

Kurzfassung der Doktorarbeit

Name des Kandidaten: Leon Happ

Name des/der Betreuer(s)/in: Elisa Davoli (Erstbetreuerin), Giovanni Di Fratta (Zweitbetreuer)

Name des/der Gutachter(s)/in: Caterina Zeppieri und Arghir Zarnescu

Titel der Doktorarbeit: Modern phenomena in micromagnetics from a variational point of view

Meine Doktorarbeit umfasst neben einer ausführlichen Einleitung in die mikromagnetische Kontinuumsstheorie und die Theorie der Γ -Konvergenz und Homogenisierung die vier Artikel [1, 3, 2, 4] und beschäftigt sich größtenteils mit Fragestellungen, die sich im Zusammenhang moderner Applikationen von magnetischen Materialien ergeben.

Artikel [3], entstanden in Zusammenarbeit mit C. Gavioli und V. Pagliari, erforscht die Existenz von Fortsetzungen von mannigfaltigkeitswertigen Sobolevfunktionen auf perforierten Gebieten. Unsere Resultate in dieser Richtung sind die ersten, die hinreichende topologische Bedingungen der Zielmannigfaltigkeit herleiten, damit obengenannte Fortsetzungen tatsächlich konstruiert werden können. Diese Einsichten sind besonders für Homogenisierungsprobleme mit Mannigfaltigkeitsbeschränkungen relevant.

Die Arbeit [2], ausgeführt zusammen mit E. Davoli, hat als Zielsetzung die Herleitung effektiver Modelle für magnetische hochkontrast ('high contrast') Kompositmaterialien, die für die Herstellung modernen Metamaterialien von Interesse sind. Sie adressiert damit eine Fragestellung im Bereich der variationellen Homogenisierung. Anhand eines vereinfachten Modells zeigen wir, welchen Einfluss der nichtlokale magnetostatische Energiebeitrag in einem derartigen Model hat. Insbesondere beweisen wir, aufbauend auf Überlegungen von Bethuel und Zheng, ein Approximationsresultat für spezielle S^2 -wertige Funktionen bezüglich der 2-Skalen-Konvergenz. Unsere Arbeit stützt sich auf die gewonnenen Resultate in [3].

Auch Artikel [4], verfasst gemeinsam mit R. Giorgio und H. Schönberger, steht in Zusammenhang mit Homogenisierung, hier angewandt auf ein nichtlokales Model der symmetrischen und antisymmetrischen Austauschenergien ('exchange energies') in ferromagnetischen Materialien. Basierend auf neuen Resultaten die 2-Skalen-Konvergenz von Differenzenquotienten betreffend, leiten wir ein Grenzwertmodell für jene nichtlokalen Energien her.

Schließlich befasst sich [1], entstanden in gemeinsamer Arbeit mit E. Davoli, G. Di Fratta und A. Fiorenza, mit einer neuartigen Poincaré-Wirtinger Ungleichung in variablen Sobolevräumen. Wir schafften es zum ersten Mal eine derartige Ungleichung herzuleiten, die sich im Fall eines konstanten Sobolevexponenten auf die bekannte Form der Ungleichung reduziert. Wir hoffen, dass ein ein derart grundlegendes Resultat neue Einsichten in die Natur variationeller Probleme auf variablen Sobolevräumen ermöglicht.

Referenzen

- [1] E. Davoli, G. Di Fratta, A. Fiorenza, and L. Happ. A modular Poincaré-Wirtinger inequality for Sobolev spaces with variable exponents. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, 31(5):Paper No. 81, 24, 2024. [doi:10.1007/s00030-024-00977-w](https://doi.org/10.1007/s00030-024-00977-w).
- [2] E. Davoli and L. Happ. Two-scale density of almost smooth functions in sphere-valued sobolev spaces: A high-contrast extension of the Bethuel-Zheng theory, 2024. [arXiv:2411.07838](https://arxiv.org/abs/2411.07838).
- [3] C. Gavioli, L. Happ, and V. Pagliari. On the existence of extensions for manifold-valued sobolev maps on perforated domains. *Journal of Functional Analysis*, 289(11):111142, 2025. [doi:10.1016/j.jfa.2025.111142](https://doi.org/10.1016/j.jfa.2025.111142).
- [4] R. Giorgio, L. Happ, and H. Schönberger. Homogenization of nonlocal exchange energies in micromagnetics, 2025. [arXiv:2507.13262](https://arxiv.org/abs/2507.13262).