \Omega$, $\zeta_k \nearrow 1$ (punktweise); $\text{supp } \zeta_k \nearrow \Omega$.

Approximation der AB:

$u_{0k}(x) := \min(u_0(x)\zeta_k(x), k)$ erfüllt die Kriterien von (iii).

\Rightarrow (iii) liefert schwache Lösung u_k von (3.45) mit

$$u_{k+1}(x, t) \geq u_k(x, t) \quad \forall (x, t) \in \Omega_\infty; \quad (3.52)$$

und $u_k^m \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

Bem: $u_0 \in L^{m+1}$ konnte nicht direkt durch $\{u_{0k}\} \subset C_0^\infty$ approximiert werden (typischerweise mit Faltung), da dann die Monotonie (3.52) nicht garantiert ist.

- laut (3.51) für u_k (statt u):
 $\{u_k\}$ glm. beschränkt in $L^\infty(0, T; L^{m+1}(\Omega))$, da $\|u_{0k}\|_{L^{m+1}} \leq \|u_0\|_{L^{m+1}}$.
 $\{\nabla u_k^m\}$ glm. beschränkt in $L^2(\Omega_\infty)$

\Rightarrow (mit (3.52)) u_k konv. f.ü. gegen $u \in L^\infty(0, T; L^{m+1}(\Omega))$ und u ist wegen Monotonie eindeutig;

$u_k(T) \rightarrow u(T)$ in $L^p(\Omega) \quad \forall 1 \leq p \leq m+1$ (obere Schranke aus Norm in (3.51))
 $u_k \rightarrow u$ in $L^p(\Omega_T) \quad \forall 1 \leq p \leq m+1, \forall T$ (beides monotone Konvergenz)

ganze Folge: $\nabla u_k^m \rightharpoonup \psi$ in $L^2(\Omega_\infty)$; $\psi = \nabla u^m$ analog zu (ii)

- $\liminf_{k \rightarrow \infty}$ in (3.51) für $\{u_k\}$ liefert: u erfüllt (3.51).
 $\Rightarrow u^m \in L^2(0, \infty; H_0^1(\Omega))$, da $\|\nabla \cdot\|_{L^2}$ Norm auf H_0^1 ist.
- u_k erfüllt (3.46) mit AB u_{0k} ; $u_{0k} \rightarrow u_0$ in $L^{m+1}(\Omega)$.
 $\Rightarrow u$ erfüllt (3.46), ist schwache Lösung von (3.45).

□

Bem:

Bedingung $u_0 \in L^{m+1}(\Omega)$ kommt aus Energieabschätzung (3.51); kann ausgedehnt werden
 [Va]:

$\forall u_0 \in L_+^1(\Omega) : \exists!$ Lösung $u \in C([0, \infty), L_+^1(\Omega))$.

PMGl. generiert also eine *nichtlineare, stark stetige Halbgruppe* auf $L_+^1(\Omega)$.

Ferner $u \in C^\infty(O)$; $O := \{u(x, t) > 0\} \subset \Omega_\infty$

Referenzen: [Va] § II

4 nichtlineare Wellengleichungen

Wir betrachten hier nur semilineare Wellengleichungen (bes. NLW, NLS); diese entwickeln *keine Schocks*. Ferner nur Ganzraumprobleme, d.h. $\Omega = \mathbb{R}^n$.

4.1 Wellengleichungen als Hamilton'sche Systeme

Definition 4.1 (a) Sei X ein Hilbert Raum (hier meist ∞ -dim.) mit innerem Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $J \in B(X)$ ein linearer, schiefsymmetrischer, nicht-degenerierter Operator (d.h. mit trivialem Kern).

Das Paar $(X, \langle \cdot, J \cdot \rangle)$ ist dann ein symplektischer Vektorraum mit der symplektischen (Bilinear-) Form $\langle \cdot, J \cdot \rangle$.

(b) Sei $E : X \rightarrow \mathbb{R}$ ein (nichtlin.) Funktional („Energie“) mit Fréchet-Ableitung (=1. Variation von E) $E' : X \rightarrow X$ (hier mit Riesz-Identifikation; eigentlich $E' : X \rightarrow X'$).

Die (autonome) Evolutionsgleichung für $u(t) \in X$ der Form

$$u_t = JE'(u).$$

heißt Hamilton System (oder in Hamilton Form).

\Rightarrow *Energieerhaltung* (entlang der Lösung u bzw. durch den *Hamilton'schen Fluss* von E):

$$\frac{dE(u(t))}{dt} = \langle E'(u), u_t \rangle = \langle E'(u), JE'(u) \rangle = 0 \quad (4.1)$$

Bsp 1: $u = (x, p) \in X = \mathbb{R}^{2n}$; $E(x, p) \dots$ Hamilton-Funktion (z.B. $E = \frac{|p|^2}{2m} + V(x)$), $x \dots$ Ort, $p \dots$ Impuls

$$E' = \left(\frac{\partial E}{\partial x}, \frac{\partial E}{\partial p} \right)^T; \quad J := \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

$$\Rightarrow x_t = \frac{\partial E}{\partial p}, \quad p_t = -\frac{\partial E}{\partial x} \dots \text{Hamilton Gleichungen, klassische Mechanik}$$

Bsp 2: $u = u(x) \in X = L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$;

$$E(u) := \int \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + F(u) dx \text{ mit } F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{D}(E) \subset H^1(\mathbb{R}^n); \quad J := -i;$$

Wegen $u(x) \in \mathbb{C}$ gilt eigentlich $E = E(u, \bar{u})$, und damit ist die Fréchet-Ableitung E' nicht definiert. Stattdessen betrachtet man hier

$$2 \frac{\delta E(u, \bar{u})}{\delta \bar{u}} \stackrel{\text{Riesz}}{=} -\Delta u + f(u) \text{ mit „ } f = F' \text{ ” (vgl. Euler-Lagrange Gleichung) .}$$

Der Faktor 2 kommt daher, dass nur nach einer der 2 Variablen (u, \bar{u}) differenziert wird.

$$\Rightarrow iu_t + \Delta u - f(u) = 0 \dots \text{ nichtlineare Schrödinger Gl. (NLS)} \quad (4.2)$$

Generelle Annahme:

$$f(u) = g(|u|^2)u \text{ mit reeller Funktion } g, F(u) = \frac{1}{2}G(|u|^2), G' = g, G(0) = 0. \quad (4.3)$$

Besonders wichtiges Bsp. (z.B. für Bose-Einstein-Kondensat; in nichtlinearer Optik/Lasers: t -Achse = Ausbreitungsrichtung):

$$f(u) = \pm |u|^2 u \dots \text{ (de-)fokussierende kubisch-NLS}$$

Bsp 3:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X := L^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n); E\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) := \int \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u) dx \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}(E) \subset H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n) \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=: J} \underbrace{\begin{pmatrix} -\Delta u + f(u) \\ v \end{pmatrix}}_{=: E'((u,v)^\top)} \text{ mit } F' = f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \end{aligned}$$

bzw. (mit $v = u_t$):

$$u_{tt} - \Delta u + f(u) = 0 \dots \text{ nichtlineare Wellengleichung (NLW)} \quad (4.5)$$

Generelle Annahme (oBdA):

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(0) = 0, F(0) = 0.$$

Anwendungen: f polynomial z.B. in nichtlinearer Theorie für Mesonen; $f(u) = \sin u$ (*Sinus-Gordon Gleichung*) in Geometrie (Flächen mit Gauß-Krümmung $\equiv -1$), Verschiebung in Kristallstrukturen

Spezialfall: $f(u) = m^2 u$

$$u_{tt} - \Delta u + m^2 u = 0 \dots \text{ skalierte, freie Klein-Gordon Gleichung der relativistischen Quantenmechanik} \quad (4.6)$$

Physikalische Motivation:

Quantisierungsregeln (vgl. Schrödinger Gl. (4.2) mit $f \equiv 0$, $\hbar = 1$; mit kinetischer Energie

$$E = \frac{p^2}{2m}):$$

$$E \longrightarrow i\hbar\partial_t, \quad p \longrightarrow -i\hbar\nabla$$

relativist. Energie: $E^2 = c^2p^2 + \underbrace{m^2c^4}_{\text{Ruheenergie}^2}$

Das gilt für skalare Felder bzw. spinlose Teilchen, z.B. Pionen.

$$\Rightarrow -\hbar^2 u_{tt} = -\hbar^2 c^2 \Delta u + m^2 c^4 u$$

Bsp 4:

$$X = L^2(\mathbb{R}); E(u) := \int \frac{1}{2} |u_x|^2 + F(u) dx; \quad J := \partial_x; \quad (\text{obwohl unbeschränkt})$$

$$\mathcal{D}(E) \subset H^1(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow u_t = \partial_x(-\partial_x^2 u + F'(u)) \dots \text{verallgemeinerte Korteweg-de Vries Gleichung}$$

Für $F' = 3u^2$... standard KdV

Referenzen: [Stra] § 1; [Ku] § 1.4

4.2 Abschätzungen und Erhaltungsgrößen

... sind wesentlich für Beweis der Existenz von Lösungen und deren strukturellem Verhalten (z.B. für $t \rightarrow \infty$).

Lineare Wellengleichung:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ u_t(x, 0) = u_1(x) \end{cases} \quad (4.7)$$

Lemma 4.2 Sei $u_0 \equiv 0$, $u_1 \in W^{[\frac{n}{2}],1}(\mathbb{R}^n)$

$$\Rightarrow \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq c(n) |t|^{-\frac{n-1}{2}} \|u_1\|_{W^{[\frac{n}{2}],1}(\mathbb{R}^n)}, \quad t \neq 0 \quad (4.8)$$

Bew:

- $n = 1$ aus d'Alembert'scher Lösung (siehe PDGI §7.1):

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(y) dy$$

- $n = 3$ allgemeine Lösungsformel (siehe [Wh] §7.6); sei $t > 0$:

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi t} \int_{|y-x|=t} u_0(y) dS_y \right] + \frac{1}{4\pi t} \int_{|y-x|=t} u_1(y) dS_y & (4.9) \\
 &\stackrel{\text{Div. Satz}}{=} \frac{1}{4\pi t} \int_{|y-x|\leq t} \operatorname{div}_y \left(\underbrace{\frac{y-x}{t}}_{=\nu} u_1(y) \right) dy \\
 |u(x, t)| &\leq \frac{1}{4\pi t} \int_{|y-x|\leq t} |\nabla u_1(y)| + \frac{3}{t} |u_1(y)| dy \quad \forall x \in \mathbb{R}^3
 \end{aligned}$$

ν ... äußerer Normalenvektor (für $|y - x| = t$)

Ergebnis folgt mit:

$$\int_{|y-x|\leq t} 1 \cdot |u_1(y)| dy \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} ct \|u_1\|_{L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)} \stackrel{GN(3.42)}{\leq} ct \|\nabla u_1\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}$$

- Für allgemeines n : [Stra] □

Bem: Grund für das Abklingen in (4.9) ist die Wellenausbreitung entlang von Charakteristiken in einer wachsenden Sphäre der Dimension $n - 1$. Andererseits bleibt $\|u(t)\|_{L^2}$ beschränkt (\rightarrow Übung).

Erhaltungsgrößen, Symmetrien, Noether Theorem:

2 wichtige strukturelle Eigenschaften von Hamilton'schen Systemen (GDGI, PDGI):

- (i) \exists (integrale) *Erhaltungsgrößen*, z.B. Energie $E(u(t))$, Masse
- (ii) \exists *Symmetrien* der Gleichung:
explizite Transformationsgruppe, die Lösungen der Gleichung in andere Lösungen transformiert, z.B. Translation in x bzw. t , Rotation

Für Hamilton'sche Systeme

$$u_t = JE'(u) \quad \text{auf } X \tag{4.10}$$

mit Fluss $S_E(t) : u_0 \mapsto u(t)$ hängen (i) und (ii) eng miteinander zusammen:

- Betrachte ein (weiteres) Funktional $\mathcal{E} : X \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem symplektischen Vektorraum $(X, \langle \cdot, J \cdot \rangle)$, mit zugehörigem Hamilton'schen Fluss $S_{\mathcal{E}}(t)$. Wenn $S_{\mathcal{E}}(t)$ in t global definiert ist, bildet es eine *Transformationsgruppe* auf X : $S_{\mathcal{E}}(t+t') = S_{\mathcal{E}}(t) S_{\mathcal{E}}(t')$, $S_{\mathcal{E}}(0) = id$.

Satz 4.3 (Noether: hamiltonsche Formulierung. Für einen echten Satz müssten die Voraussetzungen präzisiert werden; siehe §20 [Ar].)

\mathcal{E} ist Erhaltungsgröße für (4.10) $\Leftrightarrow E$ ist symmetrisch (d.h. invariant) bez. der Gruppenaktion $S_{\mathcal{E}}(t)$.

Anwendungsidee: Transformationsgruppe oft leichter zu finden als Erhaltungsgesetz, und auch eine formale Motivation für ein Erhaltungsgesetz ist schon hilfreich.

Bsp 1: $u = (x, p) \in X = \mathbb{R}^4$; $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$; $E(x, p) = \frac{|p|^2}{2m} + V(x)$ mit $V = \tilde{V}(|x|)$, also rotationsinvariant.

$\mathcal{E} = L(x, p) := x \times p = x_1 p_2 - x_2 p_1 \dots$ Drehmoment

Hamilton System von L : $u_t = JL'(u)$

$$\text{bzw. } x_t = \frac{\partial L}{\partial p} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad p_t = -\frac{\partial L}{\partial x} = \begin{pmatrix} -p_2 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

Fluss: $S_L(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$

E ist invariant bez. der Rotationen $S_L(t) \Rightarrow L$ ist Erhaltungsgröße für (4.10), bzw. $S_E(t)$.

Bsp 2: (4.10) ist t -autonom \Rightarrow *Zeittranslation* $S(s) : u(x, t) \mapsto u(x, t+s)$ bildet Lösungen auf Lösungen ab $\Rightarrow E(u) = \text{const}$ in t , d.h. *Energieerhaltung* (wähle $\mathcal{E} = E$ in Noether Theorem; vgl. (4.1)).

Zusätzlich zur hamiltonschen Formulierung vom Noether Theorem (in Satz 4.3) gibt es auch eine *Variationsformulierung vom Noether Theorem*. Daraus lassen sich (formal) weitere Erhaltungsgrößen herleiten.

Idee: Ist ein Variationsproblem invariant unter einer Transformationsgruppe, so erfüllen die Lösungen der *Euler-Lagrange Gleichung* ein (integrales) Erhaltungsgesetz (Details: [Stra]).

Bsp: Betrachte NLW mit dem Wirkungsfunktional

$$\mathcal{F}(u) := \int \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \underbrace{\left[-\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + F(u) \right]}_{=E(u, u_t) \text{ aus (4.4)}} dx dt \tag{4.11}$$

(rein formales Integral, Konvergenz unklar) mit $F(0) = 0$; EL-Gleichung ist NLW: $\mathcal{F}'(u) \stackrel{\text{Riesz}}{=} u_{tt} - \Delta u + f(u) = 0$ (mit $F' = f$).

Bsp 3: Die *Streckungstransformation* $T(s) : u(x, t) \mapsto \lambda^{\frac{n-1}{2}} u(\lambda x, \lambda t)$; $\lambda = 1 + s$ lässt $\mathcal{F}(u)$ aus (4.11) zumindest für NLW mit $F = 0$ invariant. Zugehöriger Generator dieser Transformation (shalbgruppe) ist $N = t\partial_t + x \cdot \nabla + \frac{n-1}{2}$. D.h.

$$\frac{\partial}{\partial s} (T(s) u(x, t)) \Big|_{s=0} = Nu(x, t).$$

Durch Multiplikation von $u_{tt} - \Delta u = 0$ mit Nu und partiellen Integrationen erhält man die *Streckungsidentität* („dilation identity“); das ist ein Erhaltungsgesetz:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} te + x \cdot \nabla uu_t + \frac{n-1}{2} uu_t dx = 0$$

mit *Energiedichte* $e(u) := \frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u)$.

Verallgemeinerung für $F \neq 0$:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} te + x \cdot \nabla uu_t + \frac{n-1}{2} uu_t dx = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} H(u) dx \quad (4.12)$$

mit $H(u) := (n-1)uf(u) - 2(n+1)F(u)$.

Auch für $f(u) = cu^{1+\frac{4}{n-1}}$ gilt $H(u) = 0$.

Bsp 4: Die *Skalierungstransformation* $T(s) : u(x, t) \mapsto \lambda u(x, t)$; $\lambda = 1 + s$ lässt $\mathcal{F}(u)$ aus (4.11) zwar nicht invariant, liefert aber folgende nützliche Identität für die NLW:

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} [u_t^2 - |\nabla u|^2 - uf(u)] dx \quad \dots \quad \text{Skalierungsidentität} \quad (4.13)$$

Das folgt direkt aus Multiplikation der NLW mit u , da $Nu = u$ Generator von $T(s)$ ist.

Bsp 5: Betrachte NLS mit dem Wirkungsfunktional

$$\mathcal{F}(u) := \int \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{1}{2} \operatorname{Im} (\bar{u}_t u) + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + F(u) dx dt$$

mit Annahme (4.3): $F(u) = \frac{1}{2}G(|u|^2)$, $G(0) = 0$;

EL-Gleichung in \mathbb{R}^2 (statt \mathbb{C}) ist NLS: $iu_t + \Delta u - f(u) = 0$.

(i) Die Streckung $u(x, t) \mapsto \lambda^{\frac{n}{2}} u(\lambda x, \lambda^2 t)$; $\lambda = 1 + s$ führt auf die *Streckungsidentität*:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \operatorname{Im} (x \cdot \nabla \bar{u} u) + t |\nabla u|^2 + 2tF(u) dx = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} K(u) dx \quad (4.14)$$

mit $K(u) := nf(u)\bar{u} - 2(n+2)F(u)$.

(ii) *pseudo-konforme Identität* (basiert auch auf Noether Theorem; Herleitung [Ca1]):

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\int \frac{1}{2} |xu - 2it\nabla u|^2 + 4t^2 F(u) dx}_{=: \alpha(t)} = -2t \int K(u) dx \quad (4.15)$$

Anwendung: Sei $K \geq 0$ und $F \geq 0$ (z.B. defokussierende NLS: $f(u) = |u|^2 u$, $F(u) = \frac{1}{4}|u|^4$, $K(u) = (\frac{n}{2} - 1)|u|^4 \geq 0$ für $n \geq 2$) \Rightarrow

a) $\alpha(t) \searrow$ für $t \geq 0$

$$\Rightarrow 4t^2 \int_{\mathbb{R}^n} F(u) dx \leq \alpha(0) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |xu_0(x)|^2 dx \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \int F(u) dx = O(t^{-2})$... Einfluss des nichtlinearen Terms verschwindet für $t \rightarrow \pm\infty$.

b) Sei $xu_0 \in L^2(\mathbb{R}^n) \Rightarrow xu(t) - 2it\nabla u(t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$.
 Falls $u(t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$: $\Rightarrow xu(t) \in L^2_{\text{loc}} \Rightarrow \nabla u(t) \in L^2_{\text{loc}} \forall t \neq 0$

also: Gewinn einer Ortsableitung für $t > 0$; gilt unabhängig von F .

(iii) Geschickte Kombination von (4.14), (4.15) liefert die *Varianzidentität*:

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 |u|^2 dx = 16E(u) + 4 \int K(u) dx, \quad (4.16)$$

mit der Energie $E(u) = \int \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + F(u) dx$.

• Anwendung: Kollaps von Lösungen in endlicher Zeit (siehe §4.5).

Referenzen: [Tao] § 1.4; [Stra] § 1-2, 4; [RS2] § IX.4; [SS] § 1-2; [Ca1] § 7.1

4.3 globale Lösungen von NLS

4.3.1 lineare homogene Schrödinger Gleichung

$$\begin{cases} iu_t & = -\Delta u, x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) & = u_0(x) \end{cases} \quad (4.17)$$

• u, u_0 ... komplexwertig

(4.17) entsteht aus der Wärmeleitungsgleichung durch formale Substitution $t \mapsto it$

- Lösungsversuch: Transformiere $t \mapsto it$ in FL der Wärmeleitungsgleichung.

$$u(x, t) := \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\xi) \underbrace{\frac{1}{(4\pi it)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{i|x-\xi|^2}{4t}}}_{\text{FL der Schrödinger Gl. auf } \mathbb{R}^n} d\xi; \quad t \neq 0, x \in \mathbb{R}^n \quad (4.18)$$

$$i^{\frac{1}{2}} := e^{\frac{i\pi}{4}}$$

Lemma 4.4

(a) sei $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \forall t \neq 0 : u(\cdot, t) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{|4\pi t|^{\frac{n}{2}}} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

(b) sei $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \forall t \neq 0 : u(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad (\text{vgl. Üb.-Bsp.})$$

Bew:

(a) direkt aus (4.18):

$$|u(x, t)| \leq \frac{1}{|4\pi t|^{\frac{n}{2}}} \int |u_0(\xi)| d\xi$$

(b) 1. Schritt: Zusatzannahme $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$;
sei $t \neq 0$ fest:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{e^{\frac{i|x|^2}{4t}}}{(4\pi it)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{u_0(\xi) e^{\frac{i|\xi|^2}{4t}}}_{=: v_0(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)} e^{-\frac{i x \cdot \xi}{2t}} d\xi \\ \|u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 &= \frac{(2\pi)^n}{|4\pi t|^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int v_0(\xi) e^{-i \frac{x}{2t} \cdot \xi} d\xi}_{=: \hat{v}_0(\frac{x}{2t})} \right|^2 dx \\ &= (2t)^{-n} \int \left| \hat{v}_0\left(\frac{x}{2t}\right) \right|^2 dx \\ &= \|\hat{v}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \|v_0\|_{L^2}^2 = \|u_0\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

2. Schritt: approximiere $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ durch

$$\{u_k\} \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \quad (\text{wie in Def. von FT auf } L^2).$$

□

Satz 4.5 (Riesz-Thorin-Interpolation); Bew: [RS2])

Seien $\langle M, \mu \rangle$ und $\langle N, \nu \rangle$ Maßräume und sei $T : L^{p_0}(M, d\mu) \cap L^{p_1}(M, d\mu) \rightarrow L^{q_0}(N, d\nu) \cap L^{q_1}(N, d\nu)$ eine lineare Abbildung mit $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ und

$$\|Tf\|_{q_0} \leq M_0 \|f\|_{p_0}, \quad \|Tf\|_{q_1} \leq M_1 \|f\|_{p_1}$$

$\Rightarrow \exists!$ Erweiterung $T : L^{p_t} \rightarrow L^{q_t}$ mit

$$\frac{1}{p_t} = \frac{t}{p_1} + \frac{1-t}{p_0}, \quad \frac{1}{q_t} = \frac{t}{q_1} + \frac{1-t}{q_0}, \quad 0 < t < 1,$$

$$\|Tf\|_{q_t} \leq M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_{p_t}.$$

Weitere Lösungsabschätzungen durch Interpolation in Lemma 4.4:

Lemma 4.6 Sei $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für ein $p \in [1, 2]$

$$\Rightarrow \|u(\cdot, t)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq |4\pi t|^{\frac{n}{2} - \frac{n}{p}} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \forall t \neq 0, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad (4.19)$$

Gemischte Raum-Zeit-Abschätzung in $L^r(L^p) := L^r(\mathbb{R}_t; L^p(\mathbb{R}_x^n))$:

Lemma 4.7 (Strichartz-Abschätzung) Sei $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$

(a)

$$\|u\|_{L^{2+\frac{4}{n}}(L^{2+\frac{4}{n}})} \leq c \|u_0\|_{L^2} \quad (4.20)$$

(b)

$$\|u\|_{L^r(L^p)} \leq c \|u_0\|_{L^2} \quad (4.21)$$

$$\text{mit } r = \frac{4p}{n(p-2)}, \quad 2 \leq p < \frac{2n}{n-2} \quad (2 \leq p \leq \infty \text{ für } n = 1 \text{ bzw. } 2 \leq p < \infty \text{ für } n = 2)$$

Bew: (a) in [Stra], [Ca1]; (b) durch Interpolation zwischen (a) und $\|u\|_{L^\infty(L^2)} = \|u_0\|_{L^2}$.

Bem: (4.20), (4.21) bedeutet, dass u für $t \rightarrow \pm\infty$ in gewissem Sinn abklingt; $u(t)$ ist für f.a. $t \in \mathbb{R}$ regulärer (d.h. in $L^p(\mathbb{R}_x^n)$, $p > 2$) als die AB u_0 . Für eine reversible Gleichung ist das bemerkenswert! Kann daher auch nur für f.a. $t \in \mathbb{R}$ gelten.

Satz 4.8 (a) Sei $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$\Rightarrow u \in C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$, u ist schwache Lösung von $iu_t = -\Delta u$

(b) Sei $(1 + |x|^2)u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$

\Rightarrow (4.18) erfüllt $iu_t = -\Delta u$ punktweise $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Bew:

(a) $u \in L^\infty(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$ in Lemma 4.4 gezeigt; Stetigkeit in Satz 4.9.

$$\text{zz: } \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} u(\Delta\varphi - i\varphi_t) dx dt = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$$

$$\begin{aligned} \int \int u \Delta\varphi dx dt &= \int \frac{1}{(4\pi it)^{\frac{n}{2}}} \int \int u_0(\xi) \Delta\varphi(x, t) e^{i\frac{|x-\xi|^2}{4t}} dx d\xi dt \\ &\stackrel{\text{part. Int. in } x}{=} \int \frac{1}{(4\pi it)^{\frac{n}{2}}} \int \int u_0(\xi) \varphi(x, t) \left[\frac{ni}{2t} - \frac{|x-\xi|^2}{4t^2} \right] e^{i\frac{|x-\xi|^2}{4t}} dx d\xi dt \\ &\stackrel{\text{part. Int. in } t}{=} \dots = i \int \int u \varphi_t dx dt \end{aligned}$$

(b) einsetzen von (4.18) in (4.17) (alle Integrale von $u, u_t, \Delta u$ konvergieren) □

Definiere den Lösungsoperator $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$ für (4.17) auf $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$u_0 \mapsto u(\cdot, t)$

$$T(t)u_0 := \begin{cases} u_0 & , \text{ falls } t = 0; \text{ also } T(0) = I \\ u(x, t) & , \text{ falls } t \neq 0 \end{cases}$$

Satz 4.9 $\{T(t), t \in \mathbb{R}\}$ ist C_0 -Gruppe ("stark stetige Gruppe") von beschränkten Operatoren auf $L^2(\mathbb{R}^n)$. $T(t)$ ist Isometrie.

$L := i\Delta$ mit $D(L) = H^2(\mathbb{R}^n)$ ist infinitesimaler Generator.

Bew:

$$\hat{u}(y, t) = \widehat{T(t)u_0}(y) = \underbrace{\hat{u}_0(y)}_{\in L^2} \underbrace{e^{-i|y|^2 t}}_{\in L^\infty} \tag{4.22}$$

(ohne Beweis, da trickreich; [Ca1] §3), aber Motivation aus FT-Schrödinger Gl.: $\hat{u}_t = -i|y|^2 \hat{u}$.

aus (4.22):

(a) $T(t+s)u_0 = T(t)T(s)u_0 \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$ (Gruppe, aus (4.22))

(b) $\|T(t)u_0\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2} \quad \forall t \in \mathbb{R}$ (Isometrie)

(c) $\widehat{T(t)u_0} \in C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$ (starke Stetigkeit; mit dominierter Konvergenz)
 $\Rightarrow T(t)u_0 \in C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$

(d) Generator

$$\text{max. Definitionsbereich: } D(L) = \{u \in L^2 \mid \Delta u \in L^2\} = H^2(\mathbb{R}^n)$$

z.z.: $\forall u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)u - u}{t} = i\Delta u \quad (\text{in } L^2(\mathbb{R}^n))$$

bzw.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\widehat{T(t)u} - \hat{u}}{t} = -i|y|^2 \hat{u} \quad (\text{in } L^2(\mathbb{R}^n))$$

für Lebesgue's dom. Konvergenz:

$$(a) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\widehat{T(t)u} - \hat{u}}{t}(y) = \lim_{t \rightarrow 0} \hat{u}(y) \frac{e^{-i|y|^2 t} - 1}{t} = -i|y|^2 \hat{u}(y) \quad \text{für f.a. } y \in \mathbb{R}^n$$

$$(b) \quad \left| \hat{u}(y) \frac{e^{-i|y|^2 t} - 1}{t} \right| = |y|^2 |\hat{u}(y)| \left| \frac{\cos \lambda - 1}{\lambda} - \frac{i \sin \lambda}{\lambda} \right| \quad (\text{mit } \lambda = |y|^2 t)$$

$$\stackrel{\text{MWS}}{\leq} |y|^2 |\hat{u}(y)| \left(\left| \frac{-\sin(\tilde{\lambda}) \cdot \lambda}{\lambda} \right| + 1 \right) \leq |y|^2 |\hat{u}(y)| \cdot 2 \quad \text{mit } \tilde{\lambda} \in [0, \lambda],$$

also gleichmäßig beschränkt (bezüglich t)

□

Referenzen: [Cal] § 3.1, 3.2

4.3.2 lineare inhomogene Schrödinger Gleichung

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u = h(x, t) & , x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \in L^2(\mathbb{R}^n) \end{cases} \quad (4.23)$$

Sei $T_0(s) := e^{is\Delta}$, $s \in \mathbb{R}$ die *Evolutiongruppe* der freien Schrödinger Gleichung auf $L^2(\mathbb{R}^n)$.

$\forall s \in \mathbb{R}$ ist $T_0(s)$ unitär, d.h.

$$(T_0(s)u, v) = (u, T_0(-s)v) \quad \forall u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

Definition 4.10 Eine Funktion u heißt (im Sinne der Halbgruppentheorie)

- (a) klassische Lösung von (4.23), wenn $u \in C^1(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$, $u(t) \in H^2(\mathbb{R}^n) \forall t \in \mathbb{R}$ und (4.23) gilt $\forall t \in \mathbb{R}$ (im L^2 -Sinn);
- (b) milde Lösung von (4.23), wenn für

$$u(t) := T_0(t)u_0 - i \int_0^t T_0(t-s)h(s) ds \quad (4.24)$$

gilt: $u \in C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$.

- (4.24) ist Integralform für Lösung von (4.23) (*Duhamel Formel*, vgl. Variation der Konstanten).

Bem:

- (a) hinreichende VS für Existenz einer klassische Lösung: $h \in W^{1,1}(L^2)$ oder $h \in L^1(H^2)$.
- (b) Klassische Lösung ist eindeutig (vgl. homogene Gl.).
- (c) Milde Lösung ist per definitionem eindeutig.

Satz 4.11 Sei $h \in L'_{loc}(\mathbb{R}; L^{1+\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^n))$ mit $1 < p < 1 + \frac{4}{n-2}$ (bzw. $1 < p < \infty$ für $n = 1, 2$) und $r = \frac{4}{n} \frac{p+1}{p-1} \Rightarrow$ (4.23) hat eine (eindeutige) milde Lösung $u \in C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$; ist durch (4.24) gegeben.

Bew:

- $T_0(t)u_0 \in C(L^2)$ laut Satz 4.9
- Abschätzung des inhomogenen Terms

$$v(t) := -i \int_0^t T_0(t-s)h(s) ds :$$

$$\begin{aligned} \forall t : \|v(t)\|_{L^2}^2 &= (v(t), v(t)) \\ &\stackrel{T_0(s) \text{ unitär}}{=} \int_0^t \int_0^t (T_0(\sigma-s)h(s), h(\sigma)) ds d\sigma \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \int_0^t \int_0^t \|T_0(\sigma-s)h(s)\|_{L^{p+1}} \|h(\sigma)\|_{L^{1+\frac{1}{p}}} ds d\sigma \\ &\stackrel{(4.19)}{\leq} c \int_0^t \int_0^t |\sigma-s|^{-\frac{2}{r}} \|h(s)\|_{L^{1+\frac{1}{p}}} \|h(\sigma)\|_{L^{1+\frac{1}{p}}} ds d\sigma \\ &\stackrel{(*)}{\leq} c \|h\|_{L^{r'}(0,t; L^{1+\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^n))}^2 \end{aligned} \quad (4.25)$$

$\Rightarrow v \in C(L^2)$ (Details in [Ca1] §3.2).

(*) folgt mit *verallgemeinerter Young-Ungleichung* und Hölder:

$$\int_0^t |\sigma - s|^{-\frac{2}{r}} \|h(s)\|_{L^{1+\frac{1}{p}}} ds$$

$$= \underbrace{|\sigma|^{-\frac{2}{r}}}_{\in L^{\frac{r}{2}}(\mathbb{R}_\sigma)} * \underbrace{(\|h(\sigma)\|_{L^{1+\frac{1}{p}}} \chi_{[0,t]}(\sigma))}_{\in L^{r'}(\mathbb{R}_\sigma)} \in L^r(\mathbb{R}_\sigma); \quad \frac{2}{r} + \frac{1}{r'} - 1 = \frac{1}{r}$$

□

Lemma 4.12 (*verallgemeinerte Young-Ungleichung; Spezialfall*) Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $1 < p < \infty$, $0 < q < n$; $\frac{1}{p} + \frac{q}{n} - 1 = \frac{1}{r}$ mit $1 < r < \infty$.

$$\Rightarrow \| |x|^{-q} * f \|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Bew: [RS2]

Referenzen: [Ca1] § 2.5, 3.2

4.3.3 nichtlineare Schrödinger Gleichung

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u - f(u) = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u_0 \end{cases} \quad (4.26)$$

mit $f(u) := g(|u|^2)u$, $F(u) = \frac{1}{2}G(|u|^2)$, $G' = g$, $G(0) = 0$;

$$f|_{\mathbb{R}} \in C^1(\mathbb{R}) \text{ mit } |f'(u)| \leq c|u|^{p-1} \quad (4.27)$$

für ein $p \in (1, 1 + \frac{4}{n-2})$ (bzw. $p \in (1, \infty)$ für $n = 1, 2$), und

$$F(u) \geq -c|u|^2 - c|u|^{q+1} \text{ für ein } 1 < q < 1 + \frac{4}{n} \text{ und ein } c \geq 0. \quad (4.28)$$

Bsp: $n = 1$, $f(u) = \pm|u|^2u$, $F(u) = \pm\frac{1}{4}|u|^4$: (4.27),(4.28) sind erfüllt.
 $n = 2$ oder 3 , $f(u) = +|u|^2u$: Bedingungen sind auch erfüllt.

H^1 -a-priori-Abschätzung aus Energieerhaltung:

Energie:

$$E(u) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + F(u) \, dx$$

laut § 4.1: $\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$, $E(u(t)) = E(u_0) \quad \forall t \in \mathbb{R}$
 \Rightarrow für $F \geq 0$ ist H^1 -a-priori-Abschätzung trivial; andernfalls:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 &= E(u_0) - \int F(u(t)) \, dx \\ &\stackrel{(4.28)}{\leq} E(u_0) + c \|u(t)\|_{L^2}^2 + c \|u(t)\|_{L^{q+1}}^{q+1} \\ &\stackrel{\text{GN Ungl.}}{\leq} E(u_0) + c \|u_0\|_{L^2}^2 + c \|u_0\|_{L^2}^{q+1 - \frac{n}{2}(q-1)} \cdot \|\nabla u(t)\|_{L^2}^{\frac{n}{2}(q-1)} \end{aligned}$$

Wegen $\frac{n}{2}(q-1) < 2$ (aus (4.28)):

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2} \leq C(u_0) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{4.29}$$

$$\left| \int F(u(t)) \, dx \right| \leq C(u_0) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{4.30}$$

$$\|u(t)\|_{L^{p+1}} \leq C \|u(t)\|_{H^1} \leq C(\|u_0\|_{H^1}, E(u_0)) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{4.31}$$

mit Sobolev Ungleichung und p aus (4.27): $p+1 < 2 + \frac{4}{n-2} = \frac{2n}{n-2} = p^*$.

Satz 4.13 Sei $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ und $E(u_0) < \infty$.

\Rightarrow (4.26) hat eindeutige milde Lösung $u \in X := C_B(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^n))$, d.h. Lösung der zugehörigen Integralgleichung

$$u(t) = \underbrace{T_0(t)u_0}_{=:v(t)} - i \int_0^t T_0(t-s) f(u(s)) \, ds =: v(t) + N(u)(t). \tag{4.32}$$

Bew:

(a) Eindeutigkeit (sowie ein Modul für Kontraktivität in (b)):

Im Gegensatz zu §4.3.2 ist die Eindeutigkeit der milden Lösung hier nicht (per definitionem) trivial.

Seien $u_{1,2} \in X$ Lösungen \Rightarrow (mit Sobolev Einbettung $H^1 \hookrightarrow L^{\tilde{p}}$, $\tilde{p} \leq \frac{2n}{n-2}$) $u_{1,2} \in L^\infty(\mathbb{R}; L^{p+1}(\mathbb{R}^n))$

\Rightarrow mit Duhamel; $r := \frac{4}{n} \frac{p+1}{p-1} > 2$:

$$\forall t \in \mathbb{R} : u_1(t) - u_2(t) = -i \int_0^t T_0(t-s) [f(u_1(s)) - f(u_2(s))] \, ds$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|u_1(t) - u_2(t)\|_{L^{p+1}} &\stackrel{(4.19)}{\leq} c \int_0^t |t-s|^{-\frac{2}{r}} \underbrace{\|f(u_1(s)) - f(u_2(s))\|}_{=f'(\tilde{u})(u_1-u_2); \tilde{u} \text{ zw. } u_1, u_2} \|_{L^{1+\frac{1}{p}}} ds \\ \stackrel{\text{MWS, (4.27), Hölder}}{\leq} &c \int_0^t \underbrace{|t-s|^{-\frac{2}{r}}}_{\text{integrierbar}} \underbrace{\left[\|u_1(s)\|_{L^{p+1}}^{p-1} + \|u_2(s)\|_{L^{p+1}}^{p-1} \right]}_{\leq c(u_0)} \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^{p+1}} ds \\ &\stackrel{(4.31)}{\leq} c(u_0) T^{1-\frac{2}{r}} \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_1(t) - u_2(t)\|_{L^{p+1}} \\ \Rightarrow u_1 &\equiv u_2 \text{ auf } [0, T] \text{ für } c(u_0) T^{1-\frac{2}{r}} < 1 \end{aligned}$$

Gleiches Argument auf $[T, 2T], [2T, 3T], \dots$ wiederholen, da $c(u_0)$ glm. beschränkt (siehe (4.31)) $\Rightarrow u_1 \equiv u_2 \forall t$.

(b) Existenz:

• betrachte folgende abgeschlossene Teilmenge des Banach Raumes $Y := C([0, T]; L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^r((0, T); L^{p+1}(\mathbb{R}^n))$ mit der Norm $\|u\|_Y := \|u\|_{C(L^2)} + \|u\|_{L^r(L^{p+1})}$:

$$Z := \{u \in Y \mid \|u\|_{L^\infty(H^1)} + \|u\|_{L^r(W^{1,p+1})} \leq R\}$$

Achtung: Kugel ist bez. strikterer Norm als $\|\cdot\|_Y$ definiert (Abgeschlossenheit \rightarrow Übung)!

• $R = R(u_0) := 2(2c + 1)\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}$, mit c aus Strichartz-Ungleichung (4.21):

$$\|v\|_{L_t^r(L_x^{p+1})} \leq c\|u_0\|_{L^2} \tag{4.33}$$

Analog gilt: $\|\nabla v\|_{L^r(L^{p+1})} \leq c\|\nabla u_0\|_{L^2}$, da ∇ und $T_0(t) = e^{-it\Delta}$ kommutieren. Ferner: $\|v(t)\|_{H^1} = \|u_0\|_{H^1}$

• Insges.: $v \in Z$ und

$$\|v\|_{L^\infty(H^1)} + \|v\|_{L^r(W^{1,p+1})} \leq \frac{R}{2}$$

• Bew-Idee (Details in [Stra]):

Für T hinreichend klein ist die Abbildung $A : u \mapsto v + N(u)$ (=Picard-Iteration) eine Kontraktion in der Menge Z bez. $\|\cdot\|_Y$:

• zu zeigen:

1) für $u \in Z$ gilt: $N(u) \in Z$ mit $\|N(u)\|_{L^\infty(H^1)} + \|N(u)\|_{L^r(W^{1,p+1})} \leq \frac{R}{2}$; also $A(u) \in Z$;

$$2) \|N(u_1) - N(u_2)\|_Y \leq C(T, R)\|u_1 - u_2\|_Y, \text{ wobei } C(T, R) \xrightarrow{T \rightarrow 0} 0 \text{ (vgl. (a)).}$$

\Rightarrow (mit FPS von Banach) $\exists!$ Lösung $u \in L^\infty((0, T); H^1(\mathbb{R}^n))$

- aus (4.32) folgt sogar $u \in C([0, T]; H^1(\mathbb{R}^n))$
- T hängt nur von $\|u_0\|_{H^1}$, $E(u_0) = E(u(t))$ ab, und $\|u(t)\|_{H^1} \leq C \quad \forall t \in \mathbb{R}$ (laut (4.29)) \Rightarrow Lösung kann auf $[T, 2T], [-T, 0]$, usw. fortgesetzt werden. \square

Referenzen: [Stra] § 3

4.4 globale Lösungen von NLW

nichtlineare Klein-Gordon-Gleichung (NLKG):

$$u_{tt} - \Delta u + m^2 u = -\lambda|u|^{p-1}u, \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \quad (4.34)$$

Reformulierung als Evolutionsgleichung 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &:= \begin{pmatrix} u(x, t) \\ v(x, t) \end{pmatrix} \text{ mit } v = u_t \text{ und } f(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda|u|^{p-1}u \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{cases} \Phi' - \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta - m^2 & 0 \end{pmatrix} \Phi = f(\Phi) \\ \Phi(0) = \Phi_0 = \begin{pmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \end{pmatrix} \in X := H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.35)$$

- betrachte zunächst lineare Klein-Gordon Gleichung für $m > 0$:

$$\Phi' = -iA\Phi, \quad \Phi(0) = \Phi_0 \in X \quad (4.36)$$

mit Operator

$$A := i \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta - m^2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Operator $B^2 := -\Delta + m^2 \geq 0$, selbstadjungiert auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ mit (max) Definitionsbereich $D(B^2) = H^2(\mathbb{R}^n)$, da $\|B^2 u\|_{L^2}$ und $\|u\|_{H^2}$ äquivalent (betrachte FT)

Definiere $B := \sqrt{-\Delta + m^2} \geq 0$ mittels FT:

$$Bu = \mathcal{F}_{y \rightarrow x}^{-1} \left(\underbrace{\sqrt{|y|^2 + m^2}}_{\text{Fouriersymbol von } B} \hat{u}(y) \right)$$

mit $D(B) = H^1(\mathbb{R}^n)$, da:

$$\begin{aligned} \|Bu\|_{L^2}^2 &\stackrel{\text{Plancherel}}{=} \|\sqrt{|y|^2 + m^2} \hat{u}(y)\|_{L^2}^2 \\ &= \int (|y|^2 + m^2) |\hat{u}(y)|^2 dy \\ &= \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \underbrace{m^2}_{>0} \|u\|_{L^2}^2 \dots \text{äquivalent zu } \|u\|_{H^1}^2 \end{aligned}$$

- $\|\Phi\|_X^2 := \|Bu\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2$
- A ist selbstadjungiert auf X mit $D(A) = H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$
- laut *Satz von Stone* ([Pa]: $-iA$ ist infinitesimaler Generator einer C_0 -Gruppe von unitären Operatoren auf Hilbert Raum $H \Leftrightarrow A$ ist s.a. auf H):

$$W(t) := e^{-itA} = \begin{pmatrix} \cos tB & B^{-1} \sin tB \\ -B \sin tB & \cos tB \end{pmatrix}$$

(jeder Term via FT definiert) ist C_0 -Gruppe auf X . $W(t)\Phi_0 \in C(\mathbb{R}; X)$ löst (4.36) distributionell. [$W(t)$ kann als Exponentialmatrix für das Fouriersymbol berechnet werden.]

- NLKG in Integralform (Duhamel-Formel, Variation der Konstanten):

$$\Phi(t) = W(t)\Phi_0 + \int_0^t W(t-s)f(\Phi(s)) ds \tag{4.37}$$

→ suchen t -globale *milde Lösung* $\Phi \in C(\mathbb{R}; X)$; reellwertig, falls $u_0(x)$ und $v_0(x)$ reell.

Satz 4.14 Sei $-L$ infinitesimaler Generator der C_0 -Halbgruppe $T(t)$ auf dem Banachraum X . Sei $f : X \times [0, \infty) \rightarrow X$ stetig in t auf \mathbb{R}_0^+ und lokal Lipschitz stetig in u (glm. in t auf beschränkten Intervallen). \Rightarrow

$\forall u_0 \in X : \exists t_{max} \leq \infty$ mit:

$$\begin{cases} u' + Lu = f(u, t), & t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

hat eine eindeutige milde Lösung u auf $[0, t_{max})$. Falls $t_{max} < \infty \Rightarrow \lim_{t \nearrow t_{max}} \|u(t)\|_X = \infty$.

Bew: mit FPS von Banach (Details: Satz 6.1.2, Satz 6.1.4 in [Pa]; vgl. auch Satz 3.15 für semilin. Reaktions-Diffusionsgleichung) \square

Energieerhaltung:

laut § 4.1:

$$E(\Phi(t)) := \int \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{m^2}{2}u^2 + F(u) dx = E(\Phi_0) \quad \forall t, \quad (4.38)$$

mit

$$F(u) = \frac{\lambda}{p+1}|u|^{p+1} \geq 0 \quad (\text{für } \lambda \geq 0)$$

Satz 4.15 Die NLKG (4.34) mit $m \geq 0$, $\lambda \geq 0$, $1 \leq p \leq \frac{n}{n-2}$ ($1 \leq p < \infty$ für $n = 1, 2$) und $\Phi_0 \in X$ hat eine eindeutige milde Lösung $\Phi \in C(\mathbb{R}; X)$.

Bew-Idee: (Details: [R])

(a) t -lokale Lösung für $m > 0$:

- $f : X \rightarrow X$, da für $\Phi = (u, v)^T$:

$$\|f(\Phi)\|_X = \lambda \| |u|^{p-1}u \|_{L^2} = \lambda \|u\|_{L^{2p}}^p \stackrel{\text{Sobolev}}{\leq} C \|u\|_{H^1}^p \stackrel{m > 0}{\leq} C \|\Phi\|_X^p$$

mit $2p \leq \frac{2n}{n-2} = p^*$... Sobolev Index

- also: f lokal Lipschitz in X
- laut Satz 4.14: (4.37) hat eindeutige milde Lösung $\Phi \in C((t_{\min}, t_{\max}); X)$. Falls $t_{\max} < \infty$, dann $\lim_{t \nearrow t_{\max}} \|\Phi(t)\|_X = \infty$ (analog für t_{\min})

(b) t -globale Lösung für $m > 0$:

$$E(\Phi_0) \stackrel{\text{Sobolev}}{\leq} C(\|\Phi_0\|_X^2 + \|\Phi_0\|_X^{p+1}) < \infty,$$

da $p+1 \leq \frac{2n}{n-2} = p^*$... Sobolev Index für $n \geq 3$

Umgekehrt (a-priori Abschätzung an $\|\cdot\|_X$):

$$\begin{aligned} \|\Phi(t)\|_X^2 &= \|\nabla u\|_{L^2}^2 + m^2\|u\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2 \\ &\stackrel{(*)}{\leq} 2E(\Phi(t)) + m^2\|u(t)\|_{L^2}^2 \\ &\leq 2E(\Phi_0) + 2\|\Phi_0\|_X^2 + 4m^2t^2E(\Phi_0) \quad \forall t \in (t_{\min}, t_{\max}) \end{aligned}$$

mit $u(t) = u_0 + \int_0^t v(s) ds \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

(*) Wir verwenden hier den Term $\int \frac{m^2}{2}u^2 dx$ von $E(\Phi)$ nicht, damit die Abschätzung auch für (c) funktioniert.

$$\Rightarrow t_{\max} = -t_{\min} = \infty$$

• Energieerhaltung bisher nur formal; müsste aber erst für reguläre Lösungen rigoros gerechtfertigt werden; dann Dichtheitsargument.

(c) $m = 0$:

Schreibe (4.34) mit einem $m_0 > 0$ (klein) als:

$$\Phi' - \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta - m_0^2 & 0 \end{pmatrix} \Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda|u|^{p-1}u + m_0^2u \end{pmatrix} =: \tilde{f}(\Phi)$$

\tilde{f} ist lokal Lipschitz auf $X \Rightarrow$ Rest analog zu $m > 0$ (z.B. $B := \sqrt{-\Delta + m_0^2}$). \square

Referenzen: [Stra] § 3; [R] § 1-2; [Pa] § 1,6; [RS2] § X.13; [Ev] § 12

4.5 „Explosion“ von Lösungen

Bsp 1: $u_{tt} \pm u^3 = 0 \quad | \cdot u_t ; \int dt$

(a) pos. Vorzeichen $\Rightarrow (u_t)^2 + \frac{u^4}{2} = E = \text{const}$ in t
 \Rightarrow alle Lösungen liegen auf geschlossenen Kurven im (u, u_t) -Phasenraum \Rightarrow existieren für $t \in \mathbb{R}$

Modell: Kugel in quartischem Potential $V(u) = u^4/4 \rightarrow$ Oszillationen

(b) neg. Vorzeichen $\Rightarrow (u_t)^2 - \frac{u^4}{2} = E = \text{const}$
 Seien $u(0) = u_0$ und $u_t(0) > 0$ gegeben mit $E > 0$.

$$dt = (E + \frac{1}{2}u^4)^{-\frac{1}{2}} du \Rightarrow t = \int_{u_0}^{u(t)} (E + \frac{1}{2}y^4)^{-\frac{1}{2}} dy$$

Sei

$$T := \int_{u_0}^{\infty} (E + \frac{1}{2}y^4)^{-\frac{1}{2}} dy$$

Da $T < \infty$: $\lim_{t \nearrow T} u(t) = \infty$, d.h. Explosion der Lösung.

im Modell: Kugel läuft in endlicher Zeit nach $u = \infty$ (im Gegensatz zu $V = -u^2$)

Bsp 2: NLS:

$$iu_t + \Delta u - f(u) = 0, \quad u(0) = u_0 \tag{4.39}$$

Sei

$$K(u) := nf(u)\bar{u} - 2(n+2)F(u) \leq 0 \quad \forall u \in \mathbb{C} \tag{4.40}$$

(z.B. fokussierende kubische NLS d.h $f(u) = -|u|^2u$), für $n \geq 2$... Gegenstück zu Satz 4.13)

Satz 4.16 *Es gelte $E(u_0) = \int \frac{1}{2}|\nabla u_0|^2 + F(u_0) dx < 0$. \Rightarrow keine glatte Lösung der NLS (4.39), (4.40) kann für alle Zeiten existieren. („glatt“ heisst hinreichend differenzierbar und abklingend bei $|x| = \infty$, so dass alle Terme im Beweis definiert sind.)*

Bew: laut Varianzidentität (4.16)

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \int |x|^2 |u|^2 dx &= 16E(u) + 4 \int K(u) dx \leq 16E(u_0) \\ \Rightarrow \int |x|^2 |u(t)|^2 dx &\leq 8 \underbrace{E(u_0)}_{<0} t^2 + c_1 t + c_0 < 0 \end{aligned}$$

für t groß \Rightarrow Widerspruch.

□

Beispiel einer Explosion:

Sei $f(u) = -|u|^{\frac{4}{n}}u$ (z.B. fokussierende kubische NLS für $n = 2$; das ist der relevante Fall in Optik).

Spezielle Lösung von (4.39):

$$u(x, t) = \tilde{\varphi} \left(\frac{|x|}{t^* - t} \right) \underbrace{[4\pi i(t^* - t)]^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{i|x|^2}{4(t^* - t)}}}_{\text{FL der freien Schröd. Gl. auf } \mathbb{R}^n}, \quad 0 \leq t < t^*$$

und $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(|x|)$ erfüllt:

$$-\Delta \varphi - \frac{1}{(4\pi)^2} |\varphi|^{\frac{4}{n}} \varphi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

\Rightarrow Explosion für $x \rightarrow 0$, $t \nearrow t^*$ (mit $\frac{|x|}{t^* - t} = \text{const}$) in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $H^1(\mathbb{R}^n)$, aber $\|u(t)\|_{L^2} = \text{const}$.

Bsp 3: NLW:

$$u_{tt} - \Delta u + f(u) = 0, \quad u(0) = u_0, u_t(0) = v_0 \quad (4.41)$$

Es gelte für ein $\varepsilon > 0$:

$$uf(u) \leq (2 + \varepsilon)F(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}; F(0) = 0. \quad (4.42)$$

Bsp: Für die NLKG-Gleichung, d.h. $f(u) = m^2u - |u|^{p-1}u$ (also $\lambda = -1$; Gegenstück zu Satz 4.15) gilt (4.42) $\forall p > 1$.

Die Energie

$$E = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 + |\nabla u|^2 + \underbrace{m^2u^2 - \frac{2}{p+1}|u|^{p+1}}_{=2F(u)} dx$$

ist negativ, falls der nichtlineare Term $\int |u|^{p+1} dx$ die anderen Terme dominiert.

Satz 4.17 *Es gelte*

$$E := E(t) = E(\Phi_0) = \int \frac{1}{2}v_0^2 + \frac{1}{2}|\nabla u_0|^2 + F(u_0) dx < 0$$

und (4.42).

\Rightarrow Keine glatte Lösung von (4.41) (mit $u \in C([0, T]; H^1(\mathbb{R}^n)); F(u), uf(u) \in L^1((0, T) \times \mathbb{R}^n)$) kann für alle Zeiten existieren.

Bew: Addiere zur Skalierungsidentität (4.13)

$$\frac{d^2}{dt^2} \underbrace{\frac{1}{2} \int u^2 dx}_{=: I(t)} = \int [u_t^2 - |\nabla u|^2 - uf(u)] dx$$

den (verschwindenden) Term $(2 + \varepsilon)(E(t) - E(0)) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} I''(t) &= (2 + \frac{\varepsilon}{2}) \int u_t^2 dx - (2 + \varepsilon) \underbrace{E(0)}_{<0} + \frac{\varepsilon}{2} \int |\nabla u|^2 dx + \int \underbrace{[(2 + \varepsilon)F(u) - uf(u)]}_{\geq 0 \text{ laut (4.42)}} dx \\ &\Rightarrow G(t) := I'' - (2 + \frac{\varepsilon}{2}) \int u_t^2 dx + (2 + \varepsilon)E \geq 0. \end{aligned}$$

Für beliebiges $\tau > 0$ gilt: $H(t) := I(t) - (t + \tau)^2 \underbrace{E}_{<0} > I(t) \geq 0, \quad \forall t \geq 0$.

Für τ hinreichend groß gilt: $H'(0) = \underbrace{I'(0)}_{\in \mathbb{R}} - 2\tau E > 0$

$$\Rightarrow HH'' - (1 + \frac{\varepsilon}{4})(H')^2 = \dots = (4 + \varepsilon)S(t) + H(t)G(t) \geq 0, \quad \text{da:} \quad (4.43)$$

$$S(t) := \underbrace{[I(t) - (t + \tau)^2 E]}_{=\|a\|^2} \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{2} \int u_t^2 dx - E\right]}_{=\|b\|^2} - \underbrace{\left[\frac{1}{2} I'(t) - (t + \tau) E\right]^2}_{=\|c\|^2} \geq 0,$$

mit Cauchy-Schwarz (also $c^2 \leq \|a\|^2 \|b\|^2$ in $L^2(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$) für

$$\left\langle \underbrace{\left(\begin{array}{c} \frac{u}{\sqrt{2}} \\ (t + \tau)\sqrt{-E} \end{array} \right)}_{=:a}, \underbrace{\left(\begin{array}{c} \frac{u_t}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{-E} \end{array} \right)}_{=:b} \right\rangle := \frac{1}{2} \underbrace{\int u u_t dx}_{=:I'} + (t + \tau)(-E) =: c = \langle a, b \rangle.$$

Sei $J(t) := H(t)^{-\varepsilon/4} \Rightarrow$

$$J(0) = H(0)^{-\varepsilon/4} = (I(0) - \tau^2 E)^{-\varepsilon/4} > 0$$

$$J'(0) = -\frac{\varepsilon}{4} H(0)^{-1-\varepsilon/4} H'(0) < 0$$

$$J''(t) = \dots = -\frac{\varepsilon}{4} H(t)^{-2-\varepsilon/4} \underbrace{[HH'' - (1 + \frac{\varepsilon}{4})(H')^2]}_{\geq 0 \text{ laut (4.43)}} \leq 0 \quad \forall t \geq 0$$

Also: J konkav mit $J(t) \leq J(0) + tJ'(0)$

$\Rightarrow \exists T > 0$ mit $J(T) = 0$, also $H(T) = \infty$, also $\lim_{t \nearrow T} \int u^2(t) dx = \infty$ (falls Lösung bis T existiert).

Analoger Beweis für $t \leq 0$. □

Referenzen: [Stra] § 4; [SS] § 5.1

4.6 Stabilität von Solitonen

fokussierende NLS mit beliebigem $\sigma > 0$:

$$iu_t + \Delta u + |u|^{2\sigma} u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.44)$$

spezielle Lösungen als *stehende Welle*:

$$u(x, t) = e^{i\lambda^2 t} \varphi(x)$$

mit beliebigem $\lambda > 0$ und

$$\Delta \varphi - \lambda^2 \varphi + |\varphi|^{2\sigma} \varphi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n; \quad \varphi \in \mathbb{R} \quad (4.45)$$

(Lösbarkeit: [SS] § 4.2)

für $n = 1$: (4.45) hat eindeutige reelle (nicht konstante) Lösung (bis auf Translation)

$$g(x) = \frac{[\lambda^2(\sigma + 1)]^{\frac{1}{2\sigma}}}{\cosh^{\frac{1}{\sigma}}(\lambda\sigma x)} \quad (4.46)$$

$n \in \mathbb{N}$: $\exists!$ positive, radialsymmetrische (z.B. um $x = 0$) Lösung g („Grundzustand“); klingt für $|x| \rightarrow \infty$ monoton ab. Vgl. Satz 4.16: Also gilt hier $E(0) \geq 0$.

Die NLS (4.44) (und auch die freie Schrödinger Gleichung) erfüllen die Galilei-Invarianz. D.h., für eine Lösung $u(x, t)$ ist auch

$$\tilde{u}(x', t) := u(x, t)e^{\frac{i}{2}(v \cdot x - \frac{1}{2}|v|^2 t)}, \quad \text{mit } v \in \mathbb{R}^n, \quad x' = x - vt$$

eine Lösung von (4.44): *wandernde Wellen* („Soliton“)

Frage: Sind diese stehenden/wandernden Wellen stabil?

Lineare Stabilitätsanalyse (Heuristik):

- kleine Störungen von $g(x)e^{i\lambda^2 t}$, d.h. mit $r, s \in \mathbb{R}$ klein:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= g(x)(1 + r(x, t))e^{i(\lambda^2 t + s(x, t))} \\ &\approx [g(x) + \underbrace{v(x, t)}_{:=gr} + i \underbrace{w(x, t)}_{:=gs}]e^{i\lambda^2 t} \end{aligned} \quad (4.47)$$

- Linearisierung der NLS um $ge^{i\lambda^2 t}$: Einsetzen von (4.47) in NLS mit

$$|g + v + iw|^{2\sigma}(g + v + iw) = [(g + v)^2 + w^2]^\sigma(g + v + iw) \approx g^{2\sigma+1} + (2\sigma + 1)g^{2\sigma}v + ig^{2\sigma}w,$$

auslassen höherer Terme in v, w , und trennen von Real-, Imaginärteil liefert

$$\partial_t \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & L_0 \\ -L_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

mit den selbstadj. Operatoren $L_0 = -\Delta + \lambda^2 - g^{2\sigma}$, $L_1 = -\Delta + \lambda^2 - (2\sigma + 1)g^{2\sigma}$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathcal{D}(L_{0,1}) = H^2(\mathbb{R}^n)$.

- Annahme: “zeitharmonische Störung”:

$$v(x, t) = \hat{v}(x)e^{i\Omega t}, \quad w(x, t) = \hat{w}(x)e^{i\Omega t} \quad \Omega \in \mathbb{C}.$$

$$\text{Aus (4.48) folgt : } \Omega^2 \hat{v} = L_0 L_1 \hat{v} \quad (4.49)$$

- Da g (4.45) löst, folgt $\forall \hat{v} \in H^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\Rightarrow L_0 \hat{v} = \dots = -\frac{1}{g} \operatorname{div} \left(g^2 \nabla \left(\frac{\hat{v}}{g} \right) \right)$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \hat{v} L_0 \hat{v} \, dx = \int \left| \nabla \left(\frac{\hat{v}}{g} \right) \right|^2 g^2 \, dx \geq 0 \Rightarrow L_0 \geq 0$$

ferner: $L_0 g = 0$, $L_1(\nabla g) = \nabla \underbrace{(-\Delta g + \lambda^2 g - g^{2\sigma+1})}_{=L_0 g=0} = 0$

- Spektrum von L_0 : $0 \in \underbrace{\sigma_p}_{\text{diskret}} \subset [0, \lambda^2)$, $\sigma_c = [\lambda^2, \infty) \Rightarrow L_0$ invertierbar auf $\{g\}^\perp$
- aus Monotonie von $g \Rightarrow \nabla g$ hat einzige Nullstelle an $x = 0$. Man kann zeigen: L_1 hat genau einen neg. Eigenwert; 0 ist der 2. EW (zum EV ∇g)
- aus (4.49):

$$\Omega^2(\hat{v}, g) = (L_0 L_1 \hat{v}, g) = (L_1 \hat{v}, L_0 g) = 0 \Rightarrow (\hat{v}, g) = 0 \quad \text{falls } \Omega \neq 0. \quad (4.50)$$

$$\sqrt{L_0}^{-1} \text{ auf (4.49) liefert: } \Omega^2(\sqrt{L_0}^{-1} \hat{v}) = \underbrace{\sqrt{L_0} L_1 \sqrt{L_0}}_{\text{symmetrisch}} (\sqrt{L_0}^{-1} \hat{v}) \text{ falls } \hat{v} \perp g \quad (4.51)$$

$\Rightarrow \Omega^2$ ist Eigenwert vom symmetrischem Operator, also $\Omega^2 \in \mathbb{R}$

- Wir suchen Vorzeichen-Information über $\Omega_m^2 = \text{Minimum von } \Omega^2 \text{ in (4.49)}$. Falls $\Omega_m^2 > 0 \Rightarrow$ (4.48) hat Moden $e^{\pm i|\Omega_m|t} \Rightarrow$ linear stabil

Lemma 4.18 *Unter obigen Annahmen gilt:*

$$\operatorname{sgn}(2 - n\sigma) = \operatorname{sgn}(\Omega_m^2)$$

Beweis:

- Wir betrachten das Minimum von Ω^2 auf $\{\hat{v} \in L^2 \mid \hat{v} \perp g\}$, da ja für $\hat{v} = g$ gilt: $\Omega^2 = 0$ (siehe (4.50)). Aus (4.51) folgt mit $y := \sqrt{L_0}^{-1} \hat{v}$:

$$\Omega^2(y, y)_{L^2} = (y, \underbrace{\sqrt{L_0} L_1 \sqrt{L_0}}_{\text{symmetrisch}} y)$$

$$\Omega_m^2 = \min_y \frac{(y, \sqrt{L_0} L_1 \sqrt{L_0} y)}{(y, y)} = \min_{\hat{v}} \frac{(\hat{v}, L_1 \hat{v})}{(\hat{v}, L_0^{-1} \hat{v})} \quad (\text{Rayleigh Quotient})$$

Auf $\{g\}^\perp$ gilt: L_0 strikt positiv.

$$\Rightarrow \operatorname{sgn}(\Omega_m^2) \text{ wird nur durch } \operatorname{sgn}(\hat{v}, L_1 \hat{v}) \text{ bestimmt.} \quad (4.52)$$

Wir betrachten daher das Minimum von

$$\frac{1}{2}(\hat{v}, L_1 \hat{v}) = \frac{1}{2} \int |\nabla \hat{v}|^2 + [\lambda^2 - (2\sigma + 1)g^{2\sigma}] \hat{v}^2 dx$$

auf $\{g\}^\perp$ mit $\|\hat{v}\|_{L^2} = 1$;

das ist ein (quadratisches) Minimierungsproblem mit den Nebenbedingungen

$$\int \hat{v}^2 dx = 1, \quad \int \hat{v} g dx = 0 .$$

Zugehörige (modifizierte) EL-Gleichung für das Minimum \tilde{v} :

$$-\Delta \tilde{v} + [\lambda^2 - (2\sigma + 1)g^{2\sigma}] \tilde{v} = L_1 \tilde{v} = \tilde{\mu} \tilde{v} + \alpha g, \quad (4.53)$$

$\tilde{\mu}, \alpha \in \mathbb{R} \dots$ Lagrange Multiplikatoren

$$\text{Wegen } \tilde{v} \perp g, \|\tilde{v}\| = 1 \text{ gilt: } (\tilde{v}, L_1 \tilde{v}) = \tilde{\mu} . \quad (4.54)$$

- Widerspruchsannahme: Sei $\alpha = 0$, d.h. Nebenbedingung $g \perp \tilde{v}$ automatisch erfüllt, d.h.

$$\tilde{\mu} = \min_{\hat{v}} \frac{(\hat{v}, L_1 \hat{v})}{(\hat{v}, \hat{v})};$$

also $\tilde{\mu}$ ist kleinster Eigenwert von L_1 und \tilde{v} zugehöriger Grundzustand von L_1 (\Rightarrow ohne Nullstellen). \tilde{v} und g (= Grundzustand von L_0) können aber nicht orthogonal sein können (keine Nullstellen!). \Rightarrow Widerspruch $\Rightarrow \alpha \neq 0$.

- Eigenwerte von L_1 : $\mu_0 < \mu_1 = 0 < \mu_2 \dots \leq \mu_K$; $K \geq 1$. $\sigma_c(L_1) = [\lambda^2, \infty)$.

- Wir betrachten nun die inhomogene Gleichung aus (4.53):

$$(L_1 - \mu) \tilde{v} = \alpha g. \quad (4.55)$$

Da die Inhomogenität $g \perp \nabla g$ (=EV zu μ_1), kann (4.55) für $\mu \in (\mu_0, \mu_2)$ nach \tilde{v} aufgelöst werden:

$$\tilde{v} = \alpha (L_1 - \mu)^{-1} g$$

$$\Rightarrow 0 \stackrel{\text{N.B.}}{=} (g, \tilde{v}) = \alpha (g, (L_1 - \mu)^{-1} g) =: \alpha f(\mu) \quad \dots \text{ und wir suchen die Nullstelle } \tilde{\mu}.$$

- $f : (\mu_0, \mu_2) \rightarrow \mathbb{R}$ hat Nullstelle $\tilde{\mu} \in (\mu_0, \mu_2)$, da f monoton und

$$\lim_{\mu \searrow \mu_0} f(\mu) = -\infty, \quad \lim_{\mu \nearrow \mu_2} f(\mu) = \infty.$$

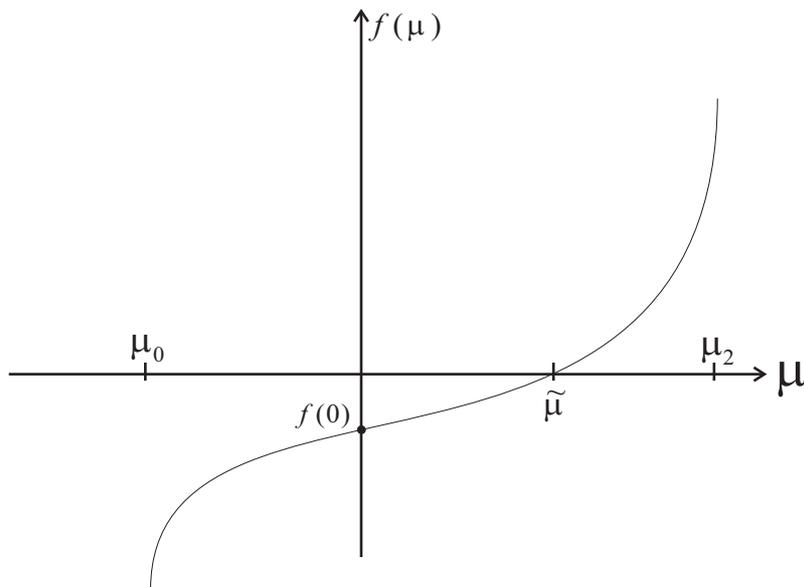
Das folgt aus Monotonie von $(\mu_j - \mu)^{-1}$ und Spektraldarstellung vom selbstadjungierten Operator L_1 :

$$L_1 \hat{v} = \sum_{k=0}^K \mu_k (\hat{v}, v_k) v_k + \left(\int_{\lambda^2}^{\infty} \tau \underbrace{dP_\tau}_{\text{Spektralmaß}} \right) \hat{v}$$

$$f(\mu) = \sum_{k=0}^K (\mu_k - \mu)^{-1} |(g, v_k)|^2 + \dots$$

In dieser Summe kommt $k = 1$ nicht vor, da $g \perp v_1$ ($= \nabla g$).

- Es gilt $\text{sgn } \tilde{\mu} = -\text{sgn } f(0) = -\text{sgn}(g, L_1^{-1}g)$.



- Bestimmung von $f(0)$:

g hängt von λ^2 ab. Also $g = g(\lambda^2)$, erfüllt $L_0 g = -\Delta g + \lambda^2 g - g^{2\sigma+1} = 0$.

Differenzieren nach λ^2

$$\Rightarrow -\Delta \frac{\partial g}{\partial \lambda^2} + g + \lambda^2 \frac{\partial g}{\partial \lambda^2} - (2\sigma + 1) g^{2\sigma} \frac{\partial g}{\partial \lambda^2} = L_1 \frac{\partial g}{\partial \lambda^2} + g = 0$$

$$\Rightarrow f(0) = (g, L_1^{-1}g) = - \left(g, \frac{\partial g}{\partial \lambda^2} \right) = - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \lambda^2} \int g^2 dx$$

- Skalierung von (4.45): Sei Φ Lösung von $\lambda = 1 \Rightarrow \varphi(x) := \lambda^{\frac{1}{\sigma}} \Phi(\lambda x)$ ist Lösung für allgemeines λ .

$$\Rightarrow \int g(\lambda^2)^2 dx = (\lambda^2)^{\frac{1}{\sigma} - \frac{n}{2}} \int g(1)^2 dx$$

$$\Rightarrow \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda^2} \int g^2 dx \right) = \operatorname{sgn} \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{n}{2} \right) = -\operatorname{sgn} f(0) = \operatorname{sgn} \tilde{\mu} \stackrel{(4.54)}{=} \operatorname{sgn}(\tilde{v}, L_1 \tilde{v}) \stackrel{(4.52)}{=} \operatorname{sgn} \Omega_m^2$$

$$\Rightarrow \operatorname{sgn}(2 - n\sigma) = \operatorname{sgn}(\Omega_m^2)$$

□

- Klassifikation (durch heuristische Analyse):

(a) $n\sigma > 2$:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda^2} \int g^2 dx < 0, \quad \tilde{\mu} < 0, \quad \Omega_m^2 < 0$$

\Rightarrow gestörtes Problem (4.47) hat mindestens eine Mode der Form $e^{\pm i|\Omega_m|t}$.

\Rightarrow *instabil*

(b) $n\sigma < 2$:

$\Omega_m^2 > 0 \Rightarrow$ alle Moden haben die Form $e^{\pm i|\Omega_m|t}$.

\Rightarrow *linear stabil*

(c) $n\sigma = 2$: keine Aussage

also: 1D-Solitonen der fokussierenden kubischen ($\sigma = 1$) NLS stabil.

rigoroser Zugang: [SS] § 4.4; [Stra] § 7

Referenzen: [SS] § 4.1.1

A Literaturverzeichnis

- [Ar] **V.I. Arnold**, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer, New York, 1978.
- [Br] **H. Brézis**, *Analyse fonctionnelle*, Dunod, Paris, 1983.
- [Ca1] **T. Cazenave**, *An introduction to nonlinear Schrödinger equations*, Textos de Métodos Matemáticos 22, I.M.U.F.R.J., Rio de Janeiro, 1989.
- [Ca2] **T. Cazenave**, *Semilinear Schrödinger Equations*, Courant Lecture Notes 10, AMS, Providence, 2003.
- [DL3] **R. Dautray, J.L. Lions**, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Vol. 3: Spectral Theory and Applications*, Springer, 2000.
- [DL6] **R. Dautray, J.L. Lions**, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Vol. 6: Evolution Problems II*, Springer, 2000.
- [Ev] **L. C. Evans**, *Partial Differential Equations*, AMS, 1998
- [GT] **D. Gilbarg, N.S. Trudinger**, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, 1977.
- [Jü] **A. Jüngel**, *Nichtlineare partielle Differentialgleichungen*, Vorlesungsmanuskript an TU Wien, 2008.
- [Ku] **S. Kuksin**, *Analysis of Hamiltonian PDEs*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 19. Oxford University Press, Oxford, 2000.
- [LSU] **O.A. Ladyzenskaja, V.A. Solonnikov, N.N. Ural'ceva**, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, Translations of Mathematical Monographs, 23, AMS, Providence, 1968.
- [La] **P.D. Lax**, *Hyperbolic Partial Differential Equations*, Courant Lecture Notes 14, AMS, Providence, 2006.
- [Ma] **P.A. Markowich**, *Applied Partial Differential Equations - a visual approach*, Springer, Berlin, 2007.
- [Pa] **A. Pazy**, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer, 1983.
- [R] **M. Reed**, *Abstract non-linear wave equations*, Lecture notes in mathematics 507, Springer 1976.
- [RR] **M. Renardy & R.C. Rogers**, *An Introduction to Partial Differential Equations*, Springer, New York, 1993

- [RS1] **M. Reed, B. Simon**, *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*, Academic Press, 1980.
- [RS2] **M. Reed, B. Simon**, *Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis, Self-Adjointness*, Academic Press, 1975.
- [Ro] **T. Roubíček**, *Nonlinear Partial Differential Equations with Applications*, Birkhäuser, 2005.
- [Ru] **M. Růžička**, *Nichtlineare Funktionalanalysis*, Springer, 2004.
- [Se] **J.A. Sethian**, *Level set methods and fast marching methods*, Cambridge Univ. Press, 2000
- [Sh1] **R.E. Showalter**, *Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations*, Electron. J. Diff. Eqns., 1994
<http://ejde.math.swt.edu/Monographs/01/abstr.htm>
- [Sh2] **R.E. Showalter**, *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations*, AMS, 1997
http://www.ams.org/online_bks/surv49/
- [SS] **C. Sulem, P.L. Sulem**, *The nonlinear Schrödinger equation*, Springer, 1999.
- [Stra] **W.A. Strauss**, *Nonlinear Wave Equations*, NSF-CBMS Research Monograph No. 73, Amer. Math. Soc., Providence, 1989.
- [Tao] **T. Tao**, *Nonlinear Dispersive Equations. Local and Global Analysis*, AMS, 2006.
- [Tar] **L. Tartar**, *An Introduction to Navier-Stokes Equation and Oceanography*, Lecture Notes of the UMI, Springer, 2006.
- [Te] **R. Temam**, *Navier-Stokes equations*, North-Holland, 1979
- [Va] **J.L. Vazquez**, *An Introduction to the mathematical theory of the Porous Medium Equation*, in Shape Optimization and Free Boundaries (Montreal, PQ, 1990), 347–389, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 380, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992.
http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/jvazquez/pmebook.ps
- [Wh] **G. B. Whitham**, *Linear and nonlinear waves*, Wiley, 1974.
- [Ze] **E. Zeidler**, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, Volume II, Springer, 1990.

B Folien

Diffusion filtering example - triangle and rectangle

[Pavel Mrazek](#)

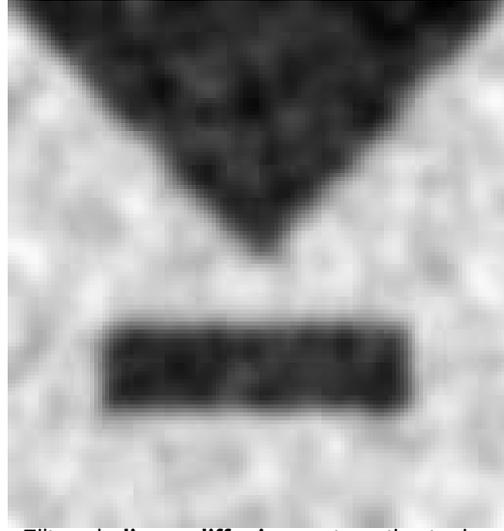
Center for Machine Perception

Czech Technical University

<http://cmp.felk.cvut.cz/>



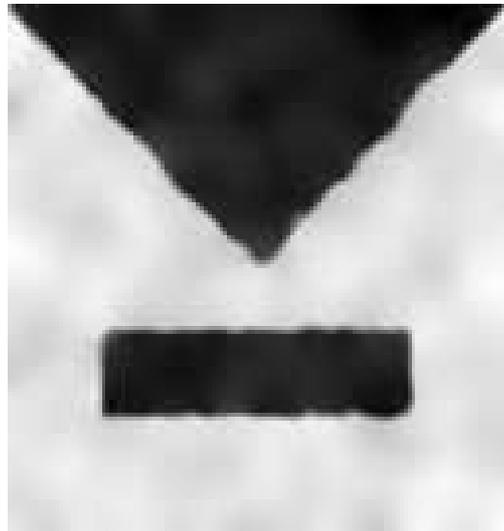
Noisy input - non-Gaussian additive noise



Filtered - **linear diffusion**, automatic stopping time



Filtered - **isotropic nonlinear diffusion**, automatic stopping time



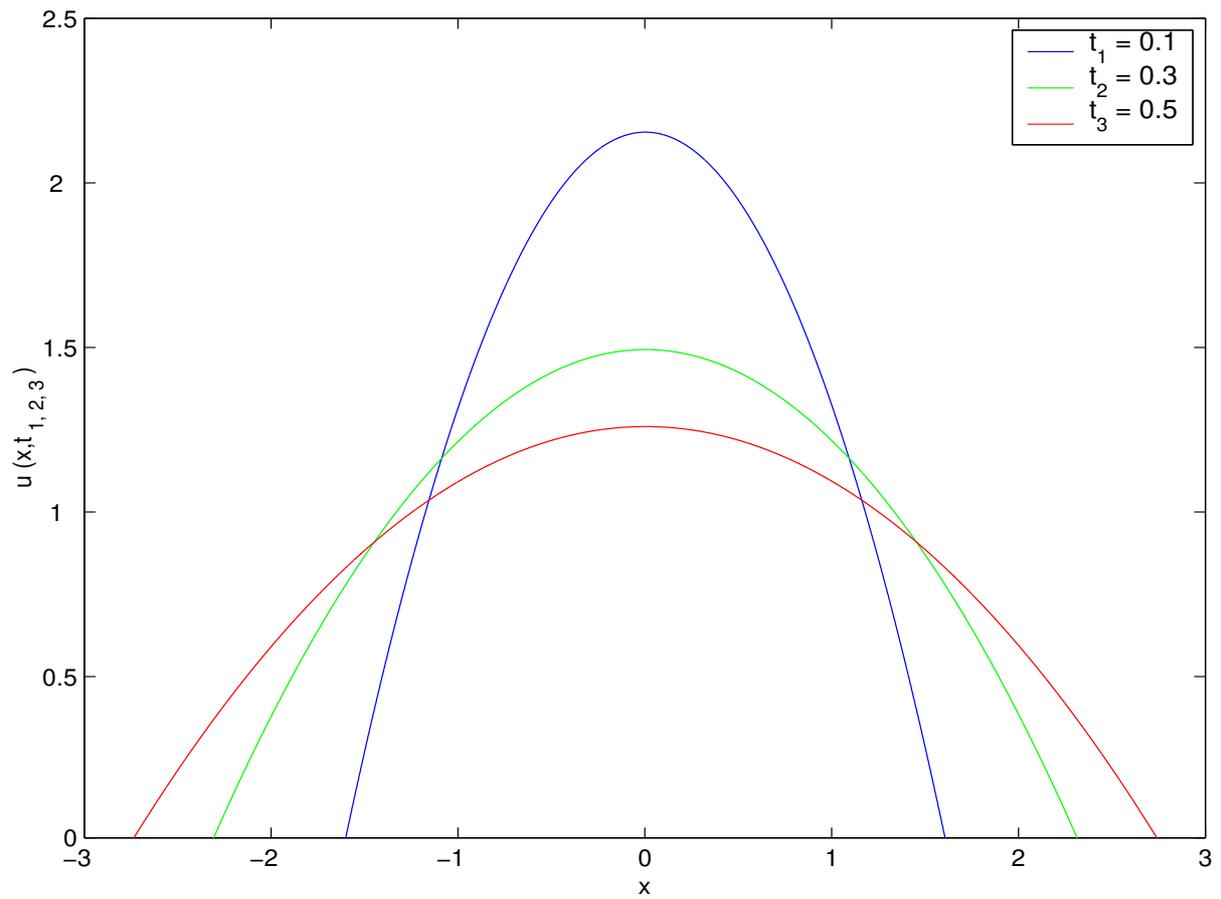
Filtered - **anisotropic nonlinear diffusion**, automatic stopping time

Poröse Medium Gleichung

$$u_t = (u^2)_{xx}, \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t^+ \text{ mit } m = 2$$

Fundamentallösung:

$$u(x, t) = t^{-\frac{1}{3}} \left(C - \frac{1}{12} \frac{x^2}{t^{\frac{2}{3}}} \right)_+, \text{ hier für } C = 1$$



(In-)Stabilität von stehenden Wellen

fokussierende nichtlin. Schrödinger Gleichung:

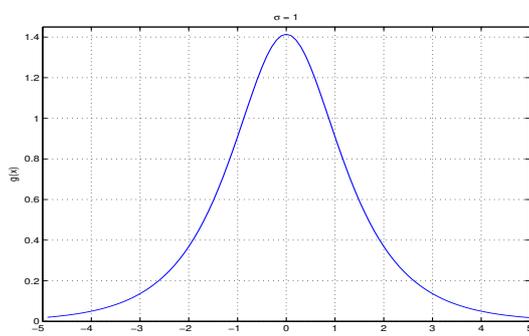
$$iu_t + u_{xx} + |u|^{2\sigma}u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}$$

stehende Wellen:

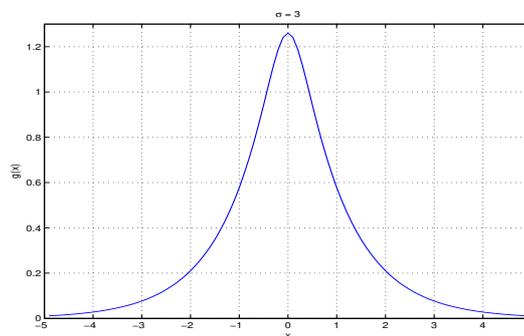
$$u(x, t) = e^{i\lambda^2 t} g(x), \quad g(x) = \frac{[\lambda^2(\sigma + 1)]^{\frac{1}{2\sigma}}}{\cosh^{\frac{1}{\sigma}}(\lambda\sigma x)}$$

stabil für $\sigma = 1 < 2$ (alles für $\lambda = 1$):

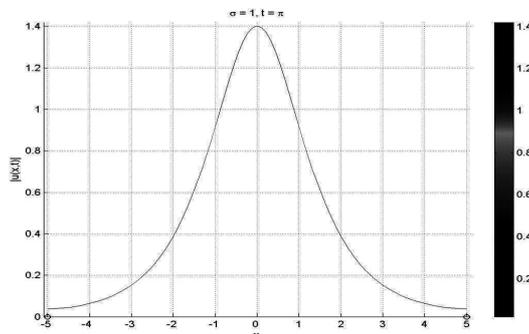
instabil für $\sigma = 3 > 2$:



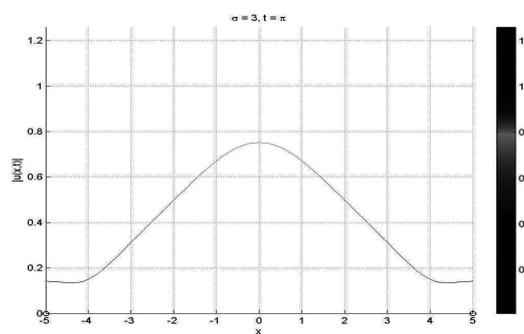
(exakte) Anfangsbedingung



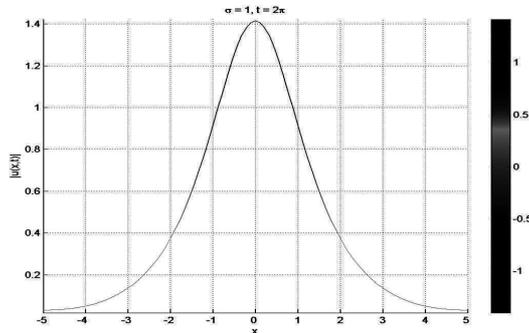
(exakte) Anfangsbedingung



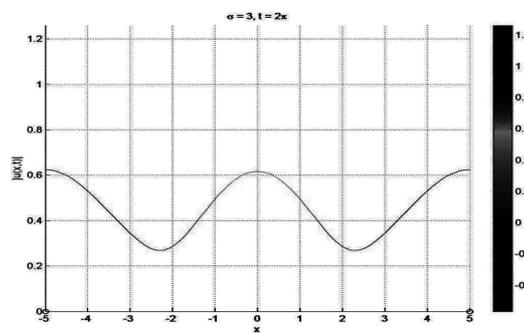
numerische Lösung bei $t = \pi$



(„falsche“) numerische Lösung bei $t = \pi$

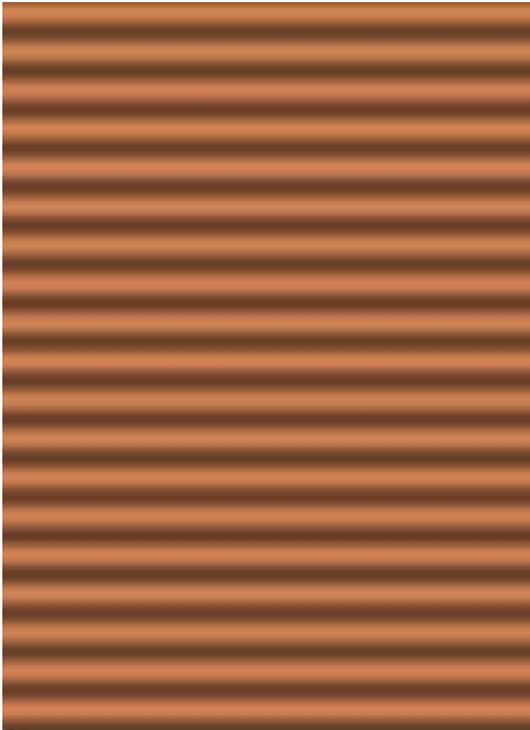


numerische Lösung bei $t = 2\pi$

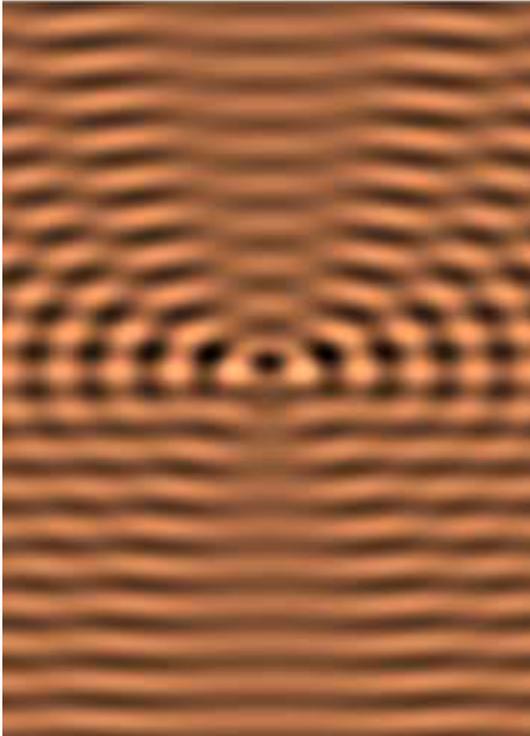


(„falsche“) numerische Lösung bei $t = 2\pi$

Streuung in der stationären Wellengleichung



oben:
Realteil einer ebenen Wellen,
aufwärts wandernd



unten:
ebene Welle, an einer Scheibe mit
anderem Brechungsindex gestreut