

Kurzfassung

Für eine beschränkte Borelsche Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ und $s \in (0, 1)$ wird der fraktionale s -Perimeter $P_s(E)$ definiert durch

$$P_s(E) = \int_E \int_{E^c} \frac{1}{|x - y|^{n+s}} dx dy,$$

was als ein Spezialfall des Sehnenpotenzintegrals aufgefasst werden kann. Diese Arbeit untersucht Minkowski-Probleme und affine funktionale Ungleichungen im Zusammenhang mit fraktionalen Perimetern.

Eine funktionale Erweiterung des Sehnenpotenzintegrals ist gegeben durch

$$I_{\alpha+1}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)f(y)}{|x - y|^{n-\alpha}} dx dy,$$

für die Haddad und Ludwig [39] die affinen Hardy–Littlewood–Sobolev-(HLS-)Ungleichungen gezeigt haben. In dieser Arbeit werden die Grenzfälle der affinen HLS-Ungleichungen untersucht: Für $\alpha \rightarrow n$ ergibt sich die affine logarithmische HLS-Ungleichung, und für $\alpha \rightarrow 0$ wird eine Beckner-artige affine logarithmische Sobolev-Ungleichung hergeleitet.

Darüber hinaus werden Variationsformeln für anisotrope fraktionale Perimeter aufgestellt, die zu einer neuen Familie geometrischer Maße führen. Deren Grenzverhalten wird analysiert und das entsprechende Minkowski-Problem gelöst. Insbesondere wird eine notwendige Bedingung für die Konvexität von Optimierern in der anisotropen fraktionalen isoperimetrischen Ungleichung bewiesen.

Abstract

For a bounded Borel set $E \subset \mathbb{R}^n$ and $s \in (0, 1)$, the fractional s -perimeter $P_s(E)$ is defined by

$$P_s(E) = \int_E \int_{E^c} \frac{1}{|x - y|^{n+s}} dx dy,$$

which is a special case of the chord power integral. This thesis investigates Minkowski-type problems and affine functional inequalities associated with fractional perimeters.

A functional extension to the chord power integral is given by

$$I_{\alpha+1}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)f(y)}{|x - y|^{n-\alpha}} dx dy,$$

for which, Haddad and Ludwig [39] established the affine Hardy-Littlewood-Sobolev (HLS) inequalities. In the thesis, The limiting cases of the affine HLS inequalities are studied: for $\alpha \rightarrow n$, the affine logarithmic HLS inequality is obtained; and as $\alpha \rightarrow 0$, a Beckner-type affine logarithmic Sobolev inequality is derived.

In addition, variational formulas for anisotropic fractional perimeters are established, leading to a new family of geometric measures. Their limiting behavior is studied, and the corresponding Minkowski problem is solved. In particular, a necessary condition for the convexity of optimizers in the anisotropic fractional isoperimetric inequality is proved.