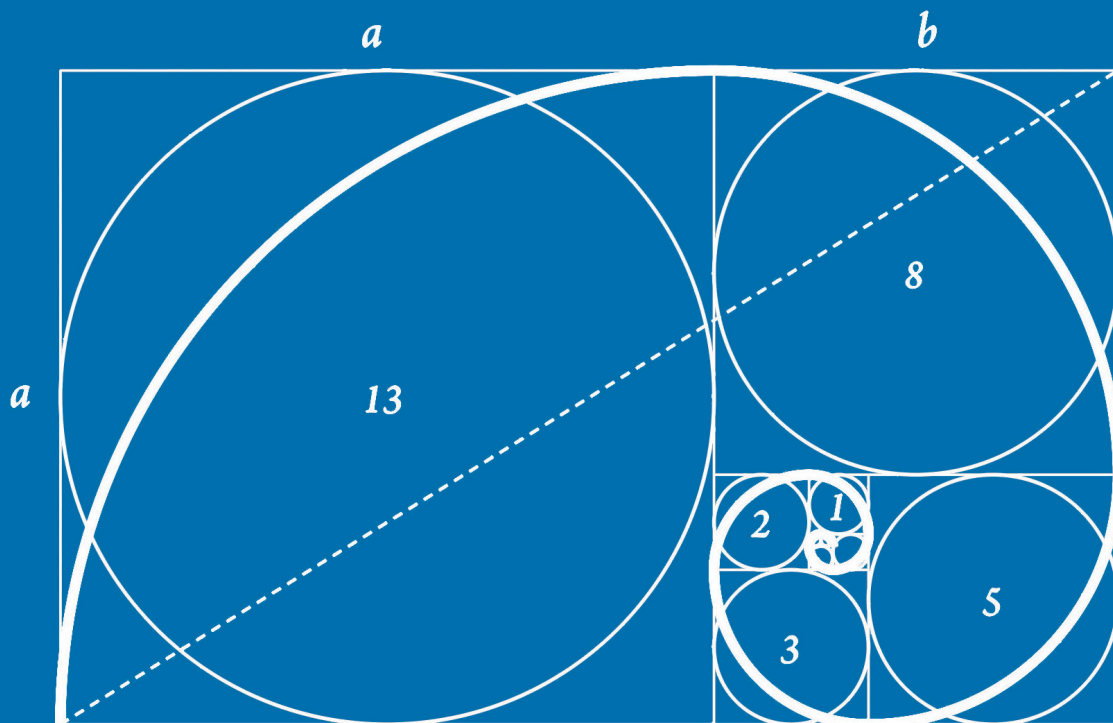


Mathematik



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \approx 1.618$$

TUWIEN.FOUNDATION

IMPROVING THE FUTURE

Die Welt braucht herausragende
Lösungen. Freie Forschung ist der
Grundstein dafür. Gemeinsam
können wir das möglich machen.



TU WIEN
FOUNDATION

Editorial

Alles Mathematik!

Unendlich scheint bei der Mathematik der Raum zwischen Image und Realität zu sein. Auf der einen Seite steht der Ruf des schulischen „Problemfachs“, auf der anderen die unwiderlegbare Tatsache, dass eine der ältesten Wissenschaften der Welt seit jeher einen maßgeblichen Beitrag zur Entwicklung der Menschheit leistet. Zusammenzuführen, was so auseinanderklafft, ist eine lohnenswerte Aufgabe – um das Schreckgespenst zu vertreiben und der Mathematik das Interesse zukommen zu lassen, das ihr gebührt. Der Weg führt über Antworten auf eine Frage, die so manchen seit der Zeit des ersten Wurzelziehens wie die Angst vor dem Zahnarzt verfolgt: „Wozu brauchen wir das eigentlich?“

Diese Antworten gibt seit Juni 2018 unser TUForMath – Forum Mathematik. Ziel ist es, das Verborgene offensichtlich zu machen und den Zusammenhang der Mathematik mit der modernen Gesellschaft in ebenso verständlicher wie spannender Weise für eine breite Öffentlichkeit darzustellen. In diesem Magazin finden Sie die Antworten, die Mathematiker_innen der TU Wien tagaus, tagein mit ihrer Forschung geben. Auf deren Erkenntnisse sind wir angewiesen, um prachtvolle Häuser zu bauen, Computer leistungsfähig zu machen, den Klimawandel im Zaum zu halten, demografische und wirtschaftliche Entwicklungen in Einklang zu bringen, das Risiko bei Finanzgeschäften zu minimieren, Satelliten und Raketen in den Weltraum zu schießen und nicht zuletzt, um das unendliche Wunder der Natur zu verstehen. Übrigens: Unendlichkeiten gibt es acht an der Zahl, wie TU-Mathematiker_innen 2019 bewiesen haben. Auch darüber wird in diesem Magazin berichtet.

In diesem Sinne...

...wünsche ich Ihnen viel Vergnügen bei der Lektüre,
Ihre Sabine Seidler, Rektorin der TU Wien



Inhalt

- 04 TUForMath**
Offene Türen, populäre Vermittlung
- 08 Die Mathematik der Mondlandung**
Live aus dem TUForMath-Hörsaal
- 10 Unendlich ungleich unendlich**
Acht mal unterschiedlich endlos
- 14 Präzise auf den Punkt gebracht**
Entscheidende Momente der Dynamik
- 16 Kalkül, um nicht arm zu werden**
Risikomanagement mit Finanzmathematik
- 18 Königliche Lösungen**
Zeitlose Kunstwerke der Geometrie
- 22 Epochale Wirkung**
Bedeutende Mathematiker der Historie
- 24 Die Vermessung der Welt**
Von der Bewertung geometrischer Objekte
- 26 Statistik im Dienste der Kunst**
Legitamy: Ein Start-up behält recht
- 28 Wenn Zahlen zu Tönen werden**
Mathematik trifft Musik
- 32 Konstrukt oder Natur?**
Mysteriöse Verbindungen
- 34 Demografie & Wirtschaft**
Lehrreiche Verknüpfungen
- 38 Menschen & Maschinen**
Visionen der digitalen Zukunft
- 40 Computer lösen Gleichungen**
Klein gemacht, um sich anzunähern
- 44 Wissen in Formvollendung**
Fundamente für spektakuläre Architektur
- 48 Formeln, die Geschichte schrieben**
Vier Gleichungen für die Ewigkeit
- 50 Gastkommentar**
Rudolf Taschners bunte Mathematikwelt

Impressum:

Medieninhaber und Herausgeberin: Technische Universität Wien, Karlsplatz 13, 1040 Wien;
O. Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Dr.-Ing. h.c. Sabine Seidler, Rektorin
Produktion: „Die Presse“ Verlags-GmbH & Co KG, Hainburger Straße 33, 1030 Wien;
Geschäftsführung: Mag. Herwig Langanger, Rainer Nowak
Umsetzung: „Die Presse“-Spezialredaktion, Mag. Astrid Müller, Mag. Michael Kötritsch, M.A.
Koordination und Redaktion: Christian Lenoble, christian.lenoble@diepresse.com
Coverfoto: Gettyimages **Illustrationen:** Claudia Meitert
Chefredaktion TU Wien: Bettina Neunteufl, MAS, bettina.neunteufl@tuwien.ac.at
Verkauf: Dipl.-Ing. Michael Kaiser, campuswerbung@tuwien.ac.at, +43/(0)1/588 01 40 68 02
Art Direction: Matthias Eberhart; **Grafik/Produktion:** Thomas Kiener, Christian Stutzig, Alexander Schindler
Druck: DruckStyria GmbH & Co KG; Styriastraße 20, 8042 Graz

Die Freude an der Mathematik

Von „Oje, in Mathematik war ich schon immer schlecht“ bis „Ja, Mathe hat mir schon immer Spaß gemacht“ ist es ein weiter Weg. Welche Schritte zum Sinneswandel führen könnten, erläutert Michael Drmota, Leiter des 2018 gegründeten TUForMath – Forum Mathematik.

Wann und warum reifte die Idee für die Gründung des TUForMath?

Die Idee kam meinen Kollegen Florian Aigner, Alexia Fürnkranz-Prskawetz, Dirk Praetorius, Reinhard Winkler und mir vor knapp zwei Jahren, als bekannt wurde, dass das math.space von Professor Rudolf Taschner nach 15-jähriger erfolgreicher Tätigkeit nicht mehr weitergeführt werden konnte. Das math.space hat meiner Ansicht nach außerordentlich viel bewegt. Mathematik wird heute deutlich positiver wahrgenommen, als das vor etwa 20 Jahren der Fall gewesen ist – obwohl hier sicher noch viel zu tun ist. Erwähnenswert ist, dass zusätzlich zu den sehr öffentlichwirksamen Vorträgen von Professor Taschner mehrere Generationen von Schüler_innen das Schulprogramm des math.space besucht und davon profitiert haben. Neben dem Initiator waren übrigens einige weitere TU-Mathematiker_innen, vor allem Alexander Mehlmann, Reinhard Winkler und auch ich in den letzten Jahren, am math.space engagiert. Es war daher naheliegend, dass sich die TU Wien hier weiterhin einbringt. Frau Rektorin Sabine Seidler hat dies nicht nur mitangeregt, sondern von Anfang an großzügig unterstützt und gemeinsam mit dem Ministerium die Finanzierung sichergestellt, ohne die wir das TUForMath nicht in dieser Form gestalten könnten.

Welche Visionen und Ziele stehen im Vordergrund?

Mit TUForMath möchten wir die Erfolgsgeschichte von math.space weiterschreiben, wobei wir den Fokus thematisch und persönlich etwas breiter anlegen, allerdings auch auf den erfolgreichen Formaten des math.space aufbauen können, wie etwa dem Schulprogramm. Unsere Vision ist, dass Mathematik mit all ihren Aspekten und Anwendungen in der Gesellschaft offener

und differenzierter wahrgenommen und diskutiert wird. Wir glauben, dass dies nicht nur eine Bereicherung unserer Wissensgesellschaft sein kann, sondern sich nachhaltig auf die Kritikfähigkeit und natürlich auf die technisch-naturwissenschaftlichen Kompetenzen der kommenden Generationen auswirken wird.

Warum wurde TUForMath als offenes Forum konzipiert?

Es war uns von Anfang an klar, dass es ein offenes Forum sein sollte. Das entspricht auch dem Wesen der Mathematik als Allgemeingut und Grundlagenwissenschaft. Es geht nicht primär um die TU Wien, sondern darum, Mathematik und deren Bezüge zu Technik und Naturwissenschaften, Gesellschaft und Wirtschaft sowie zu Kunst und Kultur breit und öffentlich darzustellen. Unser Ansatz war, dass sich dies auch im Vortragsangebot widerspiegeln soll. Tatsächlich kommt etwa die Hälfte der Vorträge von TU-Wissenschaftler_innen und die andere Hälfte von Expert_innen anderer Universitäten. Den Eröffnungsvortrag im Juni 2018 hielt beispielsweise Karl Sigmund von der Universität Wien, der Festvortrag zum ersten Jahrestag kam wiederum von Rudolf Taschner von der TU Wien. - - - - - ➔

„Mathematik soll mit all ihren Aspekten und Anwendungen in der Gesellschaft offener und differenzierter wahrgenommen und diskutiert werden.“

Michael Drmota





MICHAEL DRMOTA

Studium der Technischen Mathematik (1982-1986), Promotion (1986), Habilitation (1990), Außerordentlicher Professor (1997-2006), Professor für Diskrete Mathematik am Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie der TU Wien (seit 2006), korrespondierendes Mitglied der Österreichischen Akademie der Wissenschaften (seit 2013), Dekan der Fakultät für Mathematik und Geoinformation (seit 2013). Im TUForMath zuständig für Leitung und Gesamtkoordination.

--- ➔ Nach welchen Kriterien wird bei Vorträgen und Vorlesungen über die Themenwahl entschieden?

Wir haben drei Themenbereiche vorgegeben: Technik & Naturwissenschaften, Gesellschaft & Wirtschaft sowie Kunst & Kultur. In all diese Bereiche spielt Mathematik hinein und das soll in unserem Vortragsangebot zum Ausdruck kommen. Wir setzen uns regelmäßig zusammen und besprechen das künftige Programm. Wichtig ist uns, einen guten Mix an Themen zu finden, die wir als interessant und zugleich bildend einstufen. Manchmal nehmen wir dabei auch Bezug auf die Aktualität bzw. Jubiläen, wie zum Beispiel beim Vortrag zur Mathematik der Mondlandung anlässlich des 50. Jahrestags. Zudem nutzen wir die Gelegenheit, alle zwei Wochen Menschen vor den Vorhang zu holen. Allein die TU Wien hütet ja einen großen Schatz an interessanten Themen und Vortragenden.

Sie haben die Bedeutung des Schulprogramms angesprochen. Was wird konkret angeboten?

Wir bieten nahezu täglich zwei Workshops für unsere Kernzielgruppe, die Schulstufen 5 bis 8 mit Schüler_innen im Regelalter von 10 bis 13, an. Die Themen für die vier verschiedenen Workshops sind so gewählt worden, dass Abwechslung zum üblichen Schulstoff garantiert ist. Ich denke, das geht schon aus den Überschriften hervor: „Graphen – Ein Weg, um Wege zu finden“ (5. Schulstufe), „Parallaxenmethode – Wie weit ist es zu den Sternen?“ (6. Schulstufe), „Codierung – Aufspüren verlorener Information“ (7. Schulstufe) und „Spieltheorie – alles ‚nur‘ ein Spiel?“ (8. Schulstufe). Darüber hinaus

Faszination Mathematik

Eine Welt voller unerwarteter Zusammenhänge, zum Miterobern und Mitgestalten

„Mathematik hat unglaublich viele faszinierende Facetten, die sich einem meist nicht direkt erschließen, sondern ein genaues Hinsehen erfordern und oft unerwartete Zusammenhänge oder überraschende Ideen offenbaren. Man denke zum Beispiel an den Satz von Pythagoras oder an die Unendlichkeit der Primzahlen.

Es ist erstaunlich, welche Ideenwelten allein entwickelt worden sind, um den Großen Fermatschen Satz schließlich beweisen zu können. Ähnlich war es beim Vierfarbensatz oder bei der Poincaréschen Vermutung.

Die Triebfeder, sich mit Mathematik zu beschäftigen, ist oft ein ungelöstes mathematisches Problem, das einen einfach fesselt. Es ist eine wirklich große Befriedigung, wenn man eine Lösung, oder auch nur eine Teillösung, findet. Auf dem Weg dahin erschließt sich aber oft eine neue Welt, die einen viel weiter führt, als das ursprüngliche mathematische Problem erwarten hätte lassen. Hinter den oft vordergründigen Fragen stehen tiefe strukturelle Zusammenhänge. Das macht die Beschäftigung mit Mathematik so spannend. Und tatsächlich kann man diese Welt ein wenig miterobern und mitgestalten.“

**„Das Schulprogramm liegt uns ganz besonders am Herzen.
Wir wollen die nächste Generation erreichen und Kindern
und Jugendlichen Lust auf mehr machen.“**

Michael Drmota

laufen für die 9. und 10. Schulstufe das Programm „MatheMagie“ und ab der 11. Schulstufe „TUForMath im mumok“, in Kooperation mit dem Museum Moderner Kunst im Museumsquartier. All unsere Angebote können von Schulklassen kostenfrei gebucht werden.

Was erhoffen Sie sich an den Schulen?

Das Schulprogramm liegt uns ganz besonders am Herzen, da wir hier die nächste Generation erreichen können. Es geht uns darum, das übliche Schulprogramm altersgemäß zu ergänzen und den Kindern und Jugendlichen Lust auf mehr zu machen. In all unseren Workshopthematiken steckt Mathematik in einer für die Schule ungewohnten Form und es lassen sich daraus wichtige Denkkonzepte der Mathematik entfalten. Die Workshops werden von Studienassistent_innen (Valentina Einspieler, Robert Freiman, Natalie Haumer, Johannes Jirek, Dennis Leser, Andreas Nessmann, Manuela Raidl, Felix Schiffer und Clemens Schindler) mit Enthusiasmus durchgeführt. Sie sind auch bei der Entwicklung der Workshops federführend beteiligt. Wir sind übrigens selbst überrascht, wie gut diese Schulprogramme angenommen werden. So sind wir für dieses Semester praktisch ausgebucht – und das bei acht bis zehn Workshops pro Woche. Das Feedback ist jedenfalls sehr ermutigend und gibt uns auch viele Anregungen, unser Programm zu verbessern und weiterzuentwickeln.

Wie definieren Sie Erfolg beim Projekt TUForMath?

Der Erfolg von einer Unternehmung wie TUForMath ist objektiv schwer zu messen. Was wir bis jetzt beobachten können, ist eine sehr große Nachfrage nach

unserem Angebot – was wir gern als Erfolg verbuchen. Die Nachfrage lässt sich freilich auf zwei Arten interpretieren: Entweder ist das Interesse oder der Nachholbedarf für mathematische Themen sehr hoch. Die Wahrheit liegt wahrscheinlich in der Mitte. Sicher ist, dass die Aufbauarbeit von anderen bereits Früchte getragen hat. Das gilt nicht nur für math.space von Rudolf Taschner, sondern für alle Initiativen, die sich der Popularisierung wissenschaftlicher oder mathematischer Themen annehmen. Beispiele sind das Young-Science-Zentrum der OeAD (Österreichische Agentur für internationale Mobilität und Kooperation in Bildung, Wissenschaft und Forschung) oder das Projekt „Mathematik macht Freu(n)de“, das von Michael Eichmair von der Universität Wien ins Leben gerufen worden ist. Mit TUForMath knüpfen wir an und gehen mit unseren Ideen den Weg weiter – sicherlich aber auch in eine TU-inherente Richtung.

Wenn Sie sich etwas wünschen dürfen...

... wäre das eine grundsätzlich neue Haltung, Einstellung und Wahrnehmung in Bezug auf Mathematik. Outet man sich in einem Gespräch als Mathematiker_in, bekommt man leider allzu oft zu hören: „Oje, in Mathematik war ich immer schlecht.“ Wirklich schön wäre es, wenn die typische Reaktion in Zukunft mehr in die Richtung geht: „Ja, Mathematik hat mir immer Spaß gemacht.“ Aber so weit sind wir noch nicht, es bleibt für uns also noch genug zu tun. ●

Nähere Informationen und Aktuelles zum Forum unter:
www.tuformath.at

Die Mathematik der Mondlandung

Beim ersten TUForMath-Vortrag des Semesters blieb im Freihaus der TU Wien kaum ein Platz im Hörsaal frei. TU-Professor Michael Feischl fesselte sein Publikum mit Anekdotischem und Mathematischem zur ersten Mondlandung.



Die fünf Raketentriebwerke der Saturn V, dem leistungsstärksten Trägersystem der Raumfahrt, das jemals gebaut wurde.

Der Hörsaal FH 8 im Freihaus der TU Wien ist prall gefüllt. Knapp 200 Menschen sind gekommen, in der Mehrzahl Studierende, aber auch zwei Schulklassen und gut zwei Dutzend Damen und Herren älteren Semesters. „Die Mathematik der Mondlandung“ steht am Bildschirm in der Mitte des Podiums geschrieben, links oben prangt eine Zeichnung vom pythagoreischen Lehrsatz, daneben das Logo TUForMath. Das vor rund eineinhalb Jahren ins Leben gerufene Forum hat zu seinem ersten Vortrag in diesem Semester geladen. Der Eintritt ist gratis und steht allen Interessierten offen. Kurz vor 18 Uhr suchen die letzten Zuhörer_innen ihre Plätze, dann geht es pünktlich los, ganz ohne akademische Viertelstunde.

Leumund mit Potenzial

Dirk Praetorius, TU-Professor am Institut für Analysis und Scientific Computing und Mitgründer von TUForMath, nützt die Gelegenheit, um kurz und launig die Idee des Forums zu präsentieren: „Wenn man auf einer Party gefragt wird, was man studiert, und Mathematik antwortet, ist das Gespräch meistens auch schon wieder zu Ende. Ich denke, der Leumund der Mathematik hat Verbesserungspotenzial. Und das wollen wir heben. Zum Beispiel heute und hier.“ Dass Mathematik viel mehr als nur eine Rechenübung ist und selbst Laien in ihren Bann ziehen kann, soll nun Michael Feischl mit seinem Vortrag unter Beweis stellen.

Der 31-jährige TU-Professor für Scientific Computing mit Forschungsschwerpunkt numerische Simulation hat nach seiner Promotion an der TU Wien einen steilen Karriereweg genommen und war 2018 laut dem Portal mathcitations.github.io weltweit die Nummer eins der meistzitierten Mathematiker_innen seines Promotionsjahrgangs. Seinem Publikum wird er heute von einer herausragenden ingenieurwissenschaftlichen Leistung erzählen, der Mondlandung, und davon, wie die Mathematik den Mensch zum Mond gebracht hat: „Im Vorfeld des Unternehmens mussten Antworten auf grundsätzliche Fragen gefunden werden. Wie groß soll eine Mondrakete sein? Was ist der schnellste Weg zum Mond? Und wie kommt man wieder zurück auf die Erde? Bei all diesen Fragen hat die Mathematik dazu beigetragen, die richtigen Lösungen zu finden.“

Atombomben als Antrieb?

Im Lauf der folgenden 60 Minuten erfährt das Publikum Details zum Unterfangen Mondlandung, die es vermutlich so noch nicht gekannt hat. Darunter auch jede Menge Anekdotisches, etwa über die Mondflugrakete Saturn V, die sich ob ihres enormen Gewichts von mehreren Millionen Kilogramm so träge erhob, dass die Astronauten ihren Start Richtung Mond zunächst gar nicht bemerkt hatten. Amüsant ist die Geschichte, dass beim Bau der zweiten Raketenstufe in Kalifornien Surfer hinzugezogen worden sind, als es darum gegangen ist, eine Lösung für die Isolierung der Treibstofftanks zu finden. Sie waren Experten auf diesem Gebiet, da sie ihre Surfbretter genau mit dem Material herstellten, das für die Isolierung gefragt war. „Die Zusammenarbeit funktionierte gut. Außer an den Tagen mit guten Wellen an den kalifornischen Küsten“, so Feischl mit einem Augenzwinkern.

Geradezu Unglaubliches erzählt er später von den damaligen Überlegungen zu den größtmöglichen Ausstoßgeschwindigkeiten. So wurde lange Zeit ernsthaft in Erwä-

gung gezogen, den Antrieb der Rakete mit Atombomben zu bewerkstelligen. Der Plan sah vor, für den Start 800 Atombomben im Sekundentakt zu zünden. Tests mit konventionellen Bomben wurden tatsächlich durchgeführt. Die Atompläne durchkreuzte schließlich der 1963 von den USA, Großbritannien und der Sowjetunion unterzeichnete Atomteststoppvertrag (LTBT), der atomare Testexplosionen in der Atmosphäre, dem Welt- raum und unter Wasser verbot. Die Entscheidung für chemische Treibstoffe bekam den Vorzug.

Fünf Prozent Überlebenschance

Wiederholt erläutert Michael Feischl auf anschauliche und verständliche Weise, teilweise mit simplen Gleichungen, welche Rolle der Mathematik (und mathematischen Gedanken zu Problemen der Physik) beim Unternehmen Mondlandung zugekommen ist. Zum Beispiel bei der Frage nach der maximal erreichbaren Geschwindigkeit der Rakete (Stichwort Raketengrundgleichung), den Computerberechnungen zur aktiven Stabilisierung der 110 Meter hohen und nur 10 Meter breiten Saturn V (Inverses Pendel) oder den Berech-

Fünf Prozent: So hoch haben Mathematiker des Apollo-Programms die Wahrscheinlichkeit beziffert, dass die Astronauten lebend zur Erde zurückkehren.

nungen zur Flugbahn mit Differentialgleichungen (numerische Annäherung, Zeitschrittmethode). Auch der Einsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Binomialverteilung) wird thematisiert. „Berechnet worden ist, wie wahrscheinlich es ist, dass es bei all den Unsicherheiten von Systemen gelingt, die Astronauten auf den Mond und wieder lebend zurück zur Erde zu bringen. Das Ergebnis war ernüchternd: 5 Prozent“, so Feischl. Nicht minder interessant war die Reaktion der Verantwortlichen. Anstatt die Systeme einer Prüfung zu unterziehen, wurde das Risk Assessment eingestellt. Neil Armstrong und seine Kollegen haben es im Juli 1969 dennoch hin- und zurückgeschafft. ●

zukunft.
gemeinsam.
gestalten.

Starten Sie Ihre Karriere in einem der Unternehmen der Wiener Stadtwerke.

Ihre Bewerbung – unsere gemeinsame Chance.
www.wienerstadtwerke.at/karriere
Wir freuen uns auf Sie!

Warum unendlich nicht gleich unendlich ist

Während manch Sterbliche_r an der Endlichkeit des Lebens grübelt, erforschen Mathematiker_innen fasziniert die Unendlichkeiten von Zahlenmengen. An vorderster Front stehen zwei TU-Mathematiker, die 2019 ein altes Rätsel gelöst haben.



Unendlich ist, was kein Ende oder keine Grenze hat. Was so einfach definierbar scheint, darüber lässt sich in Wahrheit trefflich streiten, vor allem in der Mathematik. Es ist möglicherweise eine Frage der Betrachtung, wie ein Denkkrätsel zeigt. Man stelle sich eine Pflanze in einem zwei Meter hohen Raum vor. Sie wächst an ihrem ersten Tag 100 cm, am zweiten 50, am dritten 25 usw. Sie wächst also jeden Tag, und zwar immer halb so viel wie am Vortag. Nach drei Tagen ist sie 175 cm hoch. Wann wird sie die Decke des zwei Meter hohen Raums berühren? Die Antwort lautet: Nie. Das ist schwer zu fassen, solange man sich auf das unendlich währende Wachstum fokussiert. Man ist geneigt, zu denken: Was jeden Tag größer wird, kann keine Beschränkung nach oben haben. Irgendwann wird doch... Um Verständnis für die Höhengrenze trotz unendlichen Wachstums zu entwickeln, braucht es einen Perspektivenwechsel. Es gilt, einen abstrakten Blick von der zwei Meter hohen Decke nach unten zu werfen und in „Abständen“ zu argumentieren. Nach einem Tag ist der Abstand der Pflanze zum Plafond noch 100 Zentimeter, nach zwei Tagen 50 und nach drei 25 hoch. Der Abstand halbiert sich zwar täglich, aber es bleibt eben immer ein (halber) Abstand bestehen. Schließlich ist ja auch die Hälfte einer Länge eine Länge – und diese Hälfte in Richtung Decke wird immer „fehlen“. Mathematikschüler_innen erinnern sich bei unendlichen Annäherungen an einen Grenzwert, Stichwort Limes.

Die Lehre der Mächtigkeit

Komplexer wird das Thema, wenn man Mengen von unendlich vielen Zahlen betrachtet und sie in ihrer Unendlichkeit miteinander vergleichen will. Eine beispielhafte Frage dazu: Was ist größer – die Menge der natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ oder die Menge der positiven geraden Zahlen $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$? Argumentiert man damit, dass nur jede zweite Zahl aus der Menge der natürlichen Zahlen gerade ist, liegt die „logische“ Conclusio nahe, dass diese Menge auch nur halb so groß sein kann. Nachdem es aber auch unendlich viele gerade Zahlen gibt, müssen die beiden Unendlichkeiten unterschiedlich groß sein. Scheinbar

„Eine zentrale Aufgabe der Mengenlehre ist es, das Unendliche mit mathematischen Mitteln zu erforschen.“

Martin Goldstern

paradox – und laut dem deutschen Mathematiker Georg Cantor (1845–1918) auch falsch.

In die Geschichtsbücher ist Cantor als Begründer der Mengenlehre eingegangen, und als jener Mann, der den Begriff der Unendlichkeit verändert hat. Zur Mengenlehre ist er durch die Betrachtung eindeutiger Zuordnungen der Elemente von unendlichen Mengen gekommen, etwa am Beispiel von natürlichen und positiven geraden Zahlen: Die erste gerade Zahl ist die 2, die zweite gerade Zahl ist die 4 usw. Somit lässt sich jeder natürlichen Zahl $(1, 2, \dots)$ eindeutig eine gerade Zahl $(2, 4, \dots)$ zuordnen. Jede Zahl hat genau einen Partner aus der anderen Menge. Cantors Schlussfolgerung: Beide Mengen sind gleich groß. Mengen, für die eine solche Beziehung hergestellt werden kann, hat er als äquivalent oder „von gleicher Mächtigkeit“ bezeichnet. Heute spricht man bei „Mächtigkeit“ auch von „Kardinalität“. Kardinalzahlen dienen dazu, die Größen von Mengen zu vergleichen. 150 Jahre nach Cantor bilden sie nach wie vor einen wichtigen Untersuchungsgegenstand. Der Aufgabe der Mengenlehre, das Unendliche mit mathematischen Mitteln zu erforschen, hat sich auch der TU-Mathematiker Martin Goldstern verschrieben.

Mit endlichen Mitteln

Goldsterns Interesse für die Mengenlehre und insbesondere für unendliche Kardinalzahlen begann mit seinem Doktoratsstudium an der kalifornischen Universität Berkeley. Was ihn seither daran fasziniert, erklärt er wie folgt: „In der Mathematik - - - - ➔

„Wie ein Maler, der ein Bild malt, weil er es ,muss', nicht weil er es verkaufen will.“

Martin Goldstern

MARTIN GOLDSTERN

Studium Mathematik und Computerwissenschaft an der TU Wien, Doktorat (1986), Ph.D. an der University of California, Berkeley, USA, (1991), Habilitation an der TU Wien (1993), beschäftigt an der TU (seit 1993), aktuell Leiter des Forschungsbereichs Algebra am Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie.



Faszination Mathematik

Für immer wahr und universell verständlich

„Es begeistert mich, dass es einerseits ganz präzise Regeln und Konzepte (Definitionen, Beweise) gibt, und andererseits – das ist für Außenstehende wohl unsichtbar –, dass man enorme Freiheiten hat. Ungemein spannend ist es auch, dass man immer wieder Fragen ohne jeden Zweifel beantworten kann, die anfänglich schwierig oder unlösbar scheinen. Es fasziniert mich außerdem, dass Ergebnisse – das sind bewiesene Sätze – Ewigkeitscharakter haben. Sie bleiben für immer wahr, und sind universell verständlich. Man kann zur Wahrheit eines bewiesenen Satzes keine politische Meinung haben. Wenn der Beweis korrekt geführt worden ist, dann ist er wahr. Und anders als in der Physik gelten unsere Sätze nicht nur in unserem konkreten Universum, sondern in jedem vorstellbaren Universum.“

----- ➔ arbeiten wir ja mit endlichen Mitteln. Dennoch gelingt es uns, Tatsachen über unendliche Objekte zweifelsfrei zu beweisen. Wir betrachten mehr oder weniger komplizierte Ausdrücke, Gleichungen, Formeln, Definitionen, Sätze und Beweise, die aber alle mit endlich vielen Buchstaben präzise beschrieben werden können.“ Dieser Punkt trifft im Grunde auf die meisten Gebiete der Mathematik zu. Nur wenige Fachbereiche – wie insbesondere die Kombinatorik, die Graphentheorie oder ein Teil der Gruppentheorie – konzentrieren sich hauptsächlich auf die Untersuchung endlicher Objekte. Mehrheitlich geht es um unendliche Objekte. Das Besondere an der Mengenlehre ist, dass die betrachteten Unendlichkeiten per se im Fokus der Überlegungen stehen. Das Besondere an Martin Goldstern ist wiederum, dass er gemeinsam mit zwei Kollegen (Jakob Kellner von der TU Wien und Saharon Shelah von der Universität Jerusalem) einem jahrzehntelang ungelösten Rätsel der Theorie der Unendlichkeiten auf die Spur gekommen ist.

Die acht Unendlichkeiten

Vorab ein Schritt zurück zu Cantor. 1874 ist ihm der schlüssige Beweis gelungen, dass die Menge der reellen Zahlen (dazu gehören alle Zahlen, die auf der Zahlengerade liegen) eine größere Kardinalität hat als jene der natürlichen Zahlen. Schließlich liegen z. B. zwischen 1 und 2 unendlich viele reelle Zahlen und es ist unmöglich, jeder dieser reellen Zahl eine natürliche zuzuweisen. Fortan ist logisch gesichert gewesen: Es gibt mindestens zwei unterschiedlich große Unendlichkeitsbegriffe. Die Frage, ob es weitere Mengen gibt, die „weniger“ Elemente (=kleinere Kardinalität) enthalten als die reellen Zahlen, aber „mehr“ als die natürlichen, hat Cantor vier Jahre später mit einem Nein in der berühmt gewordenen Kontinuumshypothese beantwortet. Einen Beweis dafür blieb er allerdings schuldig. Die Verifizierung oder Falsifizierung seiner Hypothese wurde zu einem der bedeutendsten mathematischen

Probleme. In den folgenden Jahrzehnten sollte gezeigt werden, dass es unendlich viele Kardinalitäten im betrachteten Intervall gibt. Zehn dieser Kardinalzahlen wurden in den 1980er-Jahren definiert. Mit ihnen haben sich die drei Mathematiker Goldstern, Kellner und Shelah beschäftigt und bewiesen, dass sich zumindest acht der zehn bekannten Unendlichkeiten in ihrer „Größe“ unterscheiden: „Wir konnten somit ein ‚mengentheoretisches Universum‘ konstruieren, das der Beweisführung dient“, so Goldstern. Es ist die Lösung einer wissenschaftlichen Aufgabe, an der bislang die größten Mathematiker_innen der letzten Jahrzehnte gescheitert sind.

Absichtslos schön

Was die Erkenntnis der Menschheit bringt, kann nicht gesagt werden. Konkrete Anwendungen außerhalb der Mengenlehre sind selbst Goldstern nicht bekannt. Er sieht es gelassen: „Es gehört zur Tradition der Mathe-

matik, sich auch mit Fragen oder Themen zu beschäftigen, die keine oder noch keine Anwendungen haben.“ Was noch nicht ist, könne noch kommen. Am Beispiel von Kegelschnitten etwa, die schon den alten Griechen bekannt waren, lange bevor man sie dazu verwenden konnte, Planetenbahnen zu beschreiben. Auch zahlen-theoretische Konzepte wie Primzahlen waren in der Mathematik seit Euklid, oder noch früher, beliebte Forschungsthemen, die erst rund 2300 Jahre später plötzlich Anwendungen in der Kryptografie fanden. Martin Goldstern: „Ich stelle mir das wie bei einem Maler vor, der ein Bild malt, weil er es malen muss, weil es in ihm steckt, und nicht weil er es verkaufen will. Oder wie bei einem Bergsteiger, der auf einen Gipfel wandert oder klettert ‚because it’s there‘, und nicht weil er plant, eine Seilbahn zu bauen.“ Die Schönheit liegt dabei wohl im ureigentlichen Interesse für die Sache, gepaart mit der Unschuld der Absichtslosigkeit. ●



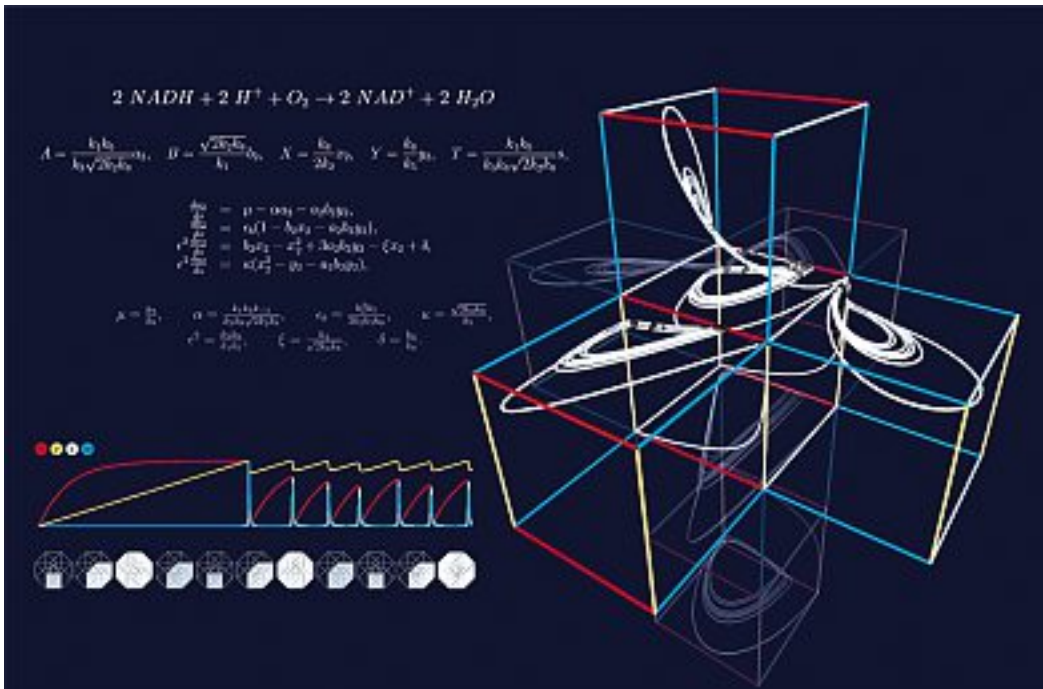
Together
we move

Vier starke Typen für Österreich



Bombardier und Together we move sind Marken der Bombardier Inc. oder ihrer Tochtergesellschaften.

Aus dem Bombardier-Werk in Wien-Donaustadt wurden bisher mehr als 1.600 *FLEXITY* 100% Niederflur-Straßenbahnen in die ganze Welt verkauft, und seit 2018 bereichern sie nun auch Wiens Straßenbild. 187 *TALENT* Züge bilden bereits das Rückgrat des österreichischen Nah- und Regionalverkehrs und werden weiterhin durch modernste *TALENT 3* Fahrzeuge von Bombardier ergänzt.



Geometrische Analyse und Visualisierung einer biochemischen Reaktion mit Mehrskalendynamik: Phasen mit langsamer Dynamik werden von schnellem sprunghaftem Verhalten unterbrochen.

Präzise auf den Punkt gebracht

Nur weil sich etwas lange Zeit gemächlich entwickelt, muss es nicht immer so weitergehen. Die Natur macht manchmal Sprünge. Verstehen und beschreiben lassen sich diese mithilfe der Mathematik.

Was heute fast wie ein stabiles Gleichgewicht aussieht, kann sich schon morgen dramatisch ändern und einem ganz anderen Gleichgewichtszustand entgegenstreben. Die Differentialgleichungen, die Peter Szmolyan vom Institut für Analysis und Scientific Computing an der TU Wien studiert, können solche merkwürdigen Verhaltensweisen beschreiben. Besonders interessiert sich Szmolyan für sogenannte Mehrskalprobleme: „Es gibt Systeme, in denen ganz unterschiedliche Zeitskalen eine Rolle spielen – eine schnelle Dynamik und eine langsame. In der Natur findet man das oft, zum Beispiel in der Reizleitung von Nerven.“ Bestimmt wird diese durch elektrische Effekte, die relativ schnell ablaufen, und durch chemi-

sche Prozesse, die deutlich langsamer sind. Auch chemische Reaktionen setzen sich in der Regel aus schnellen und langsamen Teilprozessen zusammen. „Wenn sich beides gegenseitig beeinflusst, treten plötzlich spannende neue Phänomene auf. Genau damit beschäftigen wir uns“, so Szmolyan.

Momente der Entscheidung

Interessantes Verhalten entsteht, wenn ein dynamisches System zwischen zwei qualitativ sehr unterschiedlichen Verhaltensweisen wechseln kann. „Aus der Theorie der Differentialgleichungen weiß man, dass in einem scheinbar kontinuierlich und regulär ablaufenden Vorgang plötzlich ein sehr schneller Übergang zu einem ganz anderen Systemverhalten

aufzutreten kann“, erklärt Szmolyan. Die Rede ist von sogenannten Tipping Points (anschaulich formuliert: Verzweigungen oder Weggabelungen), die zum Beispiel in der Klimaforschung eine Rolle spielen. So kann etwa ein steter langsamer Temperaturanstieg beim Überschreiten eines bestimmten Wertes zu einer Änderung der Dynamik führen, mit möglicherweise katastrophalen Konsequenzen.

Ähnliche Vorgänge lassen sich ebenfalls in der Biologie oder Wirtschaft beobachten. Eine Zelle muss etwa während der Zellteilung mehrmals eine „Entscheidung“ treffen, ob alles korrekt abläuft und der Vorgang fortgesetzt werden soll – oder ob der Vorgang wegen eines aufgetretenen Fehlers abgebrochen werden muss. Szmolyan: „Die Übersetzung von kontinuierlichen Größen – z. B. die Konzentrationen einiger wesentlicher Enzyme/Proteine – in eine digitale Ja-/Nein-Antwort an sogenannten Checkpoints ähnelt aus mathematischer Sicht den Tipping Points.“

„Aufgeblasene“ Probleme

In der Sprache der Mathematik nennt man solche schwierig zu analysierenden Ausnahmepunkte Singularitäten. „Für uns Mathematiker_innen sind diese Punkte ganz besonders spannend, weil in deren kleiner Umgebung ein wesentlicher Teil des Systemverhaltens beobachtbar ist“, erklärt Szmolyan. Sehen die Singularitäten zunächst wie unüberwindliche Hindernisse aus, helfen sie bei richtiger Betrachtung, das System zu verstehen. An der TU entwickelt der Forscher mit seinem Team Methoden, das Verhalten von Differentialgleichungen an singulären Punkten zu analysieren. Seine Herangehensweise hat viel mit Geometrie zu tun. „Ein gewöhnlicher Punkt hat definitionsgemäß keine innere Struktur. Innerhalb eines Punktes kann man also nicht von einer dynamischen Entwicklung sprechen. Bei Singularitäten gilt dies nicht unbedingt.“ Der „Trick“ besteht darin, den singulären Punkt „aufzublasen“. „Bei der Blow-up-Methode wird er auf eine Kugel abgebildet, auf der mathematische Details behandelbar sind, die vorher unsichtbar gewesen sind. Dieses Desingularisieren des Problems führt zur Lösung“, sagt Szmolyan, der sich als angewandter Mathematiker sieht. „Es ist mir wichtig, mich mit Fragen zu beschäftigen, die etwas mit der realen Welt zu tun haben. Man muss die relevanten Probleme betrachten, nicht die beliebigen.“ Dabei gilt es, nicht bloß bekannte Theorien oder Methoden auf aktuelle naturwissenschaftliche oder technische Probleme anzuwenden, sondern vor allem neue mathematische Herangehensweisen zu entwickeln: „Spannend ist immer das, was man gerade noch nicht kann.“ ●

PETER SZMOLYAN

Mathematikstudium an der TU Wien (Promotion 1987), Schrödinger-Stipendiat am Institute for Mathematics and its Applications der University of Minnesota, USA, Rückkehr an die TU Wien, Start-Preis des FWF (1996), Außerordentlicher Professor (ab 1998), Universitätsprofessor am Institut für Analysis und Scientific Computing (seit 2016).



Faszination Mathematik

Die Freude am Verstehen und die Lust am Visualisieren

„Die Teilnahme an der Mathematikolympiade im Gymnasium weckte mein Interesse an höherer Mathematik. Das Ungewöhnliche und Exklusive an diesem Fach war auch zum Teil der Anreiz für die Studienwahl. An einen konkreten Beruf dachte ich damals übrigens nicht, Professor an der TU Wien wurde ich eher durch eine glückliche Verkettung eigener Leistungen und günstiger Umstände. An meiner Arbeit fasziniert mich, wie man mit abstrakten mathematischen Konzepten reale Phänomene beschreiben und verstehen kann: Bewegung der Planeten um die Sonne, Ausbreitung von Wellen in verschiedenen Medien, Musterentstehung in chemischen und biologischen Systemen, Umschaltvorgänge und periodische Schwingungen in Netzwerken von Nervenzellen etc. Manche der Fragestellungen, an denen ich arbeite, sind klassische Themen der angewandten Mathematik, andere wiederum betreffen neu entstehende Modelle, z. B. aus der Molekularbiologie oder der Mikro- und Nanotechnologie.“

Der mathematische Arbeitsprozess selbst macht mir große Freude. Man steht vor einem Problem, vieles ist unklar, aber man hat eine Intuition. Man versucht sich an Lösungstechniken und kommt dann zu diesem wunderbaren Punkt, an dem plötzlich alle Puzzleteile zusammenpassen und sich Verständnis und Sinn erschließen. Oftmals geht es dabei weniger um Zahlen oder Rechnungen, sondern vor allem um Strukturen und Zusammenhänge. Wichtig sind mir persönlich bei alledem geometrische Aspekte und Visualisierungen. Ich denke lieber in Bildern und Diagrammen als in Formeln. Das ist auch für die dahinterstehenden Anwendungen in Physik, Chemie, Biologie etc. nützlich und attraktiv, nicht zuletzt, um die Resultate einem breiteren Publikum näherzubringen.“



Kalkulieren, um nicht arm zu werden

Komplexe Risikogeschäfte machen den Einsatz von Finanzmathematik notwendig. Gearbeitet wird mit Know-how, das von der Physik bis zur Künstlichen Intelligenz reicht.

Wenn man auf seinem Konto 0,5 Prozent Zinsen bekommt, aber die Inflation 1,5 Prozent beträgt, verliert man real ungefähr ein Prozent des verlangten Geldwerts. Es ist diese einfache finanzmathematische Überlegung, die Anleger zu risikoreichen Investments greifen lässt. Ein Beispiel dafür ist eine

Kaufoption, die dem Käufer das Recht gewährt, einen Basiswert (z. B. eine bestimmte Aktie) zu einem fixierten Zeitpunkt zu einem fixierten Preis zu kaufen. Der Optionsverkäufer wiederum hat die Pflicht zu verkaufen und trägt somit ein hohes Risiko, denn er muss – so der Käufer sein Recht ausübt – den Basiswert (die Aktie) auch im Fall einer beträchtlichen Wertsteigerung zum vereinbarten Preis verkaufen. „Mathematisch gesprochen ist der Wert der Option zur Fälligkeit eine Funktion des – heute noch unbekanntenen – künftigen Kurses des Basiswerts. Bevor man so eine Option oder ein komplizierteres Derivat handelt, sollte man diese Funktion visualisieren und verstehen“, sagt Stefan Gerhold, assoziierter Professor des TU-Forschungsbereichs für Finanz- und Versicherungsmathematik, denn „ohne Mathematik kann man bei solchen Risikogeschäften recht schnell arm werden“.

Angewandt und theoretisch

Woher weiß nun eine Bank, die Optionen verkauft, was der Kurs des Basiswerts zur Fälligkeit sein wird? „Sie weiß es nicht, und dank Finanzmathematik muss sie es auch nicht. Die Bank berechnet den aktuellen Wert der Option als Funktion des aktuellen Kurses des Basiswerts. Dafür gibt es eine Fülle von konkurrierenden

STEFAN GERHOLD

Studium der Technischen Mathematik in Linz, Promotion, seit 2006 am Institut für Stochastik und Wirtschaftsmathematik der TU Wien, 2009 bei Microsoft-Research-INRIA in Saclay, Frankreich, seit 2015 assoziierter Professor des TU-Forschungsbereichs für Finanz- und Versicherungsmathematik, als Ersatzmitglied der Studienkommission „Technische Mathematik“ in die Gestaltung der Bachelor- und Masterstudiengänge involviert.



Faszination Mathematik

Ein eleganter Beweis als intellektueller Genuss

„In meiner Verwandtschaft gibt es mehrere Mathematiker_innen und theoretische Physiker_innen, die teilweise auch an Universitäten tätig sind oder waren. Mathematik und Naturwissenschaften waren deshalb immer ein beliebtes Gesprächsthema in meiner Familie, vor allem mit meiner Großmutter, die in den 1930er-Jahren in Wien Mathematik studierte, zu einer Zeit, als dort Kurt Gödel ein junger Assistent war. Als Jugendlicher habe ich viele Bücher über Themen wie Kosmologie, Chaostheorie und Fraktale gelesen. Trotzdem ist meine Studienwahl erst spät gefallen, weil mich andere Disziplinen, vor allem Sprachen und Biologie, fast genauso interessiert haben.“

Für mich ist das Studium eines eleganten mathematischen Beweises ein intellektueller Genuss ersten Ranges. Es gibt eine unerschöpfliche Fülle an offenen Problemen, die man sofort bearbeiten kann, ohne Geräte zu beschaffen oder irgendwohin zu fahren. Beim Erstellen eines Beweises sind Kreativität und Erfahrung gefragt. Besonders spannend finde ich es, wenn ich Fehler in einem Gedankengang entdecke, die mich an der Gültigkeit der zu beweisenden Aussage zweifeln lassen, die aber doch zu reparieren sind – bis letztendlich der fertige Beweis als Lohn der Arbeit in gefällige Form und zur Publikation gebracht werden kann. Faszinierend ist auch die universelle Anwendbarkeit durch mathematische Abstraktion. Für viele mag es etwa überraschend sein, dass Investmentbanken Physiker anstellen. Aus Sicht eines Mathematikers ist es hingegen normal, dass eine mathematische Theorie auf völlig verschiedene reale Sachverhalte anwendbar ist. In diesem Fall beschreibt die Wärmeleitungsgleichung ebenso die Temperatur eines Festkörpers wie auch den Zusammenhang zwischen Basiswert und Optionspreis.“

Modellen und Methoden, die ständig weiterentwickelt werden“, erläutert Gerhold. „Vereinfacht gesagt berechnet die Bank dann die Ableitung dieser Funktion und kauft dementsprechend viele Stücke des Basiswerts. Das entspricht dem aus dem Mathematikunterricht bekannten Annähern einer Funktion durch eine Tangente im Rahmen einer Kurvendiskussion.“ Durch ständiges Handeln im Basiswert kann die Bank so die Option „nachbilden“ und hat am Schluss in etwa den Portfoliowert erzielt, den sie für die Optionsauszahlung benötigt.

Das Absichern von Optionen ist eine der Kernaufgaben der praktisch orientierten Finanzmathematik, die heutzutage in allen Investmentbanken eingesetzt wird. Die Disziplin Finanzmathematik beschäftigt sich aber auch mit Fragen, die mehr theoretischer Natur sind und nach Gerholds Empfinden „um nichts weniger spannend“: Existieren die zufallsabhängigen Prozesse, die als Modelle vorgeschlagen werden, überhaupt? Lässt sich ihre Existenz aus den üblichen theoretischen Grundsätzen und daraus folgenden Sätzen der Mathematik beweisen? Wenn ja, welche Eigenschaften haben sie?

Von Physik bis zu KI

„Viele finanzmathematischen Modelle basieren auf der brownischen Bewegung, die in der Physik die Bewegung von Teilchen beschreibt, die mit den Molekülen einer Flüssigkeit zusammenstoßen. Diese zufällige Entwicklung kann man verwenden, um den ebenfalls aus heutiger Sicht unbekanntem Verlauf eines Wertpapierkurses zu modellieren“, so Gerhold. Der Optionspreis und die Absicherungsstrategie können dann durch Lösen von Differentialgleichungen gewonnen werden. Kleine Änderungen an der Gestaltung einer Option oder der Modellierung des Wertpapierhandels können große Auswirkungen auf die mathematische Modellierung haben. „Wenn man z.B. erlaubt, dass eine Option auch vor ihrer Fälligkeit ausgeübt werden kann, hat man es mathematisch mit einem ‚Optimal Stopping‘-Problem zu tun, einem eigenen Forschungsgebiet der Wahrscheinlichkeitstheorie.“

Bei den neuesten Modellen, die auch an der TU Wien zurzeit erforscht werden, hängt der Optionspreis nicht nur vom aktuellen Basiswert, sondern auch von der Vergangenheit ab. Hier stoßen traditionelle numerische Verfahren rasch an ihre Grenzen, wodurch ungenauere, aber schnell berechenbare Annäherungslösungen interessant werden. Auch maschinelles Lernen wird in der Finanzmathematik immer mehr eingesetzt – Stichwort Künstliche Intelligenz. ●

Königliche Lösungen für geometrische Probleme

Mit geometrischen Analysen in Bereiche vorzudringen, wo noch kein Mensch zuvor gewesen ist: TU-Professor Franz Schuster und die Leidenschaft für die künstlerische Schönheit zeitloser Mathematik.



Maximales Volumen bei gegebenem Oberflächeninhalt. Ideale Seifenblasen sind kugelförmig.

Welche Form schließt bei fest gegebenem Umfang den größten Flächeninhalt ein? Mit dieser mathematischen Frage scheint sich die Menschheit bereits seit Tausenden Jahren zu beschäftigen. Der römische Dichter und Epiker Vergil (70 v. Chr.-19 v. Chr.) berichtete in seiner Erzählung Aeneis von der phönizischen Königin Dido, die bei der Gründung der Stadt Karthago an der Nordküste Afrikas mit einer Kuhhaut ein Stück Land für ihr Volk abstecken durfte. Nachdem aus dem Fell dünne Streifen zerlegt und zusammengenäht waren, stellte sich die Frage, welche geometrische Form das durch das Band umrahmte Territorium nun haben sollte, um eine maximale Fläche aufzuweisen. Königin Dido legte den Grundriss ihrer Stadt Karthago kreisförmig und damit bestmöglich an- und wurde zu einer der ersten großen Heldinnen der Geometrie.

Kreis und Kugel

Didos Problemstellung wird in der Mathematik durch die „isoperimetrische Ungleichung“ beschrieben, wobei im griechischen Wort „iso“ für gleich steht und „perimeter“ Umfang bedeutet. Die mathematische Ungleichung schätzt in der Ebene den Flächeninhalt einer Figur gegen ihren Umfang ab und besagt: Die Fläche einer zweidimensionalen Figur ist immer kleiner als oder gleich groß wie das Quadrat des Umfangs geteilt durch vier Pi. Gleichheit gilt dabei genau für den Kreis. Wie schon Königin Dido gewusst hat, ist der Kreis die Form mit maximalem Flächeninhalt bei gegebenem Umfang. Im dreidimensionalen Raum liefern analog dazu Kugeln die optimale Lösung. Anschaulich ergibt sich das aus der Kugelform von Seifenblasen, die bemüht sind, ihre Oberflächenspannung und damit ihre Oberfläche so klein wie möglich zu machen, um ein bestimmtes Luftvolumen zu umspannen.

„Die isoperimetrische Ungleichung ist der Startpunkt für viele moderne Untersuchungen, die unter dem Oberbegriff ‚isoperimetrische Probleme‘ zusammengefasst werden. Dabei können Volumen und Oberfläche durch andere natürliche geometrische Messgrößen ersetzt werden, um nach bedeutungsvollen Relationen zu suchen“, sagt Franz Schuster, an der TU Wien Leiter des Forschungsbereichs Geometrische

**„Die reine Mathematik
verknüpft meine
wissenschaftliche
Neugier mit der
Leidenschaft an
ästhetischer Kreation.“**

Franz Schuster

Analysis. Es handelt sich um einen der größten Teilbereiche der Mathematik, in dem versucht wird, Fragestellungen der Geometrie mit Methoden der mathematischen Analysis zu lösen und vice versa. In den letzten Jahrzehnten erlebte das Fachgebiet einen enormen Aufschwung. Franz Schuster vom Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie wurde für seine Arbeit unter anderem mit einem der größten europäischen Forschungsförderungspreise ausgezeichnet (2012, Starting Grant des European Research Councils, ERC, dotiert mit rund einer Million Euro). Im ERC-Forschungsprojekt hat sich Schuster mit Verallgemeinerungen und Verschärfungen der klassischen isoperimetrischen Ungleichung beschäftigt.

Zeitlose Kunstwerke

Den Traum, Wissenschaftler zu werden, um „mutig dorthin vorzudringen, wo noch kein Mensch zuvor gewesen ist“, hat der heute mehrfach prämierte Mathematiker schon seit frühesten Kindheitstagen gehegt. „Ich bin von klein auf ein Science-Fiction-Fan gewesen und habe als Jugendlicher begonnen, populärwissenschaftliche Bücher über Theoretische Physik zu verschlingen, zu Themen wie Relativitätstheorie, Quantenmechanik, Stringtheorie, Schwarze Löcher, etc. Dabei habe ich festgestellt, dass ein - - - - ➔



----- ➔ großer Grundstock an mathematischem Wissen erforderlich ist, um in diese Materie rigoros einzudringen“, erinnert sich Schuster. Spätestens in der Studienzeit erlag er der Faszination der reinen Mathematik und gab ihr den Vorzug gegenüber dem Studium der Physik. „Die Physik muss ihre Theorien und Modelle stets an experimentelle Beobachtungen knüpfen. So können physikalische Resultate, die ein Jahrzehnt als richtig gelten, 50 Jahre später völlig an Bedeutung verlieren. Mathematische Resultate hingegen sind im Allgemeinen zeitlos.“ Die reine Mathematik, insbesondere die Geometrie, ermöglicht es ihm heute, seine wissenschaftliche Neugier mit seiner Leidenschaft für ästhetische Kreation zu verbinden, um „zeitlose Kunstwerke“ zu erschaffen.

Bis hin zur Quantenphysik

In seiner Forschungsarbeit im Bereich der Geometrischen Analysis beschäftigt sich Schuster konkret nicht bloß mit Relationen zwischen grundlegenden geometrischen Größen, sondern auch mit der Frage, welche Größen und Funktionen eines Körpers überhaupt grundlegend sind – und welche Eigenschaften sie grundlegend machen. „Das ist eine zentrale Problemstellung, der ich nachgehe. Während etwa das Volumen bereits vor rund 100 Jahren durch einige wenige essenzielle Eigenschaften ausgezeichnet

FRANZ SCHUSTER

Masterstudium der Technischen Mathematik (bis 2003), Promotion (2005), Habilitation (2010). Auszeichnungen (u. a.): Best Paper Awards der TU-Fakultät für Mathematik (2007, 2009, 2012), Hlawka-Preis der Österreichischen Akademie der Wissenschaft (2010), Starting Grant des European Research Councils, ERC (2012), Start-Preis des FWF (2012). Professor am Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie, Leiter des Forschungsbereichs Geometrische Analysis.

Faszination Mathematik

Science Fiction, Ästhetik & Fakten zur Beruhigung

„Alles nahm seinen Anfang mit meiner Leidenschaft für Science Fiction, für populärwissenschaftliche Bücher über Theoretische Physik und der frühen Erkenntnis, dass es viel an mathematischem Grundwissen braucht, um tiefer in die Materie einzutauchen. Also begann ich, nach meinem Schulabschluss sowohl Technische Physik als auch Technische Mathematik zu studieren und bin dann mehr durch Zufall Vollzeit in die Mathematik gewechselt. Die reine Mathematik, insbesondere die Geometrie, ermöglicht es mir, diese große wissenschaftliche Neugier mit meiner Leidenschaft für ästhetische Kreation zu verbinden, um so zeitlose Kunstwerke zu erschaffen. Zum Glück sind in der Mathematik die schönsten Resultate auch oft die wichtigsten – und haben Anwendungen in vielen anderen Wissenschaftsgebieten. Der Begriff der ‚Schönheit‘ ist hier natürlich nur schwer zu erklären oder zu definieren, genauso wenig wie in der Kunst selbst: Wer kann ein ‚schönes‘ Gemälde oder Gedicht erklären?

Ein weiterer Aspekt ist mir erst in den letzten Jahren mehr und mehr bewusst geworden, durch die politischen Entwicklungen auf der Weltbühne. Immer öfter habe ich in den Nachrichten mit großem Bedauern von ‚postfaktischer Politik‘ gelesen, also dem politischen Handeln, das nicht auf Fakten, sondern den Emotionen der jeweiligen Interessensgruppen basiert. Die Mathematik steht dem ganz diametral gegenüber, da unser gesamtes (mathematisches) Handeln einerseits nach strengen logischen Schlussregeln abläuft und andererseits auf Aussagen/Fakten basiert, die mithilfe dieser Regeln hergeleitet worden sind. Diese Art der wissenschaftlichen Arbeit – die in meinem Fall auch ganz und gar unabhängig von Experimenten ist – hat einen sehr beruhigenden Effekt auf meine sonst manchmal besorgte Stimmungslage.“

worden ist, ist zum Beispiel die Frage nach natürlichen Oberflächenbegriffen für unterschiedliche Mengenklassen eine deutlich schwierigere“, sagt Schuster. Für diverse Anwendungen sei es notwendig, eine Oberfläche, die sich unter Verschiebungen und Drehungen des Körpers unverändert zeigt, durch andere oberflächenartige Größen zu ersetzen, die etwa auch unter Streckungen und Scherungen invariant bleiben. „Von Forschungsinteresse ist, welche Eigenschaften hier aus- und kennzeichnend sind. Dem gehe ich in dem Teil meiner Arbeit nach, der sich in den Bereich der Integralgeometrie einordnen lässt.“

Die wissenschaftlichen Untersuchungen des TU-Forschers sind der Grundlagenforschung zuzuordnen und haben auf den ersten Blick wenig direkte Anwendungsbereiche außerhalb der Mathematik. Indirekte Bezüge und weiterführende Betrachtungen von Kolleg_innen der angewandten Mathematik gibt es aber sehr wohl. Schuster: „So werden etwa die meisten Vorgänge in den Naturwissenschaften, wie etwa in der Strömungsmechanik oder der Quantenphysik, durch partielle

**„Zum Glück sind in der
Mathematik die schönsten
Resultate auch oft die
wichtigsten.“**

Franz Schuster

Differentialgleichungen beschrieben. Leider lassen sich die Lösungen der meisten dieser Gleichungen nicht in einfacher Weise durch eine Formel ausdrücken, sondern nur näherungsweise berechnen.“ Um herauszufinden, ob es solche Lösungen überhaupt gibt, ob die Lösung eindeutig ist und wie gut bestimmte Näherungen sind, greifen Schuster und seine Mitarbeiter_innen daher meist auf Abschätzungen mit geometrischem Hintergrund zurück. Der geometrische Kern steht in engem Zusammenhang mit isoperimetrischen Ungleichungen. So wie einst bei Königin Dido. ●

Was Österreichs führendem Stromunternehmen noch fehlt?

**Ihr Antrieb.
Ihre Energie.**

Verstärken Sie Österreichs führendes Stromunternehmen! Wir setzen wie kaum ein anderer in Europa auf die Kraft des Wassers – und auf die Energie und Kompetenz unserer exzellenten Kolleginnen und Kollegen. Von der Stromerzeugung über den Transport bis zum internationalen Handel und Vertrieb.

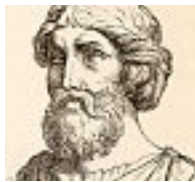
Wir suchen Expertinnen und Experten mit Antrieb und Energie in folgenden Ausbildungsschwerpunkten: Mathematik, Technische Mathematik, Informatik, Wirtschaftsinformatik. Unseren Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern vertrauen wir von Anfang an. Wir bieten Ihnen ein hohes Maß an Eigenverantwortung in einem State-of-the-art-Arbeitsumfeld mit einem interdisziplinären Kreis von Top-Expertinnen und -Experten. Denn nur so können wir uns weiterentwickeln und die zukunftsweisenden Aufgaben gemeinsam meistern.

Informieren Sie sich unter www.verbund.com/karriere über die Chancen, die Ihnen VERBUND als Arbeitgeber bietet. Für Ihre Fragen stehen wir Ihnen gerne zur Verfügung unter +43 (0)50313-54155.

Epochale Wirkung

Die größten
Mathematiker ihrer
Zeit. Ein Streifzug
durch die Epochen.
Von den Universal-
gelehrten aus der
Antike bis weit in die
Zeit der Renaissance
zu den auf Teilgebiete
der Mathematik
hochspezialisierten
Wissenschaftler_innen
der Gegenwart.

ANTIKE



Pythagoras von Samos

(um 570 v. Chr. bis nach 510 v. Chr.)

Kein Zweifel besteht darin, dass Pythagoras ein griechischer Philosoph und Gründer einer einflussreichen religiös-philosophischen Bewegung gewesen ist. Uneinig sind sich Historiker_innen hingegen bezüglich seiner Leistungen als Wissenschaftler im Allgemeinen und Mathematiker im Besonderen. Während ihn die einen als einen der Begründer der Mathematik und als Naturwissenschaftler

Thales von Milet (Satz des Thales), **Euklid von Alexandria** (Euklidische Geometrie und Euklidischer Algorithmus), **Archimedes von Syrakus** (Beweisführung zur Kreiszahl Pi), u. a. m.

MITTELALTER



al-Chwarizmi

(von ca. 780 bis zwischen 835 und 850)

Al-Chwarizmi ist ein persischer Mathematiker, Astronom und Geograf gewesen, dem ein großer Einfluss auf die Mathematik im Vorderen Orient und weitere Entwicklungen im Westen zugesprochen werden. Al-Chwarizmi ist es zu verdanken, dass die Ziffer Null (arabisch: sefr) aus dem indischen in das arabische und damit in alle modernen Zahlensysteme eingeführt worden ist. In seinen Schriften gab er systematische Lösungsansätze für lineare und quadratische Gleichungen an – und dies in einer geometrischen, „bildhaften“ Weise, die das Thema Mathematik auch für Nichtgelehrte zugänglicher machte. Der Begriff „Algebra“ geht auf die Übersetzung seines wohl wichtigsten Werkes („Das kurz gefasste Buch über die Rechenverfahren durch Ergänzen und Ausgleichen“) zurück.

FRÜHE NEUZEIT



Leonhard Euler

(1707 bis 1783)

Der Schweizer Leonhard Euler war einer der bedeutendsten Mathematiker überhaupt (und ein gewichtiger Physiker). In insgesamt 866 Publikationen sorgten seine Erkenntnisse für neue Felder in der Mathematik. Ein großer Teil der heutigen mathematischen Symbolik geht auf Euler zurück. Die bekannteste nach ihm benannte mathematische Zahl ist wohl die Exponentialzahl e . Die Eulersche Formel (siehe Seite 49) gilt unter Mathematiker_innen als die „Schönste“ aller Zeiten. Fächerübergreifend beschäftigte sich Euler auch mit der Anwendung mathematischer Methoden in den Sozial- und Wirtschaftswissenschaften (zum Beispiel Rentenrechnung, Lotterien, Lebenserwartung).

Johannes Kepler (Fassregel, Planetenbewegung), **René Descartes** (kartesisches Koordinatensystem), **Blaise Pascal** (Wahrscheinlichkeitsrechnung), **Jakob Bernoulli** (Wahrscheinlichkeitstheorie), **Gottfried Wilhelm Leibniz** (Infinitesimalrechnung, Reihen, Matrizen), **Isaac Newton** (Infinitesimalrechnung), **Pierre-Simon Laplace** (Wahrscheinlichkeits- und Spieltheorie), u. a. m.

19. JAHRHUNDERT

August Ferdinand Möbius

(analytische Geometrie, Topologie),

Leopold Kronecker

(Algebra, Zahlentheorie, Analysis, Funktionentheorie), **Bernhard Riemann** (Differentialgeometrie, mathematische Physik, analytische Zahlentheorie), **Georg Cantor** (Mengenlehre), u. a. m.

**Carl Friedrich Gauß (1777 bis 1855)**

Carl Friedrich Gauß war ein deutscher Mathematiker, Statistiker, Astronom, Geometer und Physiker. Gauß gilt als einer der größten Mathematiker der Geschichte. Er beschäftigte sich mit fast allen Teilbereichen der Mathematik. Nach Gauß wurde eine große Menge an Verfahren, Begriffen und Sätzen benannt, wie etwa das Gaußsche Eliminationsverfahren und die

Gaußsche Zahlenebene. Wegen seiner überragenden wissenschaftlichen Leistungen galt er bereits zu seinen Lebzeiten als Princeps Mathematicorum („Fürst der Mathematiker“, „Erster unter den Mathematikern“). Der nach ihm benannte Carl-Friedrich-Gauß-Preis wird alle vier Jahre für Arbeiten auf dem Gebiet der angewandten Mathematik verliehen.

20. JAHRHUNDERT

John von Neumann

(entscheidender Beitrag zur Entwicklung elektronischer Rechenmaschinen), **Kurt Gödel** (Logik), **Alan Turing** (Turingmaschine, Grundlage für die moderne Informations- und Computertechnologie), **Paul Erdős** (Kombinatorik, Graphen- und Zahlentheorie), u. a. m.

**David Hilbert (1862 bis 1943)**

David Hilberts Werk ist grundlegend in den meisten Sparten der Mathematik und der mathematischen Physik. Viele seiner Arbeiten begründeten eigenständige Forschungsgebiete. 1900 stellte Hilbert eine einflussreiche Liste mit 23 ungelösten mathematischen Problemen vor. Hilbert war Formalist und forderte, die

Mathematik vollständig auf einem System von grundlegenden Aussagen (Axiomen) aufzubauen, die ohne Beweis angenommen und aus denen alle Sätze (Theoreme) des Systems logisch abgeleitet werden. Das System müsse nachweislich widerspruchsfrei sein. Dieses Bestreben trägt bis heute den Namen Hilberts Programm.

GEGENWART

**Andrew Wiles**

(geb. 1953)

Den Ruf, einer der spannendsten Mathematiker_innen der Gegenwart zu sein, hat sich der Engländer gleich zweifach erarbeitet. Nachdem ihm 1984 der Beweis einer Hauptvermutung zum Thema der rationalen Zahlen gelungen ist, hat er es 1994 mit seinem Beweis des großen Fermatschen Satzes zu Berühmtheit geschafft. Das Mathematik-„Problem“ ist im 17. Jahrhundert von Pierre de Fermat formuliert worden und es sollte mehr als 350 Jahre dauern, bis Wiles in Zusammenarbeit mit Kollegen die Beweislösung erbringen konnte. Zahlreiche teils romantische, teils dramatische, teils tragische Episoden ranken sich um jene Mathematiker_innen, denen dies in den Jahrhunderten zuvor nicht gelungen war. Wiles Beweisführung gilt als populärer Höhepunkt der Mathematik des 20. Jahrhunderts.

Grigori Jakowlewitsch

Perelman (Topologie, erster und bisher einziger Mathematiker, der eines der sogenannten Millenniumprobleme gelöst hat; das dafür ausgelobte Preisgeld von einer Million Dollar hat er nicht angenommen), **Jean-Pierre Serre** (Wegbereiter der modernen Algebraischen Geometrie, Zahlentheorie und Topologie; Träger der Fields-Medaille und des Abelpreises – beide vergleichbar mit dem Nobelpreis für Mathematiker_innen), u. a. m.

Die Vermessung der Welt

Hinter dem sperrigen Terminus der geometrischen Bewertungstheorie verbirgt sich die Kunst der effizienten Beschreibung von Objekten, die in der Kosmologie, den Materialwissenschaften und im Medical Imaging ihre Anwendung finden.

Wie kann man aus den Bewertungen, die User_innen online über Filme abgeben, herauslesen, welche Arten von Film diese grundsätzlich bereit sind, anzusehen? Die Frage beschäftigte vor einigen Jahren eine der größten Onlinevideotheken der Welt derart, dass für die beste Antwort ein Preis von einer Million Dollar ausgelobt wurde. Am Ziel, ein mathematisches Modell zu entwickeln, das den Geschmack von Kund_innen so gut wie möglich vorhersagen sollte, haben laut

dem Unternehmen mehr als 50.000 Forscher_innen gearbeitet. Gefunden worden ist ein trickreiches Verfahren, das aus den gegebenen Bewertungen etwa 50 Kriterien errechnet, nach denen die Filme eingeteilt werden können. In die Fachliteratur ging die mathematisch zu lösende Frage als Netflix-Problem ein, das symbolträchtig für die Problematik steht, in Zeiten von Big Data effiziente Darstellungen und Analysen herauszufiltern. Inwiefern dies das Fachgebiet der Geometrie tangiert, erläutert die TU-Mathematikerin Monika Ludwig: „Im Wesentlichen hat man sehr viele Gleichungen. Und man möchte aus dieser großen Datenmenge etwas extrahieren, das eine gute Empfehlung ergibt. Geometrisch gesprochen: Man hat ein hoch dimensionales System und möchte etwas niedrig Dimensionales auswählen, das die Präferenzen beschreibt. Das ist eine geometrische Fragestellung.“

Geometrisch bewertet

Ludwigs Forschungsbereich an der TU-Fakultät für Mathematik und Geoinformation ist in erster Linie die konvexe Geometrie, ein Teilbereich der Mathematik, der zwischen der Geometrie und der Analysis angesiedelt ist. Insbesondere versucht die Forscherin in den letzten Jahren, Resultate aus der Geometrie auf die Analysis zu übertragen. „Eine Frage, die in der



Geometrie eine lange Tradition hat, ist die nach der Klassifizierung, also der Einteilung von geometrischen Objekten anhand bestimmter übereinstimmender Merkmale. Anders und einfach gesagt: Wie kann man ein geometrisches Objekt effizient beschreiben?“, erläutert Ludwig. Im Zweidimensionalen fällt einem dazu vielleicht zuerst der Flächeninhalt ein. Auch der Umfang ist oft eine gute Kenngröße. Wer das systematisch untersuchen will, begibt sich in den Bereich der geometrischen Bewertungstheorie, Ludwigs Hauptforschungsgebiet. „Um ein Objekt bestmöglich zu beschreiben, versuchen wir, Invarianzeigenschaften auszunützen“, so Ludwig. Unter Invarianten (Invarianz = Unveränderlichkeit) werden mathematische Objekte verstanden, die sich unter gewissen Operationen nicht oder nur kontrolliert verändern. Ein Beispiel einer geometrischen Invariante ist die Winkelsumme von Dreiecken in der Ebene, die immer 180 Grad ausmacht, egal wie man das Dreieck verändern mag. Als allen Schüler_innen bestens bekanntes Beispiel lässt sich auch der Satz des Pythagoras anführen. Wie groß auch immer die Seitenlängen oder Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks sind, es gilt stets: $a^2 + b^2 = c^2$.

Die Kunst der Beschreibung

Die Kunst besteht für Mathematiker_innen darin, Invarianten zu entdecken, die einfach zu berechnen sind, aber dennoch genug Information über das betrachtete Objekt bzw. Problem enthalten. Denn die Stärke von Invarianten ist es, Probleme in Fragestellungen zu übersetzen, die einfacher zu lösen sind als das Ausgangsproblem. In der modernen Mathematik hat sich das Prinzip der Invarianten jedenfalls zu einem mächtigen Werkzeug weiterentwickelt. „In den letzten Jahren haben Resultate aus der geometrischen Bewertungstheorie Anwendungen in der Kosmologie, den Materialwissenschaften und im Medical Imaging gefunden“, betont Ludwig. „Grob gesagt, kann man verschiedene Größen messen, aber jede Messung kann kostspielig sein oder auch das Material zerstören. Daher sucht man Kenngrößen, die das Objekt oder Material möglichst gut beschreiben, und das ist, was die geometrische Bewertungstheorie leistet.“ Danach müssen natürlich noch Algorithmen gefunden werden, die die Kenngrößen berechnen. Auch hier ist noch ein starker Bezug zur Bewertungstheorie gegeben. Mit der zunehmenden Automatisierung solcher Aufgaben werde laut Ludwig dabei die richtige Auswahl von Kenngrößen immer wichtiger – eine Aufgabe, bei der einstweilen noch Mathematiker_innen den Vorzug vor intelligenten Maschinen haben. ●

MONIKA LUDWIG

Studium Technische Mathematik an der TU Wien (Masterabschluss 1990, Doktorat sub auspiciis praesidentis 1994), Habilitation (2000), Professur am Polytechnic Institute of New York University (2007–2010), Professur TU Wien (seit 2010), Wirkliches Mitglied der Österreichischen Akademie der Wissenschaften (seit 2013), ausgewählte Preise und Auszeichnungen: Edmund-und-Rosa-Hlawka-Preis für Mathematik der ÖAW, Fellow of the American Mathematical Society, Förderungspreis der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft. An der TU Wien Leiterin des Forschungsbereichs Konvexe und Diskrete Geometrie.



„Eine grundsätzliche Aufgabe ist es, ein Objekt bestmöglich zu beschreiben.“

Monika Ludwig

Faszination Mathematik

Genuss der intelligenten Beweisführung

„Ich bin schon seit meiner Schulzeit von Mathematik fasziniert. Ich habe schon damals gewisse Resultate als sehr schön empfunden und das ist auch noch heute das, was mich begeistern kann. Man denkt über Dinge nach, sieht ihre Schwierigkeit und sucht nach einer Möglichkeit, um sie zu lösen. Diese intellektuellen Gebäude, die Beweisführungen, die sind richtig schön. Die Mathematik entwickelt sich sehr dynamisch. Jedes Jahr lerne ich neue und aufregende Ideen kennen, die meine eigene Forschung beeinflussen. Auch führen neue Fragestellungen immer wieder zu anderen mathematischen Teilgebieten und bieten dabei die Gelegenheit, zu lernen und Innovatives zu schaffen.“

Robuste Statistik im Dienste der Kunst

An der TU Wien entwickelte die Statistikerin und Wirtschaftsmathematikerin Nermina Memic ein Tool, um Betrug auf Musikstreamingplattformen aufzudecken und einen mathematischen Riegel vorzuschieben. Mit ihrem Start-up, Legitary, sorgt sie nun international für Furore.



Das Patent für den Algorithmus wird gerade in Europa und den USA eingereicht.

Geht es um die Korrektheit bei der Abrechnung von Musikstreamingplattformen, melden Muskschaffende Zweifel an. Wer stellt sicher, dass die großen Player wie Spotify, Apple Music, Deezer oder Amazon Music Unlimited die richtigen Zahlen weitergeben und korrekte Honorare überweisen? Wie lassen sich Verkaufszahlen überprüfen, wenn CDs und LPs nicht mehr stückweise abgezählt, sondern Musik elektronisch vertrieben wird? An der TU Wien hat man sich des Problems angenommen und mit mathematischen Werkzeugen ein Betrugsbekämpfungstool entwickelt, das für Transparenz sorgen soll. Dafür verantwortlich zeichnet - wie im letzten „TU Magazin“ berichtet - die Statistikerin Nermina Memic vom Institut für Stochastik und Wirtschaftsmathematik (gemeinsam mit Radostina Kostadinova und Peter Filzmoser, Head

of Research des Instituts). Neu ist der große Erfolg, der Memic seitdem mit ihrem eigens gegründeten Start-up, Legitary, zuteilgeworden ist.

Auf der Erfolgswelle

„Im März dieses Jahres haben wir Legitary offiziell gegründet und nur drei Monate später ein kleines Stück österreichische Start-up-Geschichte geschrieben“, erzählt Memic. So hat sich Legitary nicht nur als erstes heimisches Unternehmen für das Finale der Musik-/Tech-Start-up-Competition bei der wichtigsten Musik-B2B-Messe der Welt, der Midem, qualifiziert, sondern in der Kategorie Marketing und Data/Analytics auch den Pitch-Wettbewerb gewonnen. In der Jury waren unter anderem Mitarbeiter von Warner Music, France Digital, Soundcharts oder Musically. „Der Sieg bei der Midemlab hat international einen

riesigen Buzz erzeugt. Viele internationale Größen des Musikgeschäfts sind auf uns zugekommen und wollen nun unsere Software nutzen. Aktuell machen wir Testläufe mit großen Labels und Musikvertrieben“, so Mumic, die vom ereignisreichsten Jahr in ihrer jungen Karriere berichten kann. Im Juni hat das Start-up die Pre-Seed-Förderung des Austria Wirtschaftsservice (AWS) bekommen, im gleichen Monat ist Mumic vom österreichischen US-Botschafter Trevor Dow Traina zur Brilliant-Minds-Konferenz nach Stockholm mitgenommen worden. Die exklusive „Invite Only“-Konferenz wurde vom Spotify-Gründer Daniel Ek ins Leben gerufen. Heuer waren Persönlichkeiten wie Barack Obama, Greta Thunberg, Ted Sarandos, COO von Netflix, oder Vasant Narasimhan, CEO von Novartis, zu Gast. Mumic wurde zudem für den österreichischen Gründerpreis Phönix in den Kategorien Spin-off und Frauen nominiert sowie von TU-Rektorin Sabine Seidler für den Sonderaward des Staatspreises Digitalisierung, „Women in Digital 2019“. Zuletzt hat Legitary bei der internationalen Patentanmeldung (der PCT-Vertrag, Patent Cooperation Treaty, gilt in über 150 Staaten weltweit) für den Algorithmus eine Bestätigung der globalen Behörde bekommen. Nun wird das Patent in Europa und den USA eingereicht.

Robuste Statistik

Hinter all dem Erfolg steckt Mathematik. „Um ein so komplexes Problem zu lösen, kann man auf kein einzelnes, herkömmliches Modell der Statistik zurückgreifen. Wir haben etwas Neues entwickelt und als Algorithmus implementiert“, erklärt Mumic. Da man es mit Ausreißern in den Daten zu tun hat, braucht es neue Methoden der robusten Statistik. Wenn Beobachtungen zeitlich voneinander abhängen, gilt es, die sogenannte Autokorrelation (= Korrelation mit sich selbst zu einem früheren Zeitpunkt) in den Daten richtig zu modellieren. Zum Einsatz kommen Methoden der Zeitreihenanalyse, mit der Beobachtungen einer Variablen über die Zeit untersucht werden. „Aufgrund der vorliegenden Struktur bei Streamingdaten hat es auch Sinn gehabt, mit kompositionellen Daten zu arbeiten“, ergänzt Mumic. „Im Grunde analysieren wir die Verteilung der Hörerschaft eines Künstlers (den er/sie prüfen möchte) auf den unterschiedlichen Plattformen, auf denen der Titel gestreamt worden ist. Dabei berücksichtigen wir zeitliche Fluktuationen und Muster in der Verteilung und markieren Streams, die nicht zum vorliegenden Muster passen.“ Die Ziele sind klar definiert: Betrugsbekämpfung und Fairness. ●

NERMINA MUMIC

Technische Mathematik und Statistik (BA und MA), Forschung am TU-Institut für Stochastik und Wirtschaftsmathematik, Bereich Computational Statistics, Gründerin und CEO des Start-up Legitary (März 2019, mit Unterstützung des Innovation Incubation Centre i2c der TU Wien).



„Wir haben ein kleines Stück österreichische Start-up-Geschichte geschrieben.“

Nermina Mumic

Faszination Mathematik

Die Eleganz der Sprache

„Für Mathematik habe ich mich schon während der Schulzeit interessiert, bei einer Mathematikolympiade teilgenommen und als Tutorin an meiner Schule gearbeitet. Beim Studium stand ich vor der Entscheidung zwischen Betriebswirtschaftslehre und Mathematik. Eigentlich hatte ich bereits für BWL inskribiert, mich aber spontan und sehr kurzfristig für Technische Mathematik umentschieden – und das war gut so. An der Mathematik fasziniert mich die äußerst elegante Sprache, um komplizierte Zusammenhänge zu beschreiben und Gesetzmäßigkeiten zu formulieren. Damit kann man hochkomplexe Probleme abstrahieren, sie beschreiben und in der Folge lösen – in einer sehr allgemeinen und damit breit anzuwendenden Form. So erschließt man mit der Mathematik Bereiche, die von Naturwissenschaften und Technik bis hin zur Wirtschaft reichen.“



Wenn Zahlen zu Tönen werden

Die Verbindung von Mathematik und Musik empfindet TU-Professor Reinhard Winkler als Lebensthema. Ein Plädoyer für die Verknüpfung zweier Welten.

Kaum ein kulturelles Phänomen bewegt Menschen so ganzheitlich wie die Musik, und kaum eine Verbindung zwischen Kunst und Wissenschaft hat so viele Geister beschäftigt wie diejenige zwischen Musik und Mathematik“, schreibt Reinhard Winkler in seiner Einleitung eines Artikels für die Österreichische Mathematische Gesellschaft. Für den TU-Professor am Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie ist die Verknüpfung von Mathematik und Musik „ein Lebensthema, obgleich ich im Gegensatz zu vielen anderen Mathematikern keinerlei professionelle musikalische Ausbildung genossen habe und musikalisch auch nicht außergewöhnlich begabt bin“.

Musik und Proportionen

Verbindungen zwischen den beiden Welten sieht Winkler in dreierlei Hinsicht, zunächst bei den Zahlen-



verhältnissen in der Musik. Seit Pythagoras vor über 2500 Jahren fasziniert Menschen die Tatsache, dass Konsonanz und Dissonanz etwas mit Proportionen ganzer Zahlen zu tun haben. „Heute weiß man: Die Zahlenverhältnisse beruhen auf physikalischen und hörpsychologischen Tatsachen, die mathematisch sehr klar erfasst werden können“, so Winkler. Dabei stößt man auf eine ganze Reihe von mathematischen Themen: Kräfteparallelogramme führen zur Differentialgleichung für die schwingende Saite, deren (einfachste) Lösungen Obertönen und somit ganzen Zahlen entsprechen. Auf Frequenzen und Tonhöhen trifft das Weber-Fechnersche Gesetz aus der Sinnesphysiologie präzise zu. Es besagt, dass zwischen der Intensität eines physikalisch messbaren Sinnesreizes und der Stärke der Empfindung, die von diesem Reiz ausgelöst wird, eine zahlenmäßige Beziehung besteht. So kommt die Logarithmusfunktion ins Spiel. Und auf

der Suche nach praktikablen Tonsystemen bekommt man es bei weiterer Analyse mit Primzahlen und Zahlentheorie zu tun.

Vermischung der Sinne

Einen zweiten Konnex stellt die mathematische Musiktheorie her, die musikalische Strukturen mit mathematischen Mitteln beschreibt. Noch mehr fasziniert Winkler aber eine dritte Verbindung zwischen den beiden Welten: „Man könnte sie ‚synästhetisch‘ in einem erweiterten Sinn nennen.“ Das griechische Wort Synästhesis bedeutet „zeitliches Zusammenfühlen“ – wie es etwa auftritt, wenn akustische Reize auch visuelle Eindrücke hervorrufen. Menschen, die mit musikalischen Klängen auch Farben verbinden, sind typische Beispiele von Synästhetiker_innen. Dass dieses Phänomen gar nicht selten ist, zeigt sich am musiktheoretischen Terminus „chromatisch“. - - - - ➔

----- ➔ Nimmt man die Mathematik als „abstrakten Sinn“ hinzu, so fügt sich ein, was Winkler als höchst subjektive Erfahrung beschreibt: „Ich assoziiere mit Mathematik und Musik sehr ähnliche ästhetische Erlebnisse, in denen Sinnliches mit Abstraktem verschmilzt.“ Der besondere Reiz dieser Verbindung hänge vermutlich damit zusammen, dass eine objektive Verwissenschaftlichung dieser Phänomene (noch?) nicht in Sicht ist. „Möglicherweise ist da eher die Literatur zuständig. Ich denke etwa an eine Synthese der berühmten Passage über Beethovens letzte Klaviersonate op.111 in Thomas Manns ‚Doktor Faustus‘ mit jener über die komplexen Zahlen in Robert Musils ‚Die Verwirrungen des Zöglings Törleß‘.“ In der Synästhesie sieht Winkler am ehesten eine Wirkung der Musik auf seine Arbeit: „Die Musik hilft mir bei der Entwicklung ästhetischer Sensorien, und diese wiederum prägen so etwas wie einen mathematischen Geschmack. Denn besonders in der reinen Mathematik hat ‚gut‘ sehr viel mit ‚ästhetisch‘ zu tun.“

Freiheit der Gedanken

Anstatt über seine wissenschaftlichen Forschungsarbeiten zu Spezialthemen vor allem aus den Bereichen Zahlentheorie, Algebra, Maßtheorie und Topologie zu sprechen, erklärt der TU-Forscher und Professor lieber, was ihm generell am Herzen liegt: „Inhaltlich geht es in der Mathematik vor allem um die Verbindungen zwischen ihren vielfältigen Ideen, also um ihre inneren Querbezüge.“ So können Einsichten aus einem Kontext in einen scheinbar ganz anderen übersetzt und dort nutzbar gemacht werden. Möglich ist dies vor allem aufgrund der Tendenz der Mathematik zu begrifflicher Abstraktion. Damit geht eine Ausweitung des Geltungsbereichs mathematischer

„Die Mathematik interessiert sich nicht nur für das Reale, sondern auch für alles Denkbare – mit hochrelevanten Resultaten für die Realität.“

Reinhard Winkler

REINHARD WINKLER

Studium der Technischen Mathematik (1982–1987), Promotion (1988), Habilitation (1994), beschäftigt an der TU (seit 1987) und an der Österreichischen Akademie der Wissenschaften (1989–2002). Seit 1997 außerordentlicher Professor am Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie der Fakultät für Mathematik und Geoinformation der TU Wien. Ehrenamtlich tätig im math.space (2007–2014) sowie aktuell im TUForMath, zuständig für reine Mathematik und Bezüge zu Philosophie, Kunst und Kultur.



Ergebnisse einher. „Diese Ergebnisse haben kraft der mathematischen Methode, die nur logisch zwingende Schlüsse verwendet, einen Grad von Verlässlichkeit, den andere Disziplinen grundsätzlich nicht erreichen können, siehe Falsifikation empirischer Theorien.“ Präzision und Klarheit in der Begriffsbildung sowie Sorgfalt bei logischen Schlüssen sind Tugenden der Mathematik, von denen Winkler sich im Sinn einer aufgeklärten Gesellschaft auch in den meisten anderen Bereichen wesentlich mehr wünschen würde: „Für unsere reale Lebenswelt sind unzählige Resultate der Mathematik von höchster Relevanz. Zugleich interessiert sich die Mathematik nicht nur für das Reale, sondern für das Denkbare. Die resultierende Freiheit der Gedanken bewirkt, dass die Mathematik der Vorstellungskraft und der Fantasie Flügel verleihen kann.“

Vermittlung eines Kulturguts

Dass die Mathematik für viele Menschen in der Schule das Angstfach schlechthin darstellt und womöglich lebenslang negativ konnotiert bleibt, ist Winkler natürlich bewusst. Eine von vielen Chancen, dies zu ändern, sieht er in der Verbindung mit Musik: „Es liegt nahe, die Macht der Musik im Unterricht einzusetzen, um die Mathematik auch bei jenen, die damit bisher Prob-

Faszination Mathematik

Offenbarungen einer erkenntnisreichen Geisteshaltung

„In der Schule fiel mir Mathematik leicht und es waren wohl die damit verbundenen Erfolgserlebnisse, die mein Interesse weckten. Das Gefühl, Mathematik müsse man ‚nur verstehen‘ und nicht ‚auswendig lernen‘, war mitentscheidend für meine Studienwahl. Als gar so leicht erwies sich das Studium zwar nicht, ich empfand aber schon die ersten Wochen als fantastische Offenbarung einer neuen, erstrebenswerten Geisteshaltung. Im Lauf der Zeit lernte ich nach und nach vielfältige Facetten der Mathematik kennen, deren Zusammenspiel ich besonders faszinierend finde. Darüber hinaus geht es mir um die erkenntnistheoretischen Lehren, die wir aus der Mathematik ziehen können. Da ist auch viel Anthropologie dabei, Schlagwort evolutionäre Erkenntnistheorie. Denn die Mathematik reflektiert genuin menschliches Denken und zeigt, welche Formen es annimmt. Einerseits, wenn man ihm freien Lauf lässt, und andererseits, wenn Menschen sich aufgrund äußerer Notwendigkeiten genötigt sehen, die Realität geistig zu verarbeiten.“

leme gehabt haben, mit positiven Emotionen in Verbindung zu bringen.“ Selbst wenn sich der TU-Forscher nicht als Didaktiker im engeren Sinn betrachtet, ist ihm die Vermittlung von Mathematik ein großes Anliegen. „Seit einem Jahr läuft bei uns das TU-Forum Mathematik, das sich um die Popularisierung von Mathematik auch als Kulturgut bemüht. Daran bin ich recht intensiv beteiligt“, so Winkler. „Konkret kooperieren wir mit dem Museum für Moderne Kunst. Das Programm TUForMath im mumok gestalte ich gemeinsam mit Patrick Puls, einem unglaublich feinsinnigen und universell gebildeten Kunstvermittler, der mehrere Studien absolviert und auch ein tiefes Verständnis für Mathematik hat.“ In zweistündigen Workshops für Klassen ab der 11. Schulstufe werden Führungen durch Ausstellungen organisiert, um die Themen in der Folge mit Mathematik in Verbindung zu bringen. Auch an der TU Wien selbst geht Winkler seinem Vermittlungsauftrag nach, etwa mit der experimentellen Vortragsreihe „Ein mathematisches Perlengeflecht“. Das Besondere daran: Angesprochen werden sowohl Studierende der Mathematik als auch interessierte Laien. ●

Giulia
sucht neue KollegInnen

**Ich bin IT-Fachfrau.
Und entwickle schon heute
die Lösungen für morgen.**

Von Fahrplänen bis Messpunkte: Zahlen, Daten und Algorithmen helfen uns dabei unsere Systeme stetig zu optimieren und Abläufe zu verbessern. Um auch in Zukunft die Menschen und die Umwelt zu unterstützen, brauchen wir deine Fähigkeiten. Jobs mit Sinn: Jetzt auf karriere.oebb.at als AbsolventIn oder SpezialistIn für die Bereiche Informations- und Datenmanagement bewerben.

HEUTE. FÜR MORGEN. FÜR UNS.

@unsereOEBB

Konstrukt oder Natur – Mysterium Mathematik

Ist Mathematik eine Erfindung des Menschen oder eine dem Universum innewohnende Logik? Die Frage entzweit die Wissenschaft. Vier Beispiele, die für Zweites sprechen.

Flüsse mit π -Instinkt, Blumen, die Folgen folgen, Primzahlen-zikaden und außerirdische Zahlenmusik.



Pi im Fluss mit der Natur

Dividiert man den Umfang eines Kreises durch seinen Durchmesser, stößt man unabhängig von der Größe des Kreises auf die immer selbe Zahl von gerundet 3,14. Die Bezeichnung mit dem griechischen Buchstaben Pi wurde erstmals 1647 verwendet. Über eine faszinierende Analogie aus dem Reich der Natur berichtete rund 350 Jahre später, 1996, der Geologe Hans-Henrik Stølum, nachdem er an der Universität von Cambridge die Frage der Mäanderbildung von Flüssen aus chaostheoretischer Sicht untersucht hatte. Sein Interesse galt vor allem dem Wechselspiel zwischen der Ausbildung von gekrümmten Flussverläufen und Flussarmen, die sich vom Hauptstrom lösen und zu Stillgewässern werden. Stølum hat bei Computersimulationen herausgefunden, dass sich das Mäandern von Flüssen im Lauf der Zeit immer auf einen Wert einpendelt, der in der Folge stabil bestehen bleibt. Geometrische Untersuchungen im Amazonasgebiet bestätigten seine Simulationen. Dividiert man die Länge eines Flussverlaufs durch die Luftlinienentfernung von Quelle und Mündung, stößt man ziemlich exakt auf die Zahl 3,14. Das erledigt die Natur von selbst, unabhängig von der Mathematik.

Die Logik der Pflanzen

Lilien haben drei Blütenblätter, Butterblumen fünf, Ringelblumen 13, Astern 21 und die meisten Gänseblümchen 34, 55 oder 89. Bei Sonnenblumen sind die Kerne im Korb in einer besonderen Art und Weise angeordnet. Sie formen Spiralen, die sich nach links und nach rechts drehen, im Verhältnis 21 zu 34, 34 zu 55 oder 55 zu 89. Die gleichen Verhältniswerte bei den Spiralbildungen gelten für Pinien- oder Tannenzapfen, bei Palmen, beim Kohl oder bei der Ananas. Seltene Ausnahmen bestätigen die Regel. Alle Zahlenwerte entsprechen benachbarten Zahlen aus einer besonderen Zahlenfolge, die auf dem Prinzip fußt, dass die beiden vorangegangenen Zahlen in ihrer Addition immer die nächste Zahl ergeben: 1 - 1 - 2 - 3 - 5 - 8 - 13 - 21 - 34 - 55 - 89 usw. Formuliert hatte sie im 13. Jahrhundert der italienische Rechenmeister Leonardo da Pisa, auch Fibonacci genannt, als er ein Rechenbeispiel lösen musste. Beobachtungen der Natur waren seinen Überlegungen nicht vorausgegangen.

Tierische Vorliebe für Primzahlen

Alle 17 Jahre werden die Menschen im US-Bundesstaat Tennessee Zeugen eines höchst ungewöhnlichen Naturschauspiels. Quasi über Nacht tauchen Myriaden von Zikaden auf, verschwinden einige Wochen danach,

um exakt 17 Jahre später wieder an Ort und Stelle zu sein. Seit 1634 hat sich das Spektakel in 354 Jahren 22-mal wiederholt, exakt alle 17 Jahre. Von anderen Zikadenarten wird rund um die Welt berichtet, dass sie einen Sieben- oder 13-Jahres-Zyklus verfolgen. Und das hat einen guten, logischen Grund. 7, 13 und 17 sind Primzahlen, also nur durch sich selbst und eins teilbar. Tritt ein Ereignis im Primzahlenzyklus auf, gibt es weniger Überschneidungen mit anderen Zyklen. Als Rechenbeispiel: 13-Jahres- und Zehn-Jahres-Zyklen kreuzen sich nur alle 130 Jahre, bei 15 (keine Primzahl) und zehn hingegen bereits alle 30 Jahre. Mit ihrem Primzahlenzyklus schützen sich Zikaden demnach wesentlich länger vor Fressfeinden, die ihren eigenen Mehrjahresrhythmus verfolgen. Zwei Wissenschaftler des Max-Planck-Instituts für molekulare Physiologie, Mario Markus und Oliver Schulz, gingen der Sache 2002 in einer Studie auf den Grund. Ihre Conclusio: Rutschen Beutetiere durch einen genetischen Zufall in einen Primzahlenzyklus, erkennen sie das als Glücksfall und bleiben dabei. Eine Einrichtung der Evolution, fernab vom Matheklassenzimmer.

Botschaften für Außerirdische

Seit 2012 durchfliegt die 1977 auf den Weg geschickte Raumsonde Voyager 1 den Raum jenseits unseres Sonnensystems, seit Ende 2018 auch Zwillingsschwester Voyager 2. Etwa 18 Milliarden Kilometer von der Erde entfernt durchkreuzen die beiden einzigen menschengemachten Objekte, die je die Heliosphäre der Sonne verlassen haben, mit rund 17 Kilometer pro Sekunde den Raum der Welt. Mit an Bord sind zwei Schallplatten, die Musik, Sprache und Geräusche der Erde enthalten. Die Vision dahinter: Die irdische Botschaft möge von Außerirdischen entdeckt und verstanden werden. Ein wesentliches Kriterium bei der Musikauswahl war, ob sie eine mathematische Aussage hat. Die Wahl fiel deshalb unter anderem auf Musik von Johann Sebastian Bach, laut Wissenschaftler_innen eine mehr oder weniger codierte, symmetrische Musiksprache, die vielleicht nicht nur von Menschen entschlüsselt werden kann. Bestückt wurden die Schallplatten zudem mit einfachen mathematische Gleichungen, darunter $2 \times 3 = 6$. Dazu der Kosmologe Max Tegmark vom Massachusetts Institute of Technology (MIT): „Unser gesamtes Universum ist nichts anderes als Mathematik. Das Erkennen mathematischer Zusammenhänge ist ein direkter Einblick in die Bedingungen unserer Existenz, Mathematik die universale Sprache des Universums – und damit der beste Weg, mit Außerirdischen in Kontakt zu treten.“



Bevölkerungs-
prognosen fundieren
auf mathematischen
Prinzipien, u. a.
auf Konzepten der
Matrizen- oder
Wahrscheinlichkeits-
rechnung.



Demografie & Wirtschaft, verknüpfte Welten

Ohne mathematische Methoden und Modelle können Prozesse der Demografie weder schlüssig dargestellt, noch vorhergesagt werden. Einblicke in die Arbeit am TU-Institut für Stochastik und Wirtschaftsmathematik, Forschungsbereich Ökonomie.

Will man die Rolle der Mathematik in der Demografie beschreiben, hält man sich am besten an eine Aussage von Jim Vaupel, Gründungsdirektor des Max Planck Institute for Demographic Research, MPIDR: „Unser Interesse gilt Geburten, Sterbefällen und der Mathematik.“ Laut Vaupel sind mathematische Methoden und vertrauenswürdige Daten die zwei fundamentalen Säulen der demografischen Forschung. Das Ziel formaler Modelle in der Demografie (Mortalitäts-, Fertilitäts-, Heiratsmodelle etc.) ist es zum Beispiel, Gesetzmäßigkeiten im Alters- und Zeitverlauf demografischer Prozesse mathematisch zu erfassen. Solche Modelle helfen, die zugrundeliegenden Mechanismen besser zu verstehen, Prozesse zu rekonstruieren, wenn Daten nicht vorhanden sind, oder diese zu beschreiben bzw. vorherzusagen.

Realistische Komponente

Wie sich demografische Prozesse auf ökonomische Prozesse auswirken und wie sich diese Auswirkungen in Modelle gießen lassen, sind die Fragestellungen, denen am TU-Institut für Stochastik und Wirtschaftsmathematik die Leiterin des Forschungsbereichs Ökonomie, Alexia Fürnkranz-Prskawetz, ----- ➔

„Ich versuche, ökonomische Modelle um eine realistische Darstellung der demografischen Komponente zu erweitern.“

Alexia Fürnkranz-Prskawetz

----- ➔ nachgeht: „Insbesondere versuche ich, ökonomische Modelle um eine ‚realistischere‘ Darstellung der demografischen Komponente zu erweitern.“ So werden etwa die Altersstruktur und Heterogenität der Bevölkerung nach sozioökonomischen Merkmalen wie Bildung, Gesundheit und Arbeitsmarktpartizipation modelliert. Das theoretische Konzept stellen „Lebenszyklusmodelle“ dar. Individuen bzw. Haushalte optimieren bei einer gegebenen Budgeteinschränkung ihre Ziele über ihren Lebenszyklus, indem sie die optimale Wahl von u. a. Konsum, Sparen, Bildungsinvestition, Arbeitsmarktpartizipation, Gesundheitsinvestition, Pensionsantrittsalter etc. wählen. Alle diese Entscheidungen werden nach Alter variieren und wiederum von Kennzahlen wie Löhnen, Zinssätzen etc. beeinflusst. Diese hängen ihrerseits vom altersspezifischen Nachfrageverhalten der Haushalte und institutionellen Rahmenbedingungen ab. Zusätzliche Komplexität entsteht, wenn sogenannte Peergroup-Effekte miteinbezogen werden, also wenn das eigene Verhalten durch jenes von anderen demografischen Gruppen beeinflusst wird.

Am Beispiel Wirtschaftswachstum

Welche Aussagekraft die mathematischen TU-Modelle haben, zeigt sich beispielhaft beim Thema der Auswirkungen der demografischen Veränderung auf das Wirtschaftswachstum. Vielfach wird von Expert_innen angenommen, dass fallende Geburten- und Mortalitätsraten und die damit einhergehende Bevölkerungsalterung negative Konsequenzen für das Wirtschaftswachstum haben. Eindeutige empirische Befunde dazu fehlen allerdings. Zudem liefern existierende ökonomische Modelle durchaus widersprüchliche Aussagen zu dieser Debatte. „Da die momentane demografische Entwicklung mit Geburtenrückgang, steigender

Lebenserwartung und Bevölkerungsalterung für die Wirtschaftswissenschaften eine besondere Situation darstellt, ist es uns wichtig gewesen, alternative Modellansätze zu berechnen – mit dem Ziel, zu zeigen, wie der demografischen Herausforderung begegnet werden kann“, so Fürnkranz-Prskawetz. Die Ergebnisse der theoretischen Überlegungen zeigen, dass sich ein Rückgang der Geburtenraten nicht zwangsläufig negativ auf die wirtschaftliche Lage auswirken muss. Durch eine höhere Investition in Bildung und einen Anstieg der Kapitalausstattung können daraus sogar positive Effekte auf das mittelfristige Pro-Kopf-Wirtschaftswachstum resultieren. Diesen positiven Impuls gilt es zu nutzen, wenn die Nachhaltigkeit des Sozial- und Wirtschaftssystems sichergestellt werden soll. „Wie aus unserem Modell aber ebenfalls eindeutig hervorgeht, würden manche Bevölkerungsgruppen von diesem mittelfristigen Aufschwung nicht profitieren, etwa ältere Arbeitnehmer_innen“, so die TU-Forscherin. Mit flankierenden Politikmaßnahmen könnten diese negativen Effekte jedoch abgeschwächt werden.

Reformprojekt

In der Gruppe rund um Alexia Fürnkranz-Prskawetz hat man sich in den letzten Jahren u. a. auch mit Agglomerationsprozessen in alternden Gesellschaften (Zentrale Fragestellung: Wie beeinflussen demografische Strukturen die räumliche Konzentration wirtschaftlicher Aktivität?) und der Umverteilung von Ressourcen über den Lebenszyklus (Beschreibung und Analyse des österreichischen Sozialversicherungssystems und Vergleich mit anderen europäischen Ländern) beschäftigt. Aktuell arbeitet man im Rahmen eines von der Oesterreichischen Nationalbank finanzierten Projekts am Thema Reformen sozialer Sicherungssysteme in heterogen alternden Bevölkerungen. „Die Alterung der

europäischen Bevölkerung führt zu einer Änderung des Verhältnisses zwischen der arbeitenden Bevölkerung und jener im Ruhestand. Gleichzeitig wachsen die sozialen Unterschiede in der Mortalität. Um das soziale Sicherungssystem nachhaltig zu gestalten, sind Reformen zwingend. Solche Reformen müssen aber die Heterogenität in der individuellen Alterung berücksichtigen“, erläutert Fürnkranz-Prskawetz die Ausgangslage. Im Projekt werden nun Modelle entwickelt, um die Nachhaltigkeit des Pensionssystems zu untersuchen, unter Berücksichtigung sozialer Unterschiede in der Sterblichkeit. Der Fokus liegt zum einen auf dem Zusammenhang von Langlebigkeit, Bildung und Pensionsantritt für Personen mit unterschiedlichen Fähigkeiten und gesundheitlichen Konstitutionen. Zum anderen wird die Wirkung von sozialen Sicherungssystemen auf Lebenszyklusentscheidungen bei unterschiedlicher Lebenserwartung unter die Lupe genommen. Einen weiteren Forschungsschwerpunkt stellen die Umverteilungseffekte dieser Systeme zwischen Personen dar, die punkto Einkommen und Lebenserwartung differieren.

Das mathematische Werkzeug

„Wir arbeiten mit nicht linearen Differential- und Differenzgleichungen, um die Änderung der Variablen über die Zeit in unseren Modellen zu beschreiben. Da neben der Zeit, Alter eine der wichtigsten demografischen Variablen darstellt, betrachten wir auch partielle Differentialgleichungen in altersstrukturierten Modellen“, erklärt Fürnkranz-Prskawetz die Wahl der zugrundeliegenden mathematischen Methoden. Um die optimalen Pfade der Modellvariablen zu berechnen, werden dynamische Optimierungsmodelle in diskreter oder kontinuierlicher Zeit angewendet. In der Arbeit zu Reformen sozialer Sicherungssysteme in heterogen alternden Bevölkerungen betrachten die TU-Forscher_innen allgemeine Gleichgewichtsmodelle, in denen individuelle Entscheidungen (über Bildung, Arbeitsmarktpartizipation etc.) dynamisch mit makroökonomischen Rahmenbedingungen (Löhnen, Zinssätzen, Pensionsansprüchen etc.) modelliert werden. „Die Interaktion von Mikro- und Makroverhalten ist in unseren Arbeiten wichtig“, so Fürnkranz-Prskawetz. Es wäre falsch, von individuellen Entscheidungsmechanismen direkt auf das Makroverhalten einer Ökonomie zu schließen. Umgekehrt wäre es ebenso falsch, Makrogrößen bei Entscheidungsprozessen auf der Mikroebene zu ignorieren. ●

ALEXIA FÜRNKRANZ-PRSKAWETZ

Studium der Technischen Mathematik (1984–1989), Promotion (1992), Habilitation (1998), Forschungsgruppenleiterin am MPI Rostock (1998–2003), Direktorin am Institut für Demografie (stv. 2003–2015, seit 2016), Professorin für mathematische Ökonomie am Institut für Stochastik und Wirtschaftsmathematik der TU Wien (seit 2008), Wirkliches Mitglied der Österreichischen Akademie der Wissenschaften (seit 2011), Mitglied der Leopoldina (seit 2015), im Forum TUForMath zuständig für Mathematik in Gesellschaft und Wirtschaft.



Faszination Mathematik

Das Besondere ist die exakte Sprache

„Mein Interesse für Mathematik begann in der AHS. Es war mein Lieblingsfach, das Lösen von mathematischen Aufgaben hat mir einfach Spaß gemacht. Meine Lehrer und das Verständnis meiner Familie haben mich hier sehr bestärkt. Ich kann mich noch erinnern, dass ich während der AHS Oberstufe auch Bücher zur Geschichte der Mathematik gelesen habe. Besonders spannend habe ich es gefunden, als wir einige einfache Beweise im Unterricht durchgenommen haben. Ebenso hatte ich große Freude daran, anderen Mathematik zu erklären. Wenn man anderen etwas erklärt, lernt man es am besten. Diese Erfahrung mache ich heute noch. Jede Vorlesung und jeder Vortrag über die eigene Forschung sind ein großer Gewinn für mich.“

Nach der Matura habe ich mich für das Mathematikstudium an der TU Wien entschieden, da das Studienfach Technische Mathematik unterschiedliche Anwendungen (in der Informatik, Ökonomie, Physik etc.) angeboten hat.

Der Reiz der Mathematik liegt für mich in der Tatsache, dass das Verständnis einiger Grundregeln ausreichend ist, um logisch konsistent neue Zusammenhänge ableiten zu können. Die exakte Sprache der Mathematik ist besonders faszinierend. In meinem eigenen Forschungsgebiet, der Bevölkerungsökonomie, zeigt sich dies, wenn wir Zusammenhänge von ökonomischen und demografischen Variablen besser zu verstehen versuchen. Ein formales Modell zwingt uns, unsere Hypothesen mathematisch konsistent zu formulieren und erlaubt uns, Schlussfolgerungen korrekt herzuleiten.“

Verantwortung, kritisch reflektiert

Das TU Wien Symposium „Menschen und Maschinen. Visionen unserer digitalen Zukunft.“ lud zum Diskurs über eine Entwicklung, die gestaltet werden will.

An Maschinen als Bestandteil des Alltags haben sich Menschen längst gewöhnt. Relativ neu ist, dass sie mit ihnen immer häufiger interagieren, etwa per Sprachkommandos an Smartphones, Staubsaugerroboter oder intelligente Lautsprecher wie Alexa. Auch in der Arbeitswelt, in digitalisierten Büros ebenso wie in intelligenten Fabriken, wird zwischen den Welten kommuniziert. Aber was bedeutet es, mit Maschinen zu leben? Wie schlau ist Künstliche Intelligenz? Was passiert mit den automatisch entstehenden Spuren im Netz? Und besteht die Gefahr, dass eines Tages der Mensch zum Befehlsempfänger der Maschine wird? Es waren kritische Fragen, die Ende Oktober im Kuppelsaal der TU Wien beim eintägigen Symposium „Menschen und Maschinen. Visionen unserer digitalen Zukunft.“ auf dem Programm standen.

Fakten statt Bauchgefühl

Ob Robotik, Künstliche Intelligenz, autonomes Fahren oder Datenvisualisierung – wird über Themen der Digitalisierung, Industrie 4.0 oder Arbeit 4.0 diskutiert, herrscht in der Regel kein Mangel an optimistischen und pessimistischen Visionen. Was zwischen Utopien und Dystopien zu kurz kommt, ist der faktenbasierte Zugang zum Thema, den es laut Expert_innen braucht, um informierte Entscheidungen treffen zu können. Wer einen Blick in die Zukunft von Möglichkeiten und Risiken werfen will, sollte sich mehr auf eine kritische Analyse denn auf ein Bauchgefühl stützen. „Die digitale Zukunft muss bewusst gestaltet werden“, so ein Kernsatz des Symposiums, bei dem der Begriff der Verantwortung zu einem zentralen Punkt erhoben worden ist. Daran geknüpft sind weitere Fragen. Sollen Forscher_innen bestimmte Technologien entwickeln, nur weil sie dazu in der Lage sind, gleich wohin der Weg führt? Oder geht es um



Maschinen und Menschen waren auch im Kuppelsaal der TU Wien an einem Ort vereint.

Technik, die von Menschen für Menschen gemacht wird, also um die Arbeit an Innovationen, die sich an realen Bedürfnissen bestehender Zielgruppen orientieren?

Frauen im Diskurs

Die Antworten darauf sind schwierig, vor Fehlentwicklungen ist man nicht gefeit. Eine davon besteht laut der Organisatorin von „Menschen und Maschinen“, Brigitte Ratzer, in der Nichtbeachtung von Frauen im Diskurs rund um die Digitalisierung. „Die Interessen von Frauen werden heute viel zu wenig berücksichtigt, ebenso werden die Einwände von Expertinnen nicht gehört“, betonte die Leiterin der Abteilung Genderkompetenz der TU Wien. „Die Sichtweisen von Frauen sind sehr wichtig, immerhin geht es um die Aushandlung der Gestaltung unserer Zukunft, darum, wie wir kommunizieren, arbeiten, mobil sind oder unsere Freizeit verbringen.“ Viele Entwicklungen würden ausschließlich von männlichen Investoren bezahlt und von männlichen Teams vorangetrieben werden. Um im Wettbewerb bestehen zu können, brauche es jedoch mehrere Blickwinkel. Die digitale Zukunft betrifft alle Menschen und benötigt Perspektiven, die es ermöglichen, ein gemeinsames Bild zu entwickeln. Nur so kann laut Ratzer ein Maximum an Nutzen für eine möglichst breite Gruppe erzielt werden.

Haben Roboter Gefühle?

„Die TU Wien feiert 2019 das Jubiläum ‚100 Jahre FRAUENstudium‘. Es ist sehr erfreulich, dass es uns zu diesem Anlass gelungen ist, so viele exzellente Frauen aus unterschiedlichsten Disziplinen auf die Bühne zu holen“, sagte Anna Steiger, Vizerektorin für Personal und Gender, bei der Eröffnungsrede. Zu den Expertinnen, die mit ihrer Forschung einen bedeutenden Beitrag für die Gesellschaft leisten, gehört beispielhaft die Robotikpionierin Nadia Magnenat Thalmann. Die schweizerisch-kanadische Wissenschaftlerin, Hochschullehrerin, Direktorin des Instituts für Medieninnovation (IMI) in Singapur an der Nanyang Technological University und Gründerin des MIRALab Forschungslabors an der Universität Genf hat mit „Nadine“ einen einzigartigen sozialen Roboter erschaffen, der nichts mehr mit veralteten Vorstellungen von Robotern zu tun hat. „Nadine sieht menschlich aus und kann mit ihrem Gegenüber interagieren. Sie spricht verschiedene Sprachen, erkennt Gesichter, erinnert sich an Fakten und zeigt sogar Emotionen – wiewohl diese simuliert sind, immerhin ist Nadine eine Maschine“, so

„Wir müssen uns als Forscher_innen unserer Verantwortung in Fragen der Digitalisierung sehr bewusst sein.“

Nadia Magnenat Thalmann

Thalmann, die in ihrer Keynote kritische Themen erörtert hat. Was passiert, wenn derartige soziale Kamerad_innen uns immer öfter begleiten? Wie wird sich die Gesellschaft verändern? „Selbst wenn es darauf noch keine konkreten Antworten geben kann, sollten wir Forscher_innen uns unserer Verantwortung im Umgang mit diesen Fragen bewusst sein“, betonte Thalmann und nahm damit ein zentrales Ergebnis des Symposiums vorweg: Es ist nicht notwendig, sich in Dystopien zu verlieren, wenn kritische Stimmen in den Diskurs miteinbezogen werden, um gemeinsam an einer positiven Entwicklung zu arbeiten. ●



dietechnik.at

100
Jahre 1919–2019
Frauenstudium

© Luiza Puiu

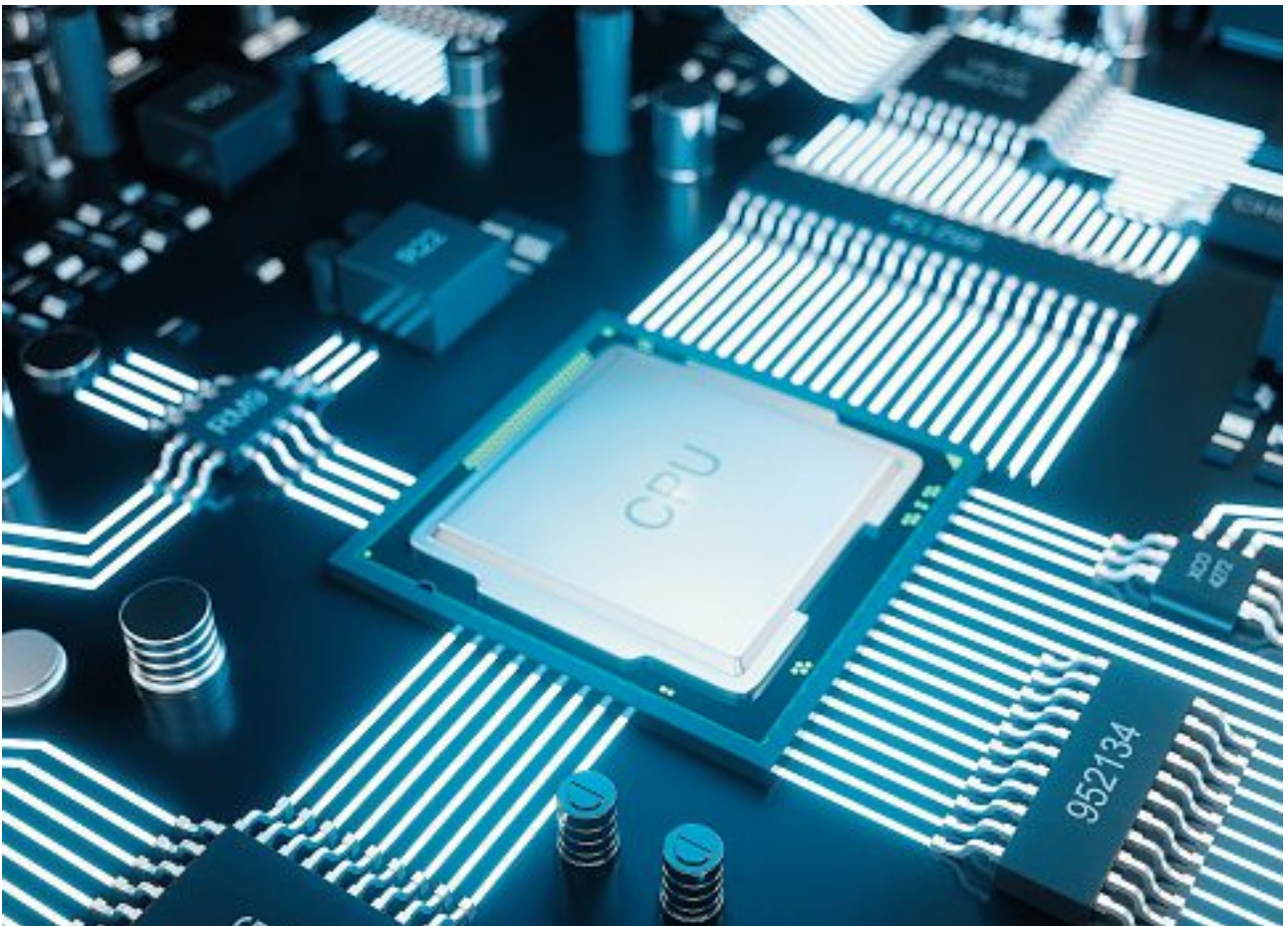
IVONA BRANDIC
TU-PROFESSORIN
FÜR E-COMMERCE

die Tech·nik

Wie man Computer Gleichungen lösen lässt

Bei der numerischen Mathematik setzt man mithilfe von Computern auf die näherungsweise Berechnung von Lösungen. Praktische Anwendungen zeigen: Die Verantwortung der Forscher_innen ist hoch.

Wie steigert man die Leistung von Computerprozessoren? Ein Fall für Mathematiker_innen.



Als im Jahr 1823 der schwedische Mediziner und Chemiker Jöns Jakob Berzelius als Erster die elementare Natur des Halbmetalls Silicium erkannte und ihm seinen Namen gab, schlug die Geburtsstunde der Halbleitertechnik. Die breite technische Nutzung der Halbleiter, die bezüglich ihrer elektrischen Leitfähigkeit zwischen der von Isolatoren und der von Leitern liegen, hat nach der Erfindung des Transistors (1947) begonnen, einem elektronischen Schaltelement, das zum Steuern und Verstärken von Strömen oder Spannungen dient. Die Entwicklung von Mikroprozessoren, also kleinste Rechenmaschinen, führte schließlich dazu, dass es heute kaum noch ein technisches Gerät ohne Halbleiterelektronik gibt. Was Halbleiterbauteile aktuell als Bestandteile moderner Computerprozessoren leisten, hätten wohl weder Berzelius noch die Erfinder des Transistors oder die Entwickler der ersten Mikroprozessoren zu ahnen vermocht. Sie sind, einfach gesagt, unglaublich klein (nur wenige Millionstel Millimeter) und unglaublich schnell (bis zu 1000 Milliarden Rechenoperationen in einem Prozessor pro Sekunde).

Es geht noch schneller

Um die Performance von diesen Bauteilen im Sinn immer kleinerer Computer mit immer größerer Leistung noch weiter zu verbessern, sind theoretische Überlegungen und numerische Simulationen notwendig - eines der Hauptaufgabengebiete von Ansgar Jüngel, Leiter des Forschungsbereichs Analysis am TU-Institut für Analysis und Scientific Computing: „Wir haben zum Beispiel untersucht, welchen Einfluss die Temperatur auf den Fluss der Elektronen durch das Bauteil hat, und wir forschen zurzeit daran, inwiefern der Elektronenspin oder die Berücksichtigung von quantenmechanischen Effekten zu noch besseren Leistungen führt.“ Dazu wird das Bauteil mit mathematischen Methoden in viele kleine Dreiecke oder Tetraeder zerlegt und die mathematischen Gleichungen werden auf jedem dieser kleinen Gebiete mithilfe des Computers gelöst. Ziel ist es, Anwender_innen Hinweise zu geben, an welcher Stelle die Halbleiterbauteile verbesserungsfähig sind.

Unter sich bleiben oder vermischen

In Jüngels Forschungsgruppe werden mathematische Gleichungen, genauer gesagt partielle Differentialgleichungen, auch aus dem Anwendungsfeld biologischer Systeme mit mehreren Komponenten betrachtet. „Biologische Multispeziesysteme treten fast überall in der Natur auf, etwa Luft, die aus mehreren - - - - ➔

ANSGAR JÜNGEL

Studium Mathematik, Physik und Informatik (1985–1991), Promotion Mathematik (1994), Professor für Mathematische Analysis an der TU Wien (seit 2006), Leiter des Forschungsbereichs Analysis am TU-Institut für Analysis und Scientific Computing.



**„Die Kombination von
Mathematik, Physik und
Biologie verspricht neue
Synergieeffekte.“**

Ansgar Jüngel

Faszination Mathematik

Die Lust an der künstlerischen Komponente

„Die Mathematik hat für mich als Jugendlicher ursprünglich keinen überragenden Stellenwert gehabt. Zugesagt haben mir eher Kunst und Literatur. Einer meiner Mathematiklehrer legte allerdings großen Wert auf Anwendungen in der Mathematik, und diese Verknüpfung zum ‚Alltag‘ fand ich spannend. Der Lehrer hat Mathematik fast sichtbar gemacht. Diese Sichtweise hat sich in meiner Studienzeit (Mathematik, Physik, Informatik) fortgesetzt und letztlich auch in der Wahl meiner Forschungsthemen. Mathematik ist für mich sowohl ein Hilfsmittel und eine Sprache, um Naturereignisse besser beschreiben zu können, als auch ein Werkzeugkasten, deren Werkzeuge zuweilen eine große Ästhetik oder abstrakte Eleganz besitzen. Umso mehr macht es Spaß, an der Entwicklung dieser Werkzeuge mitarbeiten zu können. Tatsächlich besitzt die Mathematik für mich auch eine künstlerische Komponente: Interessante Mathematik überrascht, regt an und erzählt eine Geschichte.“

-----> Gasen besteht, oder Ökosysteme, die mehrere Tierpopulationen beinhalten. Ein aktuelles physikalisches Beispiel sind Lithium-Ionen-Batterien, bei denen der Transport der geladenen, beweglichen Ionen optimiert werden muss“, erklärt der Forscher. Das mathematische Problem besteht aus mehreren, manchmal vielen Gleichungen, die zunächst auf thermodynamische Korrektheit untersucht werden müssen. „Eines der Probleme, die wir zurzeit analysieren, ist das Verhalten der Ionen für lange Zeiten: Wie schnell konvergieren sie zu einem Gleichgewicht? Die Konvergenzrate ist ein Hinweis auf die Effizienz des Systems.“ Eine andere Fragestellung ist, inwiefern thermodynamische Prinzipien in biologischen Systemen eine Rolle spielen – hier müssen Mathematik, Physik und Biologie kombiniert werden, eine interdisziplinäre Herangehensweise, von der man sich in der Forschungsgruppe neue Synergien verspricht. Auch numerische Simulationen spielen eine große Rolle, etwa um zu verstehen, unter welchen Umständen sich Tierpopulationen vermischen oder ob die Spezies lieber unter sich bleiben wollen, Stichwort Segregation.

Diskrete Annäherung

„Viele physikalische Phänomene und technische Prozesse werden mithilfe von sogenannten partiellen Differentialgleichungen mathematisch modelliert“, sagt dazu Dirk Praetorius, Leiter des Forschungsbereichs Numerik. Seine Arbeitsgruppe (Professur für Numerische Analysis partieller Differentialgleichungen) befasst sich mit der effizienten Lösung mathematischer Gleichungen mithilfe eines Computers. „Will man diese am Rechner lösen, so muss man diese Gleichungen zunächst geeignet diskretisieren, zum Beispiel mit einer Finite-Elemente-Methode (FEM)“, so Praetorius. Vereinfacht erklärt bedeutet dies die Aufteilung der Berechnung in endlich viele kleine Teile (finite Elemente). Anstelle der kontinuierlichen Gleichung und Lösung wird so nur noch eine Annäherung betrachtet. Dabei muss (Schlagwort: Netzdichte des FEM-Gitters) entschieden werden, ob man mit möglichst vielen Elementen arbeitet, um die Genauigkeit der Simulation zu erhöhen, oder mit weniger Elementen, um den numerischen Aufwand geringer zu halten. „Die erste wesentliche Aufgabe der Numerischen Analysis ist der mathematische Nachweis, dass der Fehler zwischen exakter und diskreter Lösung verschwindet, wenn man das zugrundeliegende FEM-Gitter verfeinert. In der

DIRK PRAETORIUS

Studium Mathematik und lateinische Philologie (1993–2000), Promotion in Angewandter Mathematik (2003), Außerordentlicher Professor (2005–2017), Professor für Numerische Analysis von Partiiellen Differentialgleichungen an der TU Wien (seit 2017), Leiter des Forschungsbereichs Numerik am Institut für Analysis und Scientific Computing, Mitgründer von TUForMath, zuständig für Mathematik in Technik und Naturwissenschaften.

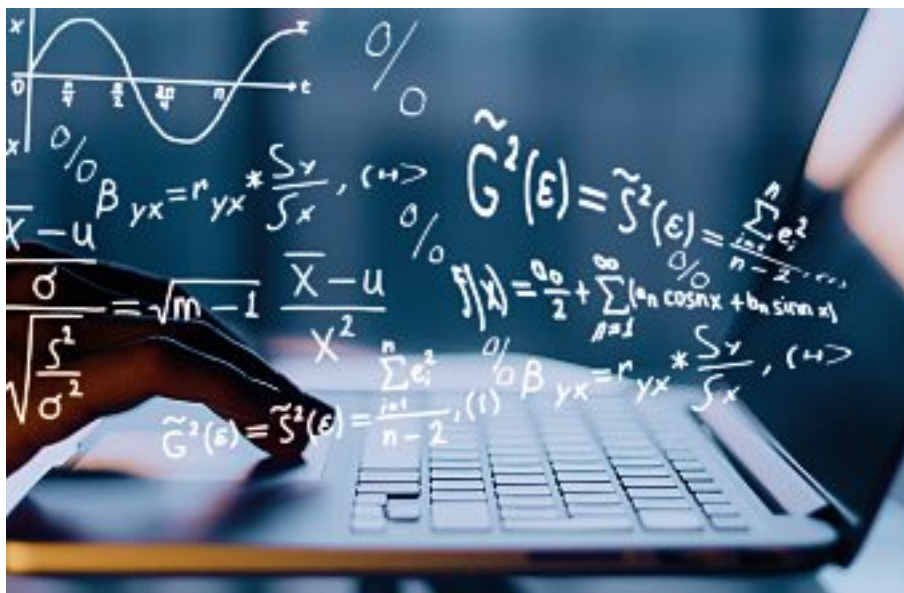


Faszination Mathematik

Genauigkeit, spielerische Ästhetik und die Begeisterung für rigorose Erklärungen

„Ich war in der Schulzeit in normalem Umfang an Mathematik interessiert und habe das Fach eher als Rechnen wahrgenommen. Nach dem Abitur habe ich Mathematik und Latein studiert, um Lehrer am Gymnasium zu werden. Nach anfänglichen Schwierigkeiten, mich in die formale Welt der universitären Mathematik einzufinden (ich habe Schulmathematik erwartet, aber etwas anderes bekommen), hat mich diese schließlich fasziniert und vermutlich auch verändert: die Genauigkeit, die Abstraktion, der Versuch, die wesentlichen Eigenschaften für eine Aussage herauszufiltern, die logische Konsistenz, die Ästhetik ‚hübscher‘ Argumentationen.

Nachdem ich mich im Masterstudium zunächst in der reinen Mathematik vertieft habe, habe ich mich ab der Promotion mit numerischer Mathematik beschäftigt: Wie kann man mathematische Gleichungen am Computer lösen? Welche Gleichungen kann man am Computer lösen? Was kann man über die Zuverlässigkeit und die Effizienz einer Computersimulation sagen? Mich fasziniert, wenn ich mit Mathematik rigoros erklären kann, warum ein Simulationsalgorithmus das richtige Ergebnis liefert und das möglicherweise auch noch in beweisbar optimaler Weise. Davor muss ich aber mathematisch fassen und begreifen, was das Richtige und was die optimale Weise überhaupt sind oder sein könnten. Da hat die Forschung auch etwas Spielerisches. Man sucht die Frage quasi simultan zur Antwort.“



In der Praxis führt die Finite-Elemente-Methode (FEM) zu Gleichungssystemen mit Hunderttausenden von Unbekannten, die mit dem Computer zu lösen sind.

Praxis führt die FEM zu großen Gleichungssystemen mit Hunderttausenden von Unbekannten“, so Praetorius. Um diese Gleichungssysteme mit dem Computer zu lösen, sucht und analysiert man Möglichkeiten, die „möglichst schnell“ einen „hinreichend genauen“ Lösungsvektor finden. Welche Bedeutung dem „hinreichend genau“ in der Praxis zukommen kann, zeigt ein Beispiel, das Praetorius gern bei seinen FEM-Vorlesungen bringt. 1991 brach der erste Bauabschnitt (Betonpfeiler und Plattformunterbau) der norwegischen Bohrrinsel Sleipner A bei einem Belastungstest in sich zusammen und verursachte einen Schaden von rund 700 Millionen Dollar. Die Ursache: Die mathematischen Berechnungen nach der Finite-Elemente-Methode waren fehlerhaft, die damaligen Rechner konnten die nötige Datenmenge zur Konstruktion nicht verarbeiten. „Mithilfe mathematischer Methoden – sogenannte A-posteriori-Fehlerabschätzungen – kann man heute dem Computer ein berechenbares Hilfsmittel geben, um eigenständig und zuverlässig zu entscheiden, wo das FEM-Gitter verfeinert werden muss, um solche Katastrophen zu verhindern“, erläutert Praetorius.

„Um komplexe Gleichungssysteme mit dem Computer zu lösen, suchen und analysieren wir Möglichkeiten, die ‚möglichst schnell‘ und ‚hinreichend genau‘ sein sollen.“

Dirk Praetorius

Förderungswürdige Forschung

In den letzten Jahren hat die Arbeitsgruppe rund um den TU-Forscher und -Professor wesentliche Beiträge zu solchen adaptiven FEM-Algorithmen erbracht. Für einige Modellprobleme konnten Algorithmen formuliert werden, die nicht nur das FEM-Gitter, sondern auch den Aufbau des Gleichungssystems und dessen Lösung steuern – die also nicht nur zuverlässige Näherungen bringen, sondern bei denen der Fehler mit der Rechenzeit sogar mathematisch beweisbar bestmöglich fällt.

Ein weiterer Forschungsschwerpunkt in den letzten Jahren war die gemeinsame Forschung mit den ehemaligen TU-Kollegen Dieter Süss (jetzt Uni Wien, Physik) und Thomas Schrefl (jetzt Donau-Universität Krems, Physik) zum Thema Mikromagnetismus, gefördert durch den FWF, aber auch durch zwei interdisziplinäre WWTF-Forschungsprojekte. „Zuletzt ging es dabei um wärmeunterstütztes Recording auf Festplatten. Während der Bedarf an Speicherplatz zunimmt, hat die herkömmliche magnetische Speicherung ihre Grenzen bereits erreicht. Die anhaltende Bedeutung der magnetischen Datenspeicherung wird vor allem durch die massive Datenspeicherung in der Cloud bestimmt“, erklärt Praetorius. Deshalb wird weltweit an ihrer Verbesserung gearbeitet. Die Entwicklung der nächsten Generation von Festplatten wird allerdings nur mit dem massiven Einsatz von Computersimulationen möglich sein. Am TU-Institut für Analysis und Scientific Computing ist man dafür bestens gewappnet. ●



Mathematische Berechnungen tun Not, wenn die Formen komplex und gekrümmt sein sollen.

Geometrisches Wissen in Formvollendung

Bei der Planung und Umsetzung spektakulärer Bauideen führt kein Weg an der Mathematik vorbei. An der TU Wien liefert ein eigenes Forschungszentrum rund um Gründer Helmut Pottmann das mathematische Fundament für die Kreativität von Architekt_innen.



**„Form, Statik, Mechanik,
Materialverhalten,
Fertigung – all das muss
bereits in frühesten
Planungsstadien
berücksichtigt werden.“**

Helmut Pottmann

vermehrt auftretenden freien Formen auf Probleme stößt, die am besten von Expert_innen verschiedener Bereiche gemeinsam gelöst werden“, sagt GCD-Mitgründer Helmut Pottmann.

Effizient und nachhaltig

Die notwendige Veränderung im Ablauf der Planung und Durchführung von Bauprojekten ist laut dem ehemaligen Leiter der TU-Forschungseinheit für angewandte Geometrie und heutigem TU-Gastprofessor ein zweiter wesentlicher Grund für das Miteinander der Fachbereiche: „Um effizienter und besser zu werden, ist es wichtig, dass bereits bei der ersten architektonischen Planung nicht nur die Form, also die Geometrie, sondern auch wichtige Aspekte von Statik, Mechanik, Materialverhalten oder Fertigung berücksichtigt werden.“ Gefragt ist dafür eine völlig neue Entwurfssoftware. „Die Probleme liegen zum Teil nahe an wichtigen Teilgebieten der Mathematik, wie etwa Differentialgeometrie und Optimierung. Es geht um die Entwicklung schneller Algorithmen und einer digitalen Echtzeitmodellierungssoftware. Mit der bestmöglich angepassten Mathematik wird so manches viel einfacher und effizienter lösbar“, so Pottmann. Zu verhindern sind mit dem effizienten Zusammenspiel von Technik und Mensch nicht zuletzt - - - - ➔

Wenn die Architektur auf komplizierte Formen setzt, können damit schon ab dem Zeitpunkt der Planung ebenso komplexe mathematische Aufgaben verbunden sein. An der TU Wien ist in diesem Kontext bereits vor fünf Jahren das Center for Geometry and Computational Design (GCD) gegründet worden, um die Zusammenarbeit von Forschungsteams aus Mathematik, Informatik, Architektur und Bauingenieurwesen (insbesondere Mechanik) zu fördern. „Die Idee dazu ergab sich aus unserer Forschung zur Architekturgeometrie. Es stellte sich heraus, dass die Realisierung der in der zeitgenössischen Architektur

HELMUT POTTMANN

Studium Mathematik und Darstellende Geometrie an der TU Wien (1977-1982), Promotion (1983), Habilitation (1986), Auslandsaufenthalte in Deutschland und den USA (1989-91), Professor an der Universität Hamburg (1991-92), seit 1992 ordentlicher Professor für Geometrie an der TU Wien, Aufbau eines Forschungszentrums (Visual Computing Center) an der King Abdullah University of Science and Technology (Kaust, Saudiarabien, 2009-2014, seit 2018 wieder dort tätig), Aufbau des Zentrums für Geometrie und Computational Design an der TU Wien (2014-2018).



Faszination Mathematik

Universelle Einsetzbarkeit, Bezug zur Kunst

„Ich komme aus einer Familie von Mathematiklehrern (Vater, Großvater) und interessiere mich seit meiner Schulzeit für Mathematik und auch für Kunst und Architektur. Daher wollte ich ursprünglich Lehramt Mathematik und Bildnerische Erziehung studieren. Zum Glück habe ich die Aufnahmeprüfung für letzteres Fach nicht geschafft und so Mathematik und Darstellende Geometrie (Lehramt) an der TU Wien studiert. Es ging alles viel schneller und einfacher als gedacht. An der Mathematik faszinieren mich vor allem der klare Aufbau und deren universelle Einsetzbarkeit. Für rein abstrakte Mathematik, die keinerlei sichtbaren Bezug zu Anwendungen oder anderen Theorien aufweist, kann ich mich weniger begeistern. Besonders hingezogen fühle ich mich zur Geometrie. Dort sehe ich meine Interessen für Mathematik und Kunst am besten vereint. Das Ergebnis geometrischer Studien sind nicht selten sehr ästhetische Formen. Möglichkeiten, diese physikalisch zu realisieren, finde ich besonders spannend. Insofern ist das Aufkommen geometrisch komplexer Formen in der Architektur ein Glücksfall gewesen, und es ist mir eine große Freude, in diesem Bereich meinen Beitrag leisten zu können.“

----- ➔ Kostenexplosionen wie beispielhaft jene bei der Errichtung der Hamburger Elbphilharmonie. Beim 2017 eröffneten Prestigebau belief sich die erste Kostenschätzung auf 77 Millionen Euro, geworden sind es rund 800 Millionen.

„Es geht übrigens nicht nur um ‚Freiformarchitektur‘, sondern auch um viel wichtigere Herausforderungen, die auf das Bauwesen zukommen“, spielt Pottmann etwa auf das Thema des nachhaltigen Bauens mit möglichst geringem Verbrauch von Ressourcen an, um umweltschonend Wohnraum für die wachsende Bevölkerung zu schaffen. Neueste Forschungen weisen auf die Bedeutung der Geometrie in diesem Bereich hin.

Ein Fall für die DDG

Wie Architektur und Teilgebiete der Mathematik aufeinandertreffen, zeigt sich etwa bei der Realisierung gekrümmter Oberflächen. Man kann sie nicht in einem Stück bauen, sondern muss sie in Paneele zerlegen. „Aus Kosten- und Planungsgründen muss selbst die kreativste Freiform aus möglichst einfachen und einheitlichen Bauteilen zusammengesetzt werden. Dies zu planen ist ein klarer Fall für die diskrete Differentialgeometrie. In dieser werden Kurven und Flächen diskretisiert, also rechnerisch in einfache, etwa ebene Elemente zerlegt. Das reduziert auch die zu berechnenden Variablen drastisch“, spricht Pottmann über ein relativ junges „Werkzeug“ der Mathematik. Klassische Theorien der Differentialgeometrie können auf geometrische Formen wie Kurven, gekrümmte Oberflächen oder auch höherdimensionale Gebilde nämlich nur angewendet werden, wenn diese glatt sind. Objekte einer Gebäudehülle haben an den Kanten, an denen zwei Paneele zusammenstoßen, jedoch einen Knickwinkel und sind somit nicht „differenzierbar“ (anschaulich formuliert: nicht hinreichend glatt).

Mit der diskreten Differentialgeometrie, die von Pottmann und seinem Team ständig weiterentwickelt wird, lassen sich hingegen Lösungen finden, am Beispiel eines konkreten Problems in der Freiformarchitektur: „Bei Stahl-Glas-Konstruktionen ist es sehr wünschenswert, dass die Stahlträger an einem Knotenpunkt nicht beliebig, sondern geordnet zusammenstoßen. Das klingt simpel – ist aber alles andere als einfach zu planen, wenn die Architektur einer frei fließenden Form folgt. Ein Fall für die DDG.“ Wichtige geometrische Eigenschaften der DDG helfen bei der Auslegung der Tragstruktur. Falls man bei der Gestaltung der Oberfläche noch Freiheiten hat, kann man dabei sogar den Materialbedarf der Tragstruktur minimal halten.

Neue Mathematik

Praxistaugliche mathematische Programme müssen demnach die Aufteilung von Formen in Paneele genauso erlauben wie die Auslegung einer Unterkonstruktion und die Berücksichtigung der Eigenschaften verschiedener Baumaterialien; und all das für spezifische geometrische Probleme. Generell hilft die Mathematik dabei, die vielen Einschränkungen (mögliche Abmessungen, maximale Belastungen, Fragen der Ästhetik,...) besser zu verstehen, in ihrem Zusammenspiel zu analysieren und dann Lösungen zu finden – mitunter als Kompromiss zwischen den Idealvorstellungen der Architekten und dem unter vernünftigem technischen und finanziellen Aufwand Machbaren. Fest steht: Komplizierte Projekte werden erst durch den Einsatz von Mathematik realisierbar.

Die Beziehung ist laut Pottmann übrigens keine einseitige: „Die Wechselwirkung zwischen mathematischer Theorie und den Anforderungen im Bauwesen ist bemerkenswert. Praxisrelevante Fragen aus der Architektur haben zur Entwicklung neuer Mathematik

„Es geht nicht nur um Freiformarchitektur, sondern auch um nachhaltiges Bauen.“

Helmut Pottmann

geführt.“ Umso wichtiger sei es, Mathematiker_innen für diese Art von Forschung zu interessieren: „Letztlich will man ja nicht nur Altbekanntes anwenden, sondern auch wissenschaftliche Fortschritte erzielen.“ Ein weiterer Schritt in diese Richtung ist die jüngste Entwicklung rund um das GCD. So hat sich das Zentrum gemeinsam mit Architekt_innen der TU Graz und der Uni Innsbruck beim Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung (FWF) um einen Spezialforschungsbereich (Advanced Computational Design) beworben und ist in der Endauswahl mit dabei. Die Entscheidung soll noch 2019 fallen. ●



100
Jahre 1919–2019
Frauenstudium

dietechnik.at

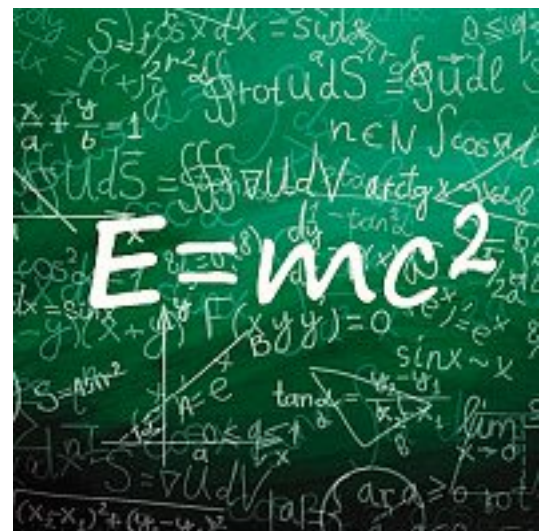
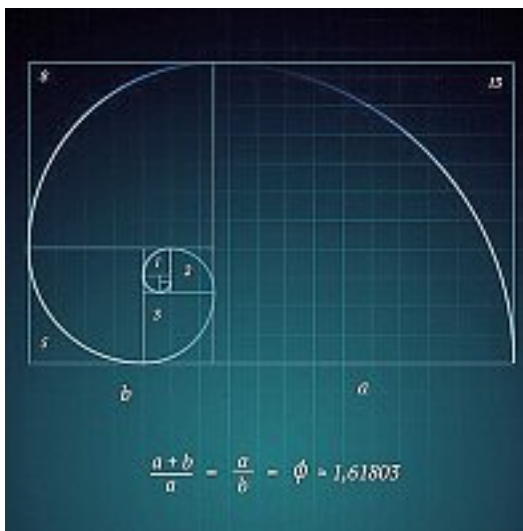
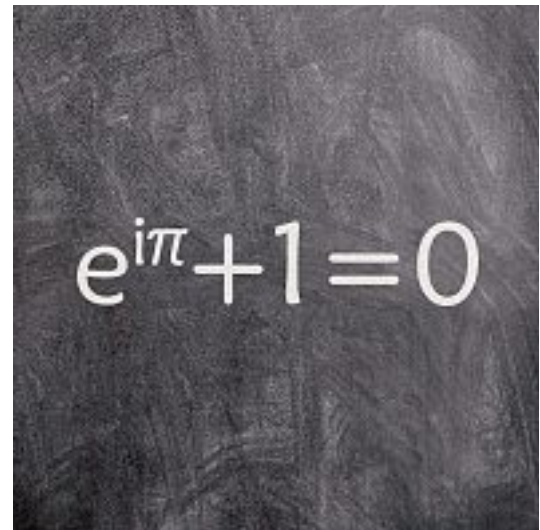
GERTI KAPPEL
TU-PROFESSORIN FÜR
BUSINESS INFORMATICS

die Tech·nik

Vier Formeln, die Geschichte schrieben

Wenn simple Gleichungen die komplexe Beschaffenheit der Welt verständlich machen, zeigt sich die Mathematik von ihrer aufregendsten Seite.

Vier Formeln für die Ewigkeit: Verantwortlich zeichnen Pythagoras (links oben), Leonhard Euler (r.o.), Euklid (l.u.) und Albert Einstein.



Der Beweis

„In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadrate über den Katheten gleich dem Quadrat über der Hypotenuse.“ Der Pythagoräische Lehrsatz ($a^2 + b^2 = c^2$), an dem wohl kein Schüler je vorbeigekommen ist, gehört zu den Grundpfeilern der modernen Mathematik und trägt seit rund 2500 Jahren zum Erfolg dieser Disziplin bei. Bekannt ist heute, dass die Harpedonapten (Seilknüpfer) bei den alten Ägyptern bereits mehr als tausend Jahre vor Pythagoras vom rechtwinkligen Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 (oder einem Vielfachen dieser Zahlen) Gebrauch gemacht haben, um die Richtungen bei ihren Bauten festzulegen. Dem griechischen Vordenker aus Samos kommen laut Historikern die Meriten der allgemeinen Beweisführung zu. Unbestritten ist, dass die Mathematik erst durch Pythagoras (um 580–501 v. Chr.) zu einer richtigen Wissenschaft avanciert ist. In der von ihm gegründeten Schule im unteritalienischen Kroton wurden die allgemeinen Grundsätze und der ideale Charakter der Mathematik festgelegt. Zudem wurde eines der fundamentalen logischen Elemente eingeführt, die Führung eines Beweises.

Die Schönheit

Wann immer Mathematiker_innen nach den schönsten Formeln aller Zeiten befragt werden, rangiert die Eulersche Identität, $e^{i\pi} + 1 = 0$, an erster Stelle. Das lässt sich auch neurowissenschaftlich untermauern. Bei einem Experiment, das Wissenschaftler 2014 in London durchgeführt haben, ist die Gehirnaktivität von 15 Mathematikern beim Anblick verschiedener Formeln untersucht worden. Dabei zeigte sich, dass der für die emotionale Bewertung wichtige orbitofrontale Kortex (Teil der Großhirnrinde; wird zum Beispiel bei der Betrachtung von Gemälden oder dem Hören von Musik aktiv) auch bei der Betrachtung der Eulerschen Identität höchst beeindruckt war. Was der Schweizer Mathematiker und Physiker Leonhard Euler 1748 in seinem Werk „Introductio in analysin infinitorum“, einer Art Bibel der analytischen Mathematik, präsentiert hat, wird als Gleichung verehrt, weil sich darin fünf der wichtigsten Zahlen der Mathematik wiederfinden: die 0 und die 1, die Kreiszahl Pi, die für die Beschreibung von Wachstumsprozessen unverzichtbare Zahl e sowie die komplexe Zahl i. Dass zwischen Zahlen, die für völlig verschiedene Zwecke maßgeschneidert worden sind, ein einfacher zu lesender Zusammenhang besteht, verleiht der Eulerschen Identität einen mystischen Charakter, der für die universelle Einheit der Mathematik steht.

Die Verschmelzung

Man teile eine Strecke in zwei Teilstrecken. Wenn sich die größere Teilstrecke zur kleineren so verhält wie die Gesamtstrecke zur Größeren – dann stehen die beiden Strecken im Verhältnis des Goldenen Schnitts. Der Wert dieses Streckenverhältnisses entspricht exakt der Goldenen Zahl, die man wahrscheinlich als außergewöhnlichste aller Zahlen bezeichnen kann. Die erste genaue Beschreibung des Goldenen Schnitts findet sich im zweiten Buch der Elemente des Euklid (um 300 v. Chr.). Populär wurde der Begriff ab der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts. In dieser Zeit war auch erstmals von der Goldenen Zahl die Rede. Was Schnitt und Zahl so besonders machen, ist zum einen deren gleichermaßen große Bedeutung in Mathematik, Kunst und Architektur und zum anderen, dass sich das in eine mathematische Formel gegossene Verhältnis auf erstaunliche Weise in der Schöpfung wiederfindet – ob in der geometrischen Form von Blütenblättern, Bienenwaben, Schneckenhäusern oder Kristallstrukturen. Die Formel des Goldenen Schnitts und der Goldenen Zahl symbolisiert wie keine andere die Verschmelzung von Natur und Mathematik.

Die Berühmtheit

Auf drei Seiten der Zeitschrift „Annalen der Physik“ veröffentlichte im Jahr 1905 der in Bern lebende deutsche Physiker Albert Einstein einen Artikel zum scheinbar spröden Thema der „Elektrodynamik bewegter Körper“. Eine mathematische Formel, die sich darin fand (im Original mit anderen Buchstaben, da die Symbole E, m und c für Energie, Masse und Lichtgeschwindigkeit erst später eingeführt wurden), ging als $E = mc^2$ als wohl berühmteste Gleichung aller Zeiten in die Geschichte ein. Einstein postulierte als Erster die allgemeingültige Gesetzmäßigkeit, dass jede Masse (also jeder Körper, jeder Gegenstand) Energie (also Licht oder Wärme) ist – und jede Energie umgekehrt auch Masse. Materie ist quasi verfestigte Energie und Energie verflüssigte Materie. Das c in der Formel steht für die Lichtgeschwindigkeit, sprich für 300.000 Kilometer pro Sekunde, c^2 entspricht demnach 90 Milliarden km^2/s^2 und diese riesige Zahl verdeutlicht dank der Schlichtheit der Formel selbst dem Laien, dass auch in den kleinsten Teilchen Materie eine unvorstellbar große Menge an Energie steckt. Die Atombombe legte 1945 davon ein dramatisches Zeugnis ab. Auf der anderen Seite trägt die Formel der Relativitätstheorie von Einstein bis heute wesentlich zum Verständnis des Ursprungs, der Struktur und des Schicksals unseres Universums bei.

Rudolf Taschner, Buchautor und Verfasser mathematischer, gesellschaftspolitischer und philosophischer Essays. Als Professor an der TU Wien und als Initiator und Betreiber des Projekts math.space im Wiener Museumsquartier setzte er sich 15 Jahre lang (bis Ende 2017) dafür ein, dass die Mathematik möglichst vielen Menschen zugänglich wird.

Die Wissenschaft vom Unendlichen

Die Geschichte eines Abenteurers, auf das sich kaum jemand einlassen möchte.

Mit der Mathematik gelangt man vom Staunen über die Welt zum Wissen über deren Fundament. An der Astronomie sah sich Pythagoras bestätigt: Hinter den Rhythmen der Gestirne verbirgt sich die Geometrie. Auch an der Musik fand sich Pythagoras bestärkt: Hinter den wohlklingenden konsonanten Intervallen verbergen sich Verhältnisse kleiner Zahlen: Musik ist Arithmetik für das Ohr. Der sowohl der Geometrie als auch der Arithmetik gemeinsame Urgrund aber ist, so lehrt schon vor Pythagoras Anaximander, das Apeiron, das Unendliche. Denn die Zahlen kennen kein Ende, keine Zahl ist die letzte. Und unendlich viele Punkte liegen auf einer Linie, bilden eine Fläche, füllen den Raum aus. So ist das Wort Hermann Weyls, des tiefsten mathematischen Denkers des 20. Jahrhunderts, zu verstehen: Mathematik ist die Wissenschaft vom Unendlichen. Unverständlich bleibt dabei, warum die Beschäftigung mit dem Unendlichen so vieles in der Natur zu beschreiben vermag. Naturwissenschaften gründen auf Mathematik. Wie kann dies gelingen, da sich doch nirgends in der Natur Unendliches findet? Nicht einmal Zahlen als solche oder mathematisch exakte Punkte gibt es in der sinnlich erfassten Welt, vom Unendlichen selbst ganz zu schweigen.



Rudolf Taschner, Wissenschaftler, Buchautor und Vortragender.

„Das Unverständlichste am Universum ist im Grunde, dass wir es verstehen“, wunderte sich Albert Einstein. Vielleicht kann man sich dem Rätsel mit folgendem Gedanken nähern: Alle sinnlichen Eindrücke filtern wir als Wahrnehmungen ins Bewusstsein. Es dürfte die stets dem Unendlichen gegenüber offene Wahrnehmung selbst sein, die uns den sinnlichen Eindruck erfahrbar macht. Sodass das Unendliche nicht in der Natur, wohl aber im Bewusstsein zu finden ist.

Wie aber zeigt es sich dem Bewusstsein? Hermann Weyls Lehrer David Hilbert schlug eine pragmatische Sichtweise vor: Man gehe von willkürlich gesetzten Annahmen aus und studiere die aus ihnen gewonnenen Folgerungen.

Dass die Annahmen das Wesen des Unendlichen widerspiegeln, hat Hilbert zwar als wünschenswert erachtet, aber unerheblich. Mathematik gründet allein auf den willkürlichen Annahmen und deren Folgerungen.

Hermann Weyl räumte zwar ein, dass diese Vorgangsweise legitim ist. Aber trotzdem ähnelt sein Blick auf das Unendliche jenem des jungen Törleß, über den Robert Musil geschrieben hat: „Das Unendliche! Törleß kannte das Wort aus dem Mathematikunterrichte. Er hatte sich nie etwas Besonderes darunter vorgestellt. Es kehrte immer wieder; irgendjemand hatte es einst erfunden, und seither war es möglich, so sicher damit zu rechnen wie nur mit irgendetwas Festem. Es war, was es gerade in der Rechnung galt; darüber hinaus hatte Törleß nie etwas gesucht. Und nun durchzuckte es ihn wie mit einem Schläge, dass an diesem Worte etwas furchtbar Beunruhigendes hafte. Es kam ihm vor wie ein gezähmter Begriff, mit dem er täglich seine kleinen Kunststückchen gemacht hatte und der nun plötzlich entfesselt worden war. Etwas über den Verstand Gehendes, Wildes, Vernichtendes schien durch die Arbeit irgendwelcher Erfinder hineingeschlüfert worden zu sein und war nun plötzlich aufgewacht und wieder furchtbar geworden.“

Seit mehr als hundert Jahren beschloss die überwiegende Mehrheit der Mathematiker_innen, des Törleß Blick in den Abgrund des Unendlichen zu meiden und Hilberts Vorschlag zu befolgen, also lieber die „Kunststückchen“ mit dem „hineingeschlüfertem“ Unendlichen aufzuführen. Wie ich in meinem Buch „Vom Kontinuum zum Integral“ belegte, ginge es auch anders. Aber kaum jemand will sich auf ein solches Abenteuer einlassen ...



Ausbruch aus der Filterblase

Die Presse

Du verlässt dich nicht gern auf Algorithmen, sondern machst dir lieber dein eigenes Bild? Wir haben das passende Basismaterial für dich: gecheckte Fakten, spannende Stories, tiefgehende Reportagen, vielfältige Meinungen.

DiePresse.com

Jetzt bis
30. November

-70%

REDUZIERT

danach bis
zu -39%

Hochwertiger Journalismus in flexiblen Abopaketten
zu unverschämt niedrigen Preisen

Jetzt für alle unter 27

DiePresse.com/U27



FORMATH

Forum Mathematik

Als eine der ältesten Wissenschaften hat die Mathematik nicht nur zum naturwissenschaftlichen und technischen Fortschritt der Menschheit wesentlich beigetragen, sondern auch die kulturelle Entwicklung maßgeblich geprägt.

Mit TUForMath macht die TU Wien mit Vorträgen, einem Schulprogramm und einer Vorlesung diesen oft im Verborgenen gebliebenen Beitrag der Mathematik sichtbar.

Vorträge im Wintersemester 2019/20

21.11.2019 | Walter Schachermayer (Universität Wien)

Wie wahrscheinlich ist der Zufall?

28.11.2019 | Richard Hartl (Universität Wien)

Tourenplanung: Gewinnmaximierung oder Fairness?

12.12.2019 | Martin Goldstern (TU Wien)

Unendlich viele Unendlichkeiten

09.01.2020 | Peter Balazs (Österreichische Akademie der Wissenschaften)

Mathematik und Akustik

23.01.2020 | Monika Ludwig (TU Wien)

Die Geometrisierung der Analysis

Vorträge jeweils Donnerstags, 18.00 bis 19.00 Uhr, Freihaus Hörsaal 8
Technische Universität Wien, Wiedner Hauptstraße 8, gelber Bereich, 2. OG

www.TUForMath.at/vortraege